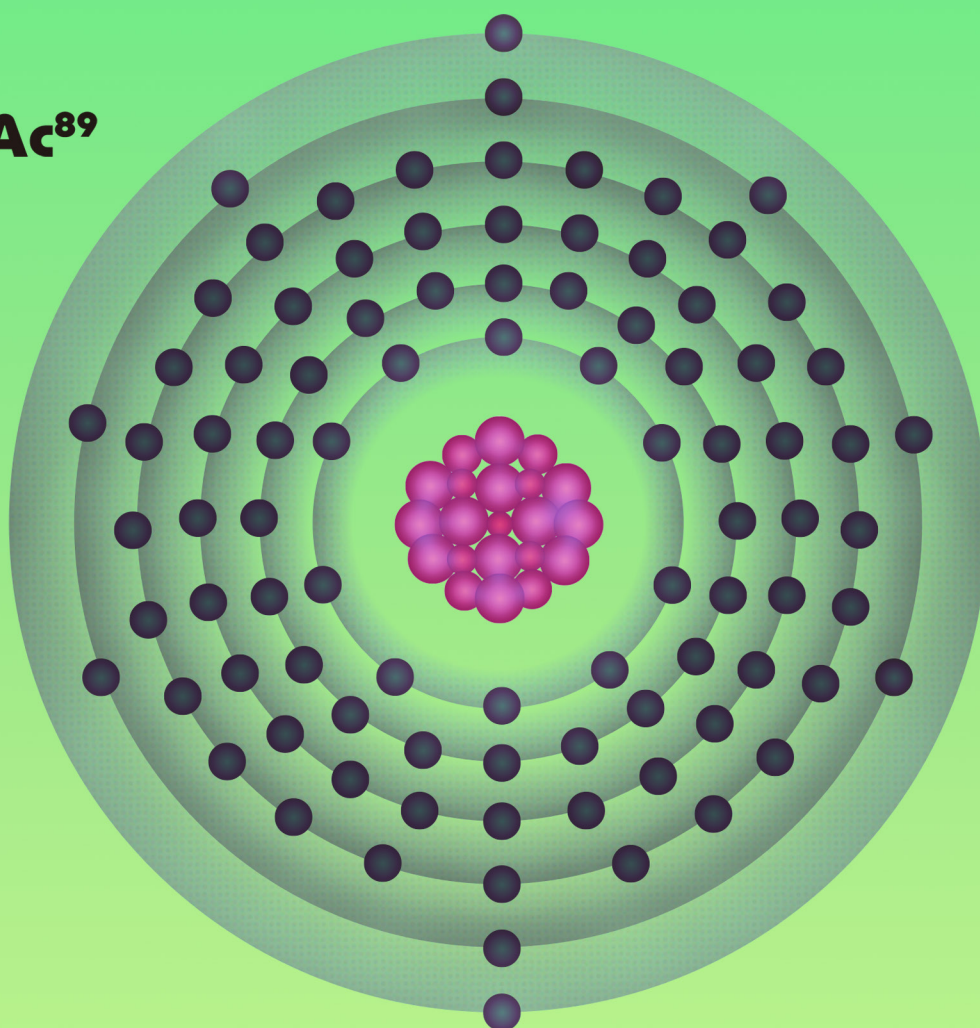


Eva Ferreira Garcia
Jone Ascorbebeitia Bilbatua

89 Problemas Resueltos de Probabilidad, Procesos Estocásticos y Cálculo de Itô

Ac⁸⁹



EHU

89 Problemas Resueltos de Probabilidad, Procesos Estocásticos y Cálculo de Itô

Eva Ferreira & Jone Ascorbebeitia



Ferreira, Eva

89 problemas resueltos de probabilidad, procesos estocásticos y cálculo de Itô [Recurso electrónico] / Eva Ferreira & Jone Ascorbebeitia. – Datos. – [Leioa] : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2026]. – 1 recurso en línea: PDF (120 p.). – (Unibertsitateko Eskuliburuak = Manuales Universitarios)

Modo de acceso: World Wide Web

ISBN: 978-84-1319-800-2

1. Probabilidades – Problemas y ejercicios. 2. Procesos estocásticos – Problemas y ejercicios.
3. Cálculo – Problemas y ejercicios. I. Ascorbebeitia Bilbatua, Jone, coaut. II. Tit.: Ochenta y nueve problemas resueltos de probabilidad, procesos estocásticos y cálculo de Itô.

(0.034) 519.2(07)

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial
editorial@ehu.eus - 94 601 2227
www.ehu.eus/argitalpenak
Edificio Biblioteca, 1.ª planta
B.º Sarriena s/n. Campus de Bizkaia

ISBN: 978-84-1319-800-2

Agradecimientos

Este libro es el resultado de un trabajo orientado a facilitar el aprendizaje de los procesos estocásticos, desarrollado gracias al apoyo de numerosas personas.

Queremos agradecer el apoyo vital de nuestros seres queridos, que nos dan fuerza y ganas de ser mejores cada día. También queremos agradecer la colaboración de compañeras y colaboradores con quienes hemos intercambiado ideas y compartido experiencias profesionales y personales. Por último, queremos destacar y agradecer de forma especial la colaboración de los profesores David Nualart y Larraitz Aramburu en la elaboración de algunos apuntes y problemas de procesos estocásticos, que han inspirado varios problemas resueltos en este libro.

“Science and everyday life
cannot and should not be
separated.”

Rosalind Franklin

Índice general

Presentación	III
I PROBABILIDAD	1
1 Ejercicios básicos	3
2 Mixturas de distribuciones	17
3 Convergencias	31
II PROCESOS ESTOCÁSTICOS	43
4 Ejercicios básicos	45
5 Cadenas de Markov	49
6 Procesos de Poisson	55
7 Procesos autorregresivos	65
8 Martingalas	73

III CÁLCULO DE ITÔ	79
9 Movimiento Browniano	81
10 Cálculo de Itô	85
11 Representación integral de martingalas	91
12 Black-Scholes	99
Bibliografía	109

Presentación

A lo largo del siglo XX y de lo que llevamos del siglo XXI, el desarrollo de modelos matemáticos bajo incertidumbre, conocidos como modelos estocásticos, ha crecido de forma exponencial. El desarrollo matemático de las propiedades de los procesos estocásticos, la capacidad de los ordenadores actuales para realizar estudios de simulación altamente sofisticados, y la necesidad de modelización de las dinámicas de las variables de interés en contextos de incertidumbre, han supuesto un gran avance del estudio teórico y aplicado de los procesos estocásticos.

Hoy en día, existen gran cantidad de libros de procesos dedicados al estudio de las propiedades matemáticas. Las aplicaciones de estas propiedades han contribuido en gran parte a la proliferación de derivados financieros. Así, en 1997 el Premio Nobel de Economía fue para Robert C. Merton y Myron S. Scholes, por contribuir a las ciencias económicas, con un nuevo método para determinar el valor de los derivados. Esto ha supuesto que las aplicaciones de los procesos estocásticos a la valoración de activos financieros haya tenido un recorrido propio y extenso en la publicación de libros y artículos. Sin embargo, no son habituales los libros dedicados a resolver ejercicios concretos de carácter aplicado. Desde la práctica docente, las autoras entendemos que un libro dedicado a resolución de ejercicios resultará de gran ayuda para quienes tengan una formación básica de procesos y cálculo estocástico y quieran realizar ejercicios prácticos con aplicaciones cercanas y relacionadas con problemas financieros. Por otra parte, entendemos que se trata de un complemento muy adecuado para cualquier curso sobre procesos estocásticos y cálculo de Itô.

En total, se enuncian y resuelven 89 ejercicios. Hemos elegido este número como un homenaje a la belleza de los números. Es el vigésimo cuarto número primo, pitagórico $89 = 4 \cdot n + 1$, con $n = 22$, y el primer primo "Sophie Germain", ya que 89 es el primer primo tal que $2 \cdot 89 + 1 = 179$ es a su vez un número primo. Es además, número primo Eisenstein y pertenece a la sucesión de Fibonacci. También es el número atómico del actinio, elemento representado en la portada del libro. Por desgracia, se trata de un número maldito por el gobierno chino, por ser el año de las protestas en la Plaza Tiananmén.

Este libro consta de tres grandes bloques de ejercicios: un primer bloque con ejercicios de probabilidad, otro relativo a los ejercicios correspondientes a procesos estocásticos, y un último bloque dedicado al cálculo integral estocástico (cálculo de Itô).

El primer bloque consta de 3 capítulos: ejercicios básicos, mixtura de distribuciones y convergencias. A través de ellos se pretende que se adquiera soltura con ejercicios de probabilidad.

El segundo bloque se compone de 5 capítulos, un primer capítulo en el que se plantean ejercicios básicos y cuatro relacionados con procesos estocásticos conocidos: cadenas de Markov, procesos de Poisson, procesos autorregresivos y martingalas.

El último bloque es el dedicado al cálculo integral. Para ello, en el Capítulo 9, se proponen problemas relacionados con el movimiento browniano, incluyendo un ejercicio dedicado al teorema funcional del límite. En el Capítulo 10 se resuelven problemas de cálculo de Itô. Será necesario adquirir destreza con dichos problemas para poder resolver los ejercicios de representación integral de martingalas planteados en el Capítulo 11. Para terminar, el Capítulo 12 es el relativo a la valoración de derivados mediante Black-Scholes.

Al final del libro se incluyen las referencias en las que se puede encontrar la teoría necesaria para la realización de los ejercicios.

Parte I

PROBABILIDAD

Ejercicios básicos

Ejercicio 1 *Se plantea el siguiente juego. Hay dos urnas, A y B. A contiene 100 bolas, de las cuales 5 están premiadas. B contiene 10 bolas, de las cuales 1 está premiada. El juego consiste en elegir una urna al azar y después extraer una bola.*

- I) *¿Cuál es la probabilidad de obtener premio?*
- II) *Se ofrece ahora la posibilidad de echar todas las bolas en una única urna. ¿Cuál de los dos juegos es más favorable?*

Solución

Sea G el suceso correspondiente a ganar premio. Sean A y B los sucesos que corresponden a seleccionar las urnas A y B , respectivamente.

- I) Por el teorema de la probabilidad total, para el primer caso

$$P_1(G) = P(A) \cdot P(G|A) + P(B) \cdot P(G|B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = 0,075$$

- II) Para el segundo juego,

$$P_2(G) = \frac{6}{110} = 0,0545$$

Por lo tanto, el primer juego es más favorable.

Ejercicio 2 *En una habitación en la que hay n personas, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos personas coincidan en la fecha de cumpleaños (sin considerar bisiestos)? Obtén la probabilidad para $n=10, 20, 30$ y 40 .*

Solución

Problema publicado por Zoe Emily Schnabel, en American Mathematical Monthly en 1938, aplicado a la teoría de estimación del total de población de peces en un lago.

Sea A el suceso en el que al menos dos personas cumplen años el mismo día. Entonces, A^c denota el suceso en el que no hay ninguna coincidencia.

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = 1 - \frac{V_{365}^n}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!}$$

$n = 10$:

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{(355)!} = 0,1169$$

$n = 20$:

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{(345)!} = 0,4114$$

$n = 30$:

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{(335)!} = 0,7063$$

$n = 40$:

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{(325)!} = 0,8912$$

En la Figura 1.1 representamos la probabilidad de que haya al menos una coincidencia dependiendo del número de personas que se encuentran en la habitación. En él se observa que, a partir de 23 personas, esta probabilidad ya supera el 50 %.

Ejercicio 3 *En un concurso televisivo, el concursante elige entre tres cajas numeradas del 1 al 3 y de las cuales únicamente una está*

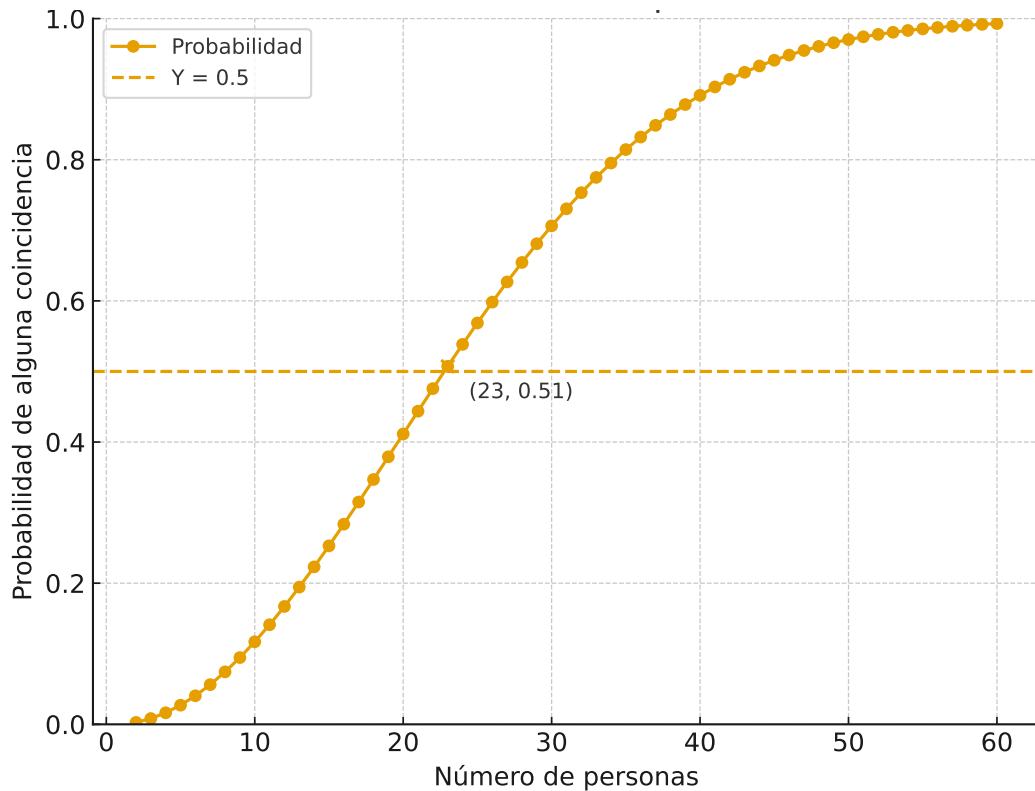


Figura 1.1: Probabilidad de alguna coincidencia en el cumpleaños en función del número de personas.

premiada. El concursante elige la caja 1. Una vez hecha la elección, la presentadora siempre abre una nueva posibilidad diciendo "le voy a abrir, de las dos cajas restantes, una que no tiene premio y, si quiere, puede cambiar su elección". En este caso le abre la caja 2, mostrando que está vacía y el concursante puede cambiar su elección de la caja 1 a la caja 3. ¿Qué debe hacer?

Solución

¡DEBE CAMBIAR! Este es el conocido problema de Monty Hall (*problema publicado por Steve Selvin, en American Statistician en 1975*). Para demostrarlo, denotemos por G el suceso en el que se gana el premio y por C_1 , C_2 y C_3 los sucesos *premio en la caja 1, 2 y 3* respectivamente. Al principio del juego, el premio puede estar en cualquiera de las cajas con probabilidad $1/3$ y, por el

teorema de la probabilidad total,

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G \cap C_1) + P(G \cap \{C_2 \cup C_3\}) = P(C_1)P(G|C_1) + P(C_2 \cup C_3)P(G|C_2 \cup C_3) \\ &= \frac{1}{3}P(G|C_1) + \frac{2}{3}P(G|C_2 \cup C_3) \end{aligned}$$

Sin cambiar: Solo gana si el premio está en la caja 1. Sea P_1 la probabilidad de ganar sin cambiar.

$$P_1(G) = \frac{1}{3}P_1(G|C_1) + \frac{2}{3}P_1(G|C_2 \cup C_3) = \frac{1}{3}$$

Cambiando: Gana si el premio está en el conjunto (2,3). Sea P_2 la probabilidad de ganar cambiando a la caja 3.

$$P_2(G) = \frac{1}{3}P_2(G|C_1) + \frac{2}{3}P_2(G|C_2 \cup C_3) = \frac{2}{3}$$

La intuición detrás de este resultado es que al abrir la caja 2, la presentadora está aportando información. Si el premio estuviese en dicha caja, no la podría abrir y tendría que haber abierto la caja 3.

Otra forma de resolverlo sería considerando el suceso A_2 : { Abrir caja 2 }. Una vez que la ha abierto, las nuevas probabilidades de ganar son:

$$P_1(G) = P(C_1|A_2) = \frac{P(A_2|C_1)P(C_1)}{P(A_2)} = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$$P_2(G) = P(C_3|A_2) = \frac{P(A_2|C_3)P(C_3)}{P(A_2)} = \frac{1 \cdot 1/3}{1/2} = \frac{2}{3},$$

ya que

$$P(A_2) = P(A_2|C_1)P(C_1) + P(A_2|C_2)P(C_2) + P(A_2|C_3)P(C_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 4 Sea X una variable aleatoria (v.a.) log-normal, es decir, $Y = \log X$ sigue una ley normal $N(\mu, \sigma^2)$. Obtén la función de densidad de X utilizando las reglas de cambio de variable.

Solución

Tenemos que $X = \exp(Y)$. Se trata de una transformación invertible con lo que

$$f_X(x) = f_Y(g(x))|g'(x)|$$

donde $g(x) = \log(x)$, $g'(x) = 1/x$, y

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

para $y \in \mathbb{R}$. Así, X es una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad \text{para } x = e^y \geq 0$$

Ejercicio 5 *La v.a. X sigue una ley normal $N(0, 1)$. ¿Cuál es la función de densidad de $Y = |X|$?*

Solución

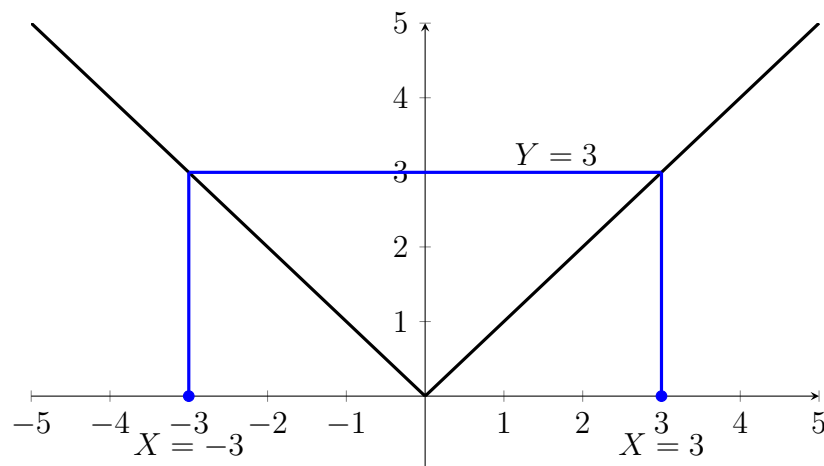


Figura 1.2: Representación de la función $Y = |X|$.

Como se puede apreciar en la Figura 1.2, no se trata de una transformación invertible, así que no podemos utilizar directamente la fórmula de cambio de

variable. Consideremos la función de distribución $F_Y(y)$. Para un valor $y \leq 0$, tenemos que $F_Y(y) = 0$. Para el resto,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(|X| \leq y) = P(-y \leq X \leq y) \\ &= \int_{-y}^y f_X(x) dx = F_X(y) - F_X(-y) = 2F_X(y) - 1 \end{aligned}$$

Por tanto, para $y \geq 0$,

$$f_Y(y) = 2f_X(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2}$$

Ejercicio 6 *Sea X una variable aleatoria con función de distribución*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula la función de densidad y la función de distribución de la v.a. $Z = |X - 1|$.

Solución

La función de densidad de la v.a. X es

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

De la Figura 1.3 queda claro que tenemos dos situaciones, cuando $0 \leq z \leq 1$ y cuando $z > 1$.

Para $0 \leq z \leq 1$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(|X - 1| \leq z) = P(-z + 1 \leq X \leq z + 1) \\ &= F_X(z + 1) - F_X(1 - z) = e^{-(1-z)} - e^{-(1+z)} \\ f_Z(z) &= f_X(z + 1) + f_X(1 - z) = e^{-(1-z)} + e^{-(1+z)} \end{aligned}$$

Para $1 < z$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X \leq z + 1) = F_X(z + 1) = 1 - e^{-(1+z)} \\ f_Z(z) &= e^{-(1+z)} \end{aligned}$$

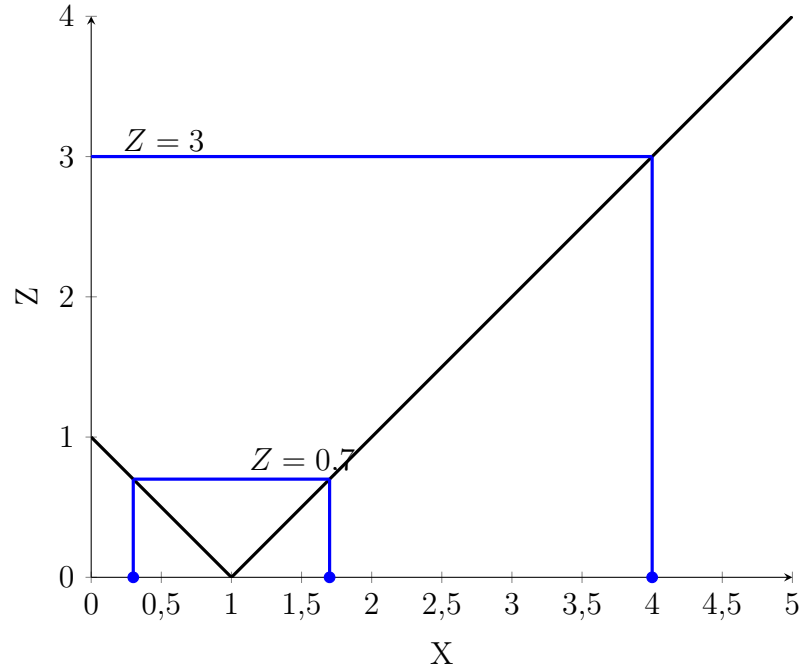


Figura 1.3: Representación de la función $Z = |X - 1|$ con algunos niveles destacados.

Por tanto,

$$F_Z(z) = \begin{cases} e^{-(1-z)} - e^{-(1+z)} & 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - e^{-(1+z)} & 1 < z \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-(1-z)} + e^{-(1+z)} & 0 \leq z \leq 1 \\ e^{-(1+z)} & 1 < z \end{cases}$$

Ejercicio 7 En una entidad bancaria se quiere confeccionar una cartera formada por dos activos, con rendimientos R_1 y R_2 , y el activo seguro de rendimiento $S = 5\%$. Se sabe que las distribuciones de los rendimientos de los dos activos son $R_1 \sim N(15\%, \sigma_1 = 10\%)$ y $R_2 \sim N(7\%, \sigma_2 = 5\%)$. La correlación entre ambos rendimientos es $\rho_{12} = 0,7$. Se plantean dos carteras A y B, cuyos rendimientos son $R_A = 0,25R_1 + 0,25R_2 + 0,5S$ y $R_B = 0,4R_1 + 0,2R_2 + 0,4S$, respectivamente.

- I) *Analiza para ambas carteras: rendimiento medio, varianza y probabilidad de que el rendimiento supere el 10 %.*
- II) *El banco ofrece a los inversores un rendimiento en ambas carteras del 6,5 %. Obtén la distribución del porcentaje de beneficios sobre inversión para cada cartera.*
- III) *Si el banco recibe 1 millón de euros de inversión para cada una de las carteras, obtén la probabilidad de que los beneficios totales de la operación superen los 10000 euros.*

Solución

- I) Por la propiedad de linealidad de la esperanza, el rendimiento medio o valor esperado de la cartera A es

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R_A) &= \mathbb{E}(0,25R_1 + 0,25R_2 + 0,5S) = 0,25\mathbb{E}(R_1) + 0,25\mathbb{E}(R_2) + 0,5\mathbb{E}(S) \\ &= 0,25 \cdot 15 + 0,25 \cdot 7 + 0,5 \cdot 5 = 8\end{aligned}$$

Como la varianza de una suma es la suma de varianzas mas dos veces la covarianza entre ambas, y dado que el activo seguro carece de incertidumbre y es independiente de cualquier otro activo,

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= \mathbb{V}(0,25R_1 + 0,25R_2 + 0,5S) = 0,25^2\sigma_1^2 + 0,25^2\sigma_2^2 + 2 \cdot 0,25^2\sigma_{12} \\ &= 0,25^2\sigma_1^2 + 0,25^2\sigma_2^2 + 2 \cdot 0,25^2\rho_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \\ &= 0,25^2 \cdot 10^2 + 0,25^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 0,25^2 \cdot 0,7 \cdot 10 \cdot 5 = 12,18\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\mathbb{E}(R_B) = 9,4 \quad \sigma_B^2 = 22,60$$

Dado que cualquier combinación lineal de normales es también una variable normal, si $Z \sim N(0, 1)$,

$$P(R_A > 10) = P\left(Z > \frac{10 - 8}{\sqrt{12,18}}\right) = P(Z > 0,5730) = 0,2833$$

$$P(R_B > 10) = P\left(Z > \frac{10 - 9,4}{\sqrt{22,6}}\right) = P(Z > 0,1262) = 0,4498$$

II) La distribución de beneficios a la inversión de las carteras viene dada por

$$\begin{aligned} B_A = R_A - 6,5 &\sim N(1,5\%, \sigma_A = \sqrt{12,18}\%) = N(1,5\%, \sigma_A = 3,49\%) \\ B_B = R_B - 6,5 &\sim N(2,9\%, \sigma_B = \sqrt{22,60}\%) = N(2,9\%, \sigma_B = 4,75\%) \end{aligned}$$

Se observa que la cartera B tiene mayores beneficios esperados. Como es de esperar, esto viene unido a una mayor volatilidad.

III) El beneficio es, en unidades de miles de euros,

$$\begin{aligned} B_A &\sim N(15, \sigma_A = 34,90) \\ B_B &\sim N(29, \sigma_B = 47,53) \end{aligned}$$

Por tanto, al ser el beneficio total la suma de ambos beneficios,

$$B_T = B_A + B_B \sim N(44, \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_{AB})$$

donde

$$\sigma_{AB} = 0,25 \cdot 0,4\sigma_1^2 + 0,25 \cdot 0,20\sigma_2^2 + 0,25 \cdot 0,2\sigma_{12} + 0,25 \cdot 0,4\sigma_{12}$$

Teniendo en cuenta que, en unidades de miles de euros, $\sigma_1 = 100$ y $\sigma_2 = 50$,

$$\sigma_{AB} = 1000 + 125 + 175 + 350 = 1650,$$

$$B_T \sim N(44, \sigma_T = 82,33)$$

Por tanto, obtenemos la solución como

$$P(B_T > 10) = P\left(Z > \frac{10 - 44}{\sqrt{6778}}\right) = P(Z > -0,413) = 0,6602$$

Ejercicio 8 Sean X e Y dos v.a. que modelizan los rendimientos de dos activos. X sigue una ley normal de media 3% y desviación típica 1%, e Y una ley normal de media 6% y desviación típica 2%. La correlación entre ambos es 0,6. Un inversor A reparte su inversión entre ambos activos de forma que invierte el 75% en X y el 25% en Y , mientras que otro inversor B invierte el 50% en cada uno.

- I) *¿Cuál de los dos inversores obtiene mayor rendimiento medio?*
 II) *¿Cuál de los dos inversores tiene mayor probabilidad de ganar al menos un 1 % de su inversión?*

Solución

- i) Sea R_A el rendimiento del inversor A y R_B el rendimiento del inversor B . Entonces,

$$\mathbb{E}(R_A) = \mathbb{E}(0,75X + 0,25Y) = 0,75\mathbb{E}(X) + 0,25\mathbb{E}(Y) = 0,75 \cdot 3 + 0,25 \cdot 6 = 3,75$$

$$\mathbb{E}(R_B) = \mathbb{E}(0,5X + 0,5Y) = 0,5\mathbb{E}(X) + 0,5\mathbb{E}(Y) = 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 6 = 4,5$$

El inversor B tiene un mayor rendimiento medio.

- II) Calculemos primero la varianza de cada uno de los inversores:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(R_A) &= 0,75^2\mathbb{V}(X) + 0,25^2\mathbb{V}(Y) + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25\mathbb{C}(X, Y) \\ &= 0,75^2\mathbb{V}(X) + 0,25^2\mathbb{V}(Y) + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25\rho_{X,Y} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \\ &= 0,75^2 \cdot 1^2 + 0,25^2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,6 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 1,2625\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(R_B) &= 0,5^2\mathbb{V}(X) + 0,5^2\mathbb{V}(Y) + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5\mathbb{C}(X, Y) \\ &= 0,5^2\mathbb{V}(X) + 0,5^2\mathbb{V}(Y) + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5\rho_{X,Y} \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \\ &= 0,5^2 \cdot 1^2 + 0,5^2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,6 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 1,85\end{aligned}$$

El inversor B es también más arriesgado.

Dado que ambas carteras son combinación lineal de variables normales, se obtiene

$$R_A \sim N(3,75; \sigma_A = 1,1236)$$

$$R_B \sim N(4,5; \sigma_B = 1,3601)$$

Por lo tanto, siendo $Z \sim N(0, 1)$,

$$P(R_A > 1) = P\left(Z > \frac{1 - 3,75}{1,1236}\right) = 0,9929$$

$$P(R_B > 1) = P\left(Z > \frac{1 - 4,5}{1,3601}\right) = 0,995$$

En los dos casos es prácticamente seguro un rendimiento mayor al 1 %. La probabilidad es algo mayor para la cartera B .

Ejercicio 9 Sea X una variable aleatoria que toma los valores $-2, 0$ y 2 con probabilidades $0,4, 0,3$ y $0,3$, respectivamente. Calcula $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(3X^2 + 5)$ y $\mathbb{E}(e^{-X})$.

Solución

Utilizando la definición y propiedades de la esperanza matemática,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= -2 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 = -0,2 \\ \mathbb{E}(3X^2 + 5) &= 3\mathbb{E}(X^2) + 5 = 13,4 \\ \mathbb{E}(e^{-X}) &= e^2 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,3 + e^{-2} \cdot 0,3 = 3,3\end{aligned}$$

Ejercicio 10 Sea una variable binomial $X \sim B(p = 0,1; n = 3)$. Considera el cambio de variable $Y = X^2$. Obtén las funciones de probabilidad, característica y cumulativa, la media, la varianza, la asimetría y la curtosis.

Solución

- Función de probabilidad:

$$Y = h(X) = X^2 \Leftrightarrow X = h^{-1}(Y) = \pm\sqrt{Y}$$

El dominio de valores de X es $\{0,1,2,3\}$, con lo que los posibles valores de Y son $\{0,1,4,9\}$. Por tanto, para $y \in \{0,1,4,9\}$ podemos escribir

$$P_Y(y) = P(Y=y) = P(X^2=y) = P(X=\sqrt{y}) = \binom{3}{\sqrt{y}} \cdot 0,1^{\sqrt{y}} \cdot 0,9^{3-\sqrt{y}}$$

- *Función característica:*

$$\begin{aligned}\psi_Y(u) &= \mathbb{E}(e^{iuY}) = \mathbb{E}(e^{iuX^2}) = \sum_{x_i=0}^3 e^{iux_i^2} \cdot P(X = x_i) \\ &= 0,9^3 + 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 \cdot e^{iu} + 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9 \cdot e^{iu^4} + 0,1^3 \cdot e^{iu^9} \\ &= 0,729 + 0,243 \cdot e^{iu} + 0,027 \cdot e^{4iu} + 0,001 \cdot e^{9iu}\end{aligned}$$

- *Función cumulativa:* Haciendo el desarrollo en serie de Taylor del logaritmo de la función característica,

$$\mu_Y(u) = \ln \psi_Y(u) = 0,36 \cdot (iu) + \frac{0,6264}{2} \cdot (iu)^2 + \frac{2,7}{3!} \cdot (iu)^3 + \frac{13,716}{4!} \cdot (iu)^4 + \dots$$

- *Media, varianza, asimetría y curtosis:* Utilizando las propiedades de la función cumulativa,

$$\begin{aligned}m_Y &= k_1 = 0,36 \\ \sigma_Y^2 &= k_2 = 0,756 \\ \gamma_1 &= \frac{k_3}{k_2^{3/2}} = \frac{2,7}{0,756^{3/2}} = 4,11 \\ \gamma_2 &= \frac{k_4}{k_2^2} = \frac{13,716}{0,756^2} = 24\end{aligned}$$

Es decir, es una variable de media 0,36, varianza 0,756, asimétrica a la derecha o positiva y leptocúrtica.

Ejercicio 11 Sea X una v.a. con distribución de Poisson de parámetro λ , e Y otra v.a. con distribución de Poisson de parámetro μ , ambas independientes entre sí.

- I) **Calcula** $P(X = m | X + Y = n)$.
- II) **Calcula** $\mathbb{E}(X | X + Y = n)$ y $\mathbb{V}(X | X + Y = n)$.

Solución

I) Dado que $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$,

$$\begin{aligned}
 P(X = m | X + Y = n) &= \frac{P(X = m \cap X + Y = n)}{P(X + Y = n)} \\
 &= \frac{P(X = m) P(Y = n - m)}{P(X + Y = n)} \\
 &= \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\mu} \frac{n!}{(\lambda + \mu)^n} e^{\lambda + \mu} \\
 &= \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{\lambda^m}{(\lambda + \mu)^m} \frac{\mu^{n-m}}{(\lambda + \mu)^{n-m}} \\
 &= \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^m \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{n-m}
 \end{aligned}$$

que se identifica con una v.a. binomial de parámetros $(n, p = \lambda / (\lambda + \mu))$.

II) Usando las propiedades de la binomial,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X | X + Y = n) &= np = n \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \\
 \mathbb{V}(X | X + Y = n) &= npq = n \frac{\lambda \mu}{(\lambda + \mu)^2}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 12 *Considera que la cuantía por reclamación, X , en la compañía aseguradora GAUR es una variable aleatoria con distribución de Pareto de parámetros k y α . La compañía decide reasegurarse y que una compañía reaseguradora ZIUR cubra las reclamaciones por encima de c unidades, siendo $c > k$.*

- I) *Obtén la expresión de la función de distribución de las cuantías reclamadas a GAUR.*
- II) *Calcula la probabilidad de que una reclamación sea cubierta por ZIUR.*
- III) *Obtén la expresión de la función de distribución de las cuantías, Y , cubiertas por ZIUR.*

Solución

- i) Del enunciado sabemos que las cuantías reclamadas a GAUR siguen una ley de Pareto de parámetros k y α . Por tanto, para $x \geq k$,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\alpha$$

- ii) Si una cuantía reclamada pasa a ser cubierta por ZIUR es porque ha superado la cantidad c . La probabilidad de que eso suceda es

$$P(X > c) = \left(\frac{k}{c}\right)^\alpha$$

- iii) Los posibles valores para la variable Y son todos mayores que c , ya que, en caso contrario, no entra en juego la reaseguradora. Entonces,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X \leq y | X > c) = 1 - P(X > y | X > c) \\ &= 1 - \frac{P(\{X > y\} \cap \{X > c\})}{P(X > c)} = 1 - \frac{P(X > y)}{P(X > c)} \\ &= 1 - \frac{\left(\frac{k}{y}\right)^\alpha}{\left(\frac{k}{c}\right)^\alpha} = 1 - \left(\frac{c}{y}\right)^\alpha \end{aligned}$$

Es decir, la distribución de la cuantía que se reclama a la empresa reaseguradora también sigue una ley de Pareto, con parámetros c y α .

Mixturas de distribuciones

Ejercicio 13 (*Mixtura de normales*) Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, donde

$$(\mu, \sigma^2) = \begin{cases} (5, 3) & p = 0,1 \\ (10, 9) & q = 1 - p = 0,9 \end{cases}$$

- I) *Obtén la media y varianza incondicionadas de X .*
- II) *Obtén la expresión de la función de densidad incondicionada de X .*
- III) *Repite el ejercicio para $p = 0,5$.*

Solución

- I) Tenemos que el valor medio y varianza condicionados son $\mathbb{E}(X|(\mu, \sigma^2)) = \mu$ y $\mathbb{V}(X|(\mu, \sigma^2)) = \sigma^2$, de donde

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|(\mu, \sigma^2))) = 9,5$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|(\mu, \sigma^2))) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|(\mu, \sigma^2))) = \mathbb{E}(\sigma^2) + \mathbb{V}(\mu) = 10,65$$

II) Utilizando el teorema de la partición,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x | (\mu, \sigma^2) = (5, 3)) \cdot P((\mu, \sigma^2) = (5, 3)) \\ &\quad + f(x | (\mu, \sigma^2) = (10, 9)) \cdot P((\mu, \sigma^2) = (10, 9)) \\ &= \frac{0,1}{\sqrt{6\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-5)^2}{3}\right] + \frac{0,9}{\sqrt{18\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-10)^2}{9}\right] \end{aligned}$$

III) En el caso en el que $p = 0,5$, la media y varianza incondicionadas de X son

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 7,5 \\ \mathbb{V}(X) &= 12,25 \end{aligned}$$

y la función de densidad incondicionada $g(x)$ está dada por

$$g(x) = \frac{0,5}{\sqrt{6\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-5)^2}{3}\right] + \frac{0,5}{\sqrt{18\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x-10)^2}{9}\right]$$

La Figura 2.1 muestra las densidades obtenidas a partir de las mixturas anteriores.

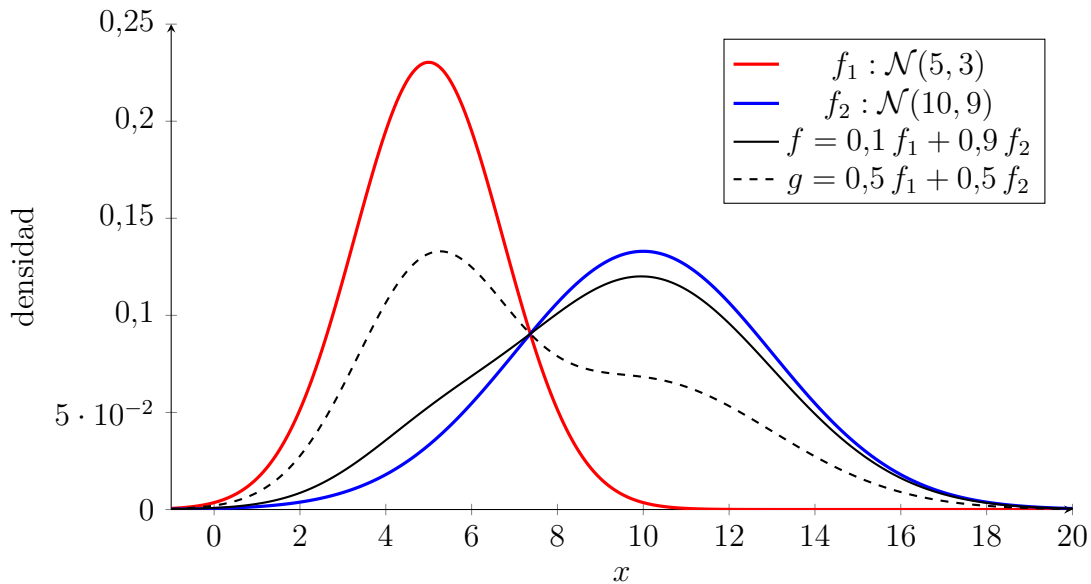


Figura 2.1: Mixtura de normales.

Ejercicio 14 Sea X una variable aleatoria exponencial de media λ , donde λ es a su vez un parámetro aleatorio con distribución uniforme en $[1, 2]$. Calcula la media y la varianza de X incondicionadas al valor de λ y comenta los resultados.

Solución

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\lambda)) = \mathbb{E}(\lambda) = 1,5$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|\lambda)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|\lambda)) = \mathbb{V}(\lambda) + \mathbb{E}(\lambda^2) = 2,42$$

Observa que:

- La varianza obtenida es mayor que 2,25, correspondiente al caso en el que el valor de λ fuese 1,5 con seguridad. En general, añadir fuentes de incertidumbre aumenta la varianza.
- Si quisieras obtener la distribución incondicionada, no es analíticamente fácilmente tratable, ya que su expresión es una integral que no se simplifica al integrar por partes. Usando el teorema de la partición, obtenemos que

$$f_X(x) = \int f_{X|\lambda}(x) f_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_1^2 \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} d\lambda$$

Ejercicio 15

- I) *Considera una v.a. X con distribución normal $N(\mu, \sigma = 3)$, donde $P(\mu = 3) = 0,2$ y $P(\mu = 5) = 0,8$. Obtén la función de densidad de X incondicionada así como la media y varianza incondicionadas.*
- II) *Considera ahora que X sigue una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde $P(\mu = 3, \sigma = \sqrt{5}) = 0,2$ y $P(\mu = 5, \sigma = \sqrt{10}) = 0,8$. Obtén la media y varianza incondicionadas de X .*
- III) *Compara los resultados de las medias y varianzas incondicionadas en los dos apartados y compáralos con el caso en el que $\mu = 4,6$ y $\sigma = 3$. ¿Qué sucede con la media? ¿Y con la varianza? Comenta los resultados.*

Solución

i) La función de densidad incondicionada se obtiene como

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\mu} f(x|\mu) P(\mu) = f(x|\mu=3) \cdot P(\mu=3) + f(x|\mu=5) \cdot P(\mu=5) \\ &= 0,2 \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2\right] + 0,8 \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-5}{3}\right)^2\right] \end{aligned}$$

La media y varianza incondicionadas son

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mu)) = \mathbb{E}(\mu) = 4,6 \\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|\mu)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|\mu)) = \mathbb{V}(\mu) + \mathbb{E}(9) \\ &= \mathbb{E}(\mu^2) - \mathbb{E}(\mu)^2 + 9 = 9,64 \end{aligned}$$

ii) En el segundo caso, con media y varianza aleatorias, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mu, \sigma^2)) = \mathbb{E}(\mu) = 0,2 \times 3 + 0,8 \times 5 = 4,6 \\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|\mu, \sigma^2)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|\mu, \sigma^2)) = 9,64 \end{aligned}$$

iii) La media no varía aunque se introduzca más incertidumbre. La varianza incondicionada aumenta con la incertidumbre, aunque únicamente depende de la varianza de μ , y no de la varianza de σ^2 .

Ejercicio 16 Sea la v.a. $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, una suma de variables aleatorias tal que las v.a. X_i son i.i.d. con distribución $\gamma(a=10, r=2)$, y N un número entero aleatorio que sigue una ley binomial negativa de media 5 y varianza 25.

- i) Obtén la media y la varianza de la variable Y incondicionada al valor que tome N .
- ii) Compara el resultado con el caso en el que N tome siempre el valor 5 y explica la razón de la diferencia.

Solución

- i) Tenemos que $Y|N$ es una suma de distribuciones Gamma i.i.d., con lo que en este caso sigue una ley $\gamma(a = 10, r = 2N)$. Por tanto, como la media condicionada es $\mathbb{E}(Y|N) = 2N/10 = N/5$ y N tiene de media 5, obtenemos

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|N)) = \mathbb{E}\left(\frac{N}{5}\right) = \frac{5}{5} = 1$$

Para la varianza, tenemos que $\mathbb{V}(Y|N) = r/a^2 = 2N/10^2 = N/50$, con lo que, teniendo en cuenta, además, que la varianza de N es 25,

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(Y|N)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|N)) = \mathbb{E}\left(\frac{N}{50}\right) + \mathbb{V}\left(\frac{N}{5}\right) = 1,1$$

- ii) En el caso en que N tome siempre el valor 5, la distribución de Y es directamente $\gamma(a = 10, r = 10)$, de media 1 y de varianza 0,1. En este caso, no hay variabilidad en el número de sumandos en Y , por lo que el término $\mathbb{V}(N/5)$ es nulo y el único término en la varianza es $\mathbb{E}(N/50) = N/50 = 5/50 = 0,1$. Es decir, la varianza disminuye al tener información exacta sobre el valor de N .

Ejercicio 17 *Considera una variable aleatoria X , con distribución de Poisson de parámetro λ , donde a su vez λ sigue la siguiente distribución de probabilidad:*

$$\lambda = \begin{cases} 1 & p = \frac{1}{3} \\ 3 & q = \frac{2}{3} \end{cases}$$

- i) *Obtén la media y varianza de X incondicionadas al valor de λ .*
- ii) *Obtén la función de probabilidad de X incondicionada al valor de λ .*

Solución

- i) Utilizamos las leyes de las esperanzas y varianzas iteradas. En primer lugar, obtenemos que la esperanza incondicionada de X es

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\lambda)) = \mathbb{E}(\lambda) = 1\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

A continuación, obtenemos la varianza incondicionada de X :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|\lambda)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|\lambda)) = \mathbb{E}(\lambda) + \mathbb{V}(\lambda) \\ &= \mathbb{E}(\lambda) + \mathbb{E}(\lambda^2) - \mathbb{E}(\lambda)^2 = \frac{29}{9} = 3,22\end{aligned}$$

- ii) Utilizando el teorema de la partición obtenemos que, para cada valor k , donde $k = 0, 1, \dots$, la función de probabilidad incondicionada es

$$P(X = k) = \sum_i P(X = k|\lambda_i)P(\lambda_i) = \frac{1}{3} \frac{1}{k!} e^{-1} + \frac{2}{3} \frac{3^k}{k!} e^{-3}$$

Ejercicio 18 *Considera una variable aleatoria X binaria de parámetro p .*

- i) *Comprueba que, aunque p sea un parámetro aleatorio, si tiene media y varianza finitas, la media y varianza incondicionadas de X no se ven afectadas por la aleatoriedad de p .*
- ii) *Obtén la distribución incondicionada de X para cualquier distribución de p . Comenta el resultado.*

Solución

- i) En el caso de que p sea conocido,

$$\mathbb{E}(X) = p$$

$$\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

En el caso general,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|p)) = \mathbb{E}(p)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|p)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|p)) = \mathbb{V}(p) + \mathbb{E}(p(1 - p)) = \mathbb{E}(p) - \mathbb{E}(p)^2 \\ &= \mathbb{E}(p)(1 - \mathbb{E}(p))\end{aligned}$$

Es decir, la media y varianza son las de una distribución binaria de parámetro $\mathbb{E}(p)$, y el hecho de que p sea aleatorio no aumenta la varianza incondicionada de X .

II) Consideramos que p es una v.a. continua. Obtenemos

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(X = 0|p)f(p)dp = \int_{-\infty}^{+\infty} (1-p)f(p)dp \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(p)dp - \int_{-\infty}^{+\infty} pf(p)dp = 1 - \mathbb{E}(p) \end{aligned}$$

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = \mathbb{E}(p)$$

Se deja como ejercicio el caso análogo en el que p sea discreta. El resultado general es que X es una v.a. binaria de parámetro $\mathbb{E}(p)$, con lo que la varianza que pueda tener p no le afecta en nada a la distribución incondicionada, que únicamente depende del valor medio.

Ejercicio 19 *La duración de las empresas de un determinado sector sigue una ley exponencial de 15 años de media.*

- I) *Calcula las probabilidades de que: i) una nueva empresa del sector dure entre 10 y 20 años; ii) una nueva empresa del sector dure al menos 10 años y iii) una empresa del sector que ya ha durado 10 años, dure al menos 20.*
- II) *Prueba que, en general, si $t \geq s$, $P(T > t|T > s) = P(T > (t - s))$.*
- III) *Obtén el valor de la duración tal que la probabilidad de que una empresa del sector la supere sea el 10 %.*
- IV) *Si la vida media es una v.a. que sigue una ley normal de media 15 años y desviación estándar 5 años, obtén la nueva la función de densidad de la duración incondicionada a la media, así como su media y su varianza.*

Solución

La función de densidad de la variable duración T es $f(t) = (1/15)e^{-t/15}$, para $t \geq 0$.

I) i)

$$P(10 < T < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{15} e^{-t/15} dt = 0,25$$

ii)

$$P(T > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{15} e^{-t/15} dt = 0,5134$$

iii)

$$\begin{aligned} P(T > 20 | T > 10) &= \frac{P(T > 20 \cap T > 10)}{P(T > 10)} = \frac{P(T > 20)}{P(T > 10)} \\ &= \frac{\int_{20}^{\infty} \frac{1}{15} e^{-t/15} dt}{\int_{10}^{\infty} \frac{1}{15} e^{-t/15} dt} = \frac{e^{-20/15}}{e^{-10/15}} = e^{-10/15} \\ &= 0,5134 = P(T > 10) \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} P(T > t | T > t_0) &= \frac{P(T > t \cap T > t_0)}{P(T > t_0)} = \frac{P(T > t)}{P(T > t_0)} \\ &= \frac{\int_t^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-s/\lambda} ds}{\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-s/\lambda} ds} = \frac{e^{-t/\lambda}}{e^{-t_0/\lambda}} = e^{-(t-t_0)/\lambda} \\ &= P(T > (t - t_0)) \end{aligned}$$

A esta propiedad se le denomina pérdida de memoria. La distribución condicionada al suceso $\{T > t\}$ sigue siendo exponencial con la misma media que la distribución incondicionada. Es decir, la probabilidad de durar los t primeros años a partir de un t_0 es siempre la misma, independientemente del valor de partida t_0 .

III)

$$\begin{aligned} P(T > t) &= 0,10 = \int_t^{\infty} \frac{1}{15} e^{-s/15} ds \\ 0,10 &= e^{-t/15} \\ -15 \ln(0,10) &= t \end{aligned}$$

Por tanto, $t = 34,5$ años.

IV) A partir de la distribución de la vida media, denotado por λ , obtenemos

$$f(t) = \int f(t|\lambda) f(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-15}{5}\right)^2\right] \frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda} d\lambda$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \mathbb{E}_{\lambda}(\mathbb{E}(T|\lambda)) = \mathbb{E}(\lambda) = 15 \\ \mathbb{V}(T) &= \mathbb{E}_{\lambda}(\mathbb{V}(T|\lambda)) + \mathbb{V}_{\lambda}(\mathbb{E}(T|\lambda)) = \mathbb{E}_{\lambda}(\lambda^2) + \mathbb{V}_{\lambda}(\lambda) = 275\end{aligned}$$

Ejercicio 20 *La duración en años de un tipo de móvil X sigue una ley exponencial de media λ , donde λ sigue una distribución lognormal, tal que $\log(\lambda) \sim N(0, \sigma^2)$.*

- I) *Escribe y representa la función de densidad de X condicionada a $\lambda = 1$.*
- II) *Obtén la función de densidad de X incondicionada al valor de λ y dibújala para los valores de $\sigma^2 = 0, 1; 1; 2$.*
- III) *Obtén la media y varianza incondicionadas de la duración de ese tipo de móvil en función del parámetro σ^2 . Comenta el resultado.*

Solución

- I) Condicionada a que $\lambda = 1$, X es una variable exponencial de media 1, con lo que

$$f(x) = e^{-x} \quad x > 0$$

- II) Usando el teorema de la partición obtenemos

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} e^{-1/\lambda x} \frac{1}{\sigma \lambda \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log \lambda}{\sigma}\right)^2\right] d\lambda$$

En la Figura 2.2 se representan tanto la densidad de X condicionada a $\lambda = 1$, como las densidades incondicionadas de X para los valores de $\sigma^2 = 0, 1; 1$ y 2 .

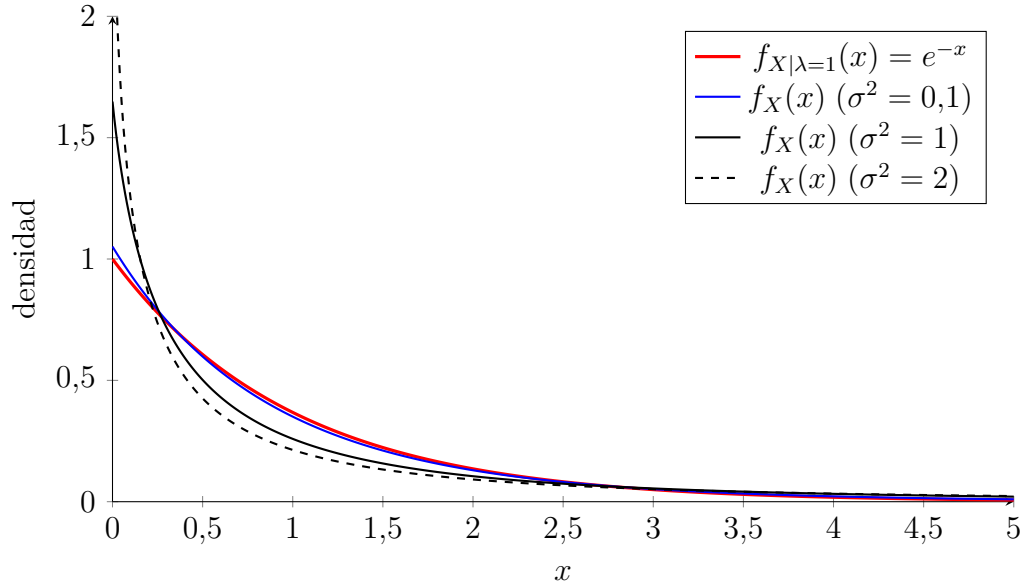


Figura 2.2: Exponencial condicionada ($\lambda = 1$) e incondicionada (λ lognormal).

III) La media y varianza incondicionadas son

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\lambda)) = \mathbb{E}(\lambda) = \exp(\sigma^2/2) \\
 \mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|\lambda)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|\lambda)) \\
 &= \mathbb{V}(\lambda) + \mathbb{E}(\lambda^2) = 2\mathbb{V}(\lambda) + \mathbb{E}(\lambda)^2 \\
 &= \exp(\sigma^2)(2\exp(\sigma^2) - 1)
 \end{aligned}$$

Vemos que el caso en el que λ es conocido e igual a 1 nos lleva a que la media y la varianza de X es 1. En el caso en el que hay incertidumbre, esta afecta también a la media, ya que su valor se ve afectado por la varianza σ^2 . Es decir, la incertidumbre en este caso afecta tanto a la media como a la varianza.

Ejercicio 21 *Obtén la función de probabilidad de $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, incondicionada a λ , cuando λ sigue una ley exponencial de media a .*

Solución

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Por tanto, X toma valores enteros $k = 0, 1, 2, \dots$, tal que

$$P(X = k|\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Por otro lado, el parámetro λ sigue una distribución continua: $\lambda \sim \text{Exp}(1/a)$, de manera que

$$f_\lambda(\lambda) = \frac{1}{a} e^{-\lambda/a} \quad \lambda \geq 0$$

Entonces,

$$P(X=k) = \int_{\lambda} P_{X|\lambda}(x) f_\lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot \frac{1}{a} e^{-\lambda/a} d\lambda = \frac{1}{k!a} \int_0^{+\infty} \lambda^k e^{-(a+1)\lambda/a} d\lambda$$

Integrando por partes de forma recurrente obtenemos que la integral anterior es igual a

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{k!a} \lambda^k \frac{a}{a+1} e^{-\lambda(a+1)/a} \Big|_0^\infty + \frac{1}{(a+1)} \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty \lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda(a+1)/a} d\lambda \\ &= \dots \\ &= \frac{a^k}{(a+1)^{k+1}} \end{aligned}$$

Ejercicio 22 *En cierta compañía de seguros se considera que hay únicamente dos tipos de asegurados para un determinado tipo de póliza. Los de tipo A, donde el número de reclamaciones por año sigue una ley binomial de parámetros $n = 2$ y $p = 0,01$, y los de tipo B, con parámetros $n = 2$ y $p = 0,05$. La probabilidad de que un nuevo asegurado sea de tipo A es 0,9.*

- I) *Calcula la función de probabilidad asociada al número de reclamaciones de un nuevo cliente cuyo tipo no está identificado.*
- II) *Si el cliente presenta una reclamación durante el primer año, obtén las probabilidades revisadas de que sea de tipo A o tipo B.*

- III) *Calcula la función de cuantía revisada del número de reclamaciones para este cliente durante el segundo año. Calcula la probabilidad que tiene este cliente de hacer una reclamación en el segundo año, teniendo en cuenta que ha presentado también una en el primer año.*

Solución

Para ambos tipos de asegurados, el número de reclamaciones posibles son $k = 0, 1, 2$. La diferencia entre los tipos reside en la probabilidad de que se den k reclamaciones.

- i) Para $k = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X = k|A) \cdot P(A) + P(X = k|B) \cdot P(B) \\ &= \binom{2}{k} 0,01^k \cdot 0,99^{2-k} \cdot 0,9 + \binom{2}{k} 0,05^k \cdot 0,95^{2-k} \cdot 0,1 \end{aligned}$$

- ii) Del apartado anterior obtenemos que $P(X = 1|A) \cdot P(A) = 0,01782$ y $P(X = 1) = 0,0273$. Por tanto,

$$P(A|X = 1) = \frac{P(X = 1|A) \cdot P(A)}{P(X = 1)} = \frac{0,0178}{0,0273} = 0,652$$

y $P(B|X = 1) = 1 - P(A|X = 1) = 0,348$.

- iii) Denotamos por X_1 y X_2 al número de reclamaciones en el primer y en el segundo año, respectivamente. Para cada $k = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned} P(X_2 = k|X_1 = 1) &= P(X_2 = k|A) \cdot P(A|X_1 = 1) + P(X_2 = k|B) \cdot P(B|X_1 = 1) \\ &= \binom{2}{k} 0,01^k \cdot 0,99^{2-k} \cdot 0,652 + \binom{2}{k} 0,05^k \cdot 0,95^{2-k} \cdot 0,348 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que $P(X_2 = 1|X_1 = 1) = 0,046$. Vemos que la probabilidad ha aumentado respecto del primer año, en el que $P(X_1 = 1) = 0,0273$.

Ejercicio 23 *Sea X una variable aleatoria binomial de parámetros (N, p) , donde N es un valor aleatorio que se distribuye con una ley de Poisson de parámetro λ . Calcula la expresión general de la distribución de probabilidad incondicionada de X .*

Solución

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=k|N=n) \cdot P(N=n) \\
\text{los } k \text{ primeros términos son nulos} &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\
(\text{dado que } m = n - k) &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda p)^m}{m!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda - \lambda p} \\
&= e^{\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Se trata de una distribución de Poisson de parámetro λp .

Ejercicio 24 Sea X una v.a. con distribución de Poisson de parámetro λ . Para cada valor k que toma la variable X , lanzamos una moneda k veces.

- I) Obtén la distribución del número de caras obtenidas en cada lanzamiento (N), condicionada e incondicionada al valor de k .
- II) Obtén la media y varianza condicionadas e incondicionadas de la v.a. N .

Solución

- I) La distribución de la v.a. N condicionada a k viene dada por la función de cuantía

$$P(N=n|k) = \binom{k}{n} 0,5^n 0,5^{k-n} = \binom{k}{n} 0,5^k$$

Por otra parte,

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Así, usando el teorema de la partición y reordenando términos en el sumatorio,

$$\begin{aligned} P(N = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N = n|k) P(k) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} 0,5^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{n!(k-n)!} 0,5^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!k!} 0,5^{n+k} e^{-\lambda} \lambda^{n+k} \\ &= \frac{(0,5\lambda)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0,5\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(0,5\lambda)^n}{n!} e^{-0,5\lambda} \end{aligned}$$

con lo que el número de caras N sigue una distribución de Poisson de parámetro $0,5\lambda$.

- II) Podemos calcular la media y varianza incondicionadas de N utilizando directamente las propiedades de la distribución de Poisson o mediante las propiedades de medias y varianzas incondicionadas.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(N|X = k)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(0,5k)) = 0,5\lambda \\ \mathbb{V}(N) &= \mathbb{E}(\mathbb{V}(N|X = k)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(N|X = k)) \\ &= \mathbb{E}(0,25k) + \mathbb{V}(0,5k) = 0,5\lambda \end{aligned}$$

Convergencias

Ejercicio 25 Sea $X_n = X + \varepsilon_n$ una sucesión de v.a. con $X \sim N(5, 1)$ y ε_n i.i.d. $N(0, \sigma^2 = 1/n)$ e independientes de X . Estudia la convergencia de X_n a X en ley, en probabilidad y en media cuadrática.

Solución

Estudiamos primero la convergencia en media cuadrática

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^2) = \mathbb{E}(\varepsilon_n^2) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por tanto, X_n converge a X también en ley y en probabilidad.

Ejercicio 26 Considera una v.a. X con distribución normal estándar, $X \sim N(0, 1)$, y una sucesión de v.a. ξ_n i.i.d. e independientes de X , con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1/n]$.

- I) Obtén la media y la varianza de la sucesión de v.a. $X_n = X + \xi_n$.
- II) Obtén la función característica de X_n .
- III) Obtén el límite en distribución ($\xrightarrow{d}$) de la sucesión $(X_n)_{n=1,2,\dots}$.

- IV) **Obtén el límite en probabilidad** ($\xrightarrow{p}$) **de la sucesión** $(X_n)_{n=1,2,\dots}$.
- V) **Obtén el límite en media cuadrática** ($\xrightarrow{m.c.}$) **de la sucesión** $(X_n)_{n=1,2,\dots}$.

Solución

- I) Como X y ξ_n son independientes,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= \mathbb{E}(X + \xi_n) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\xi_n) = \frac{1}{2n} \\ \mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(\xi_n) = 1 + \frac{1}{12n^2}\end{aligned}$$

- II)

$$\psi_{X_n}(u) = \psi_X(u)\psi_{\xi_n}(u) = e^{-u^2/2} \frac{n}{iu} [e^{iu/n} - 1]$$

- III) Veamos el límite en distribución a partir del límite de la función característica:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{X_n}(u) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-u^2/2} \frac{n}{iu} [e^{iu/n} - 1] = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-u^2/2} \frac{n}{iu} \left[1 - 1 + \frac{iu}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{iu}{n} \right)^2 + \dots \right] \\ &= e^{-u^2/2} = \psi_X(u)\end{aligned}$$

Por tanto, $X_n \xrightarrow{d} X$.

- IV)

$$P(|X_n - X| < \varepsilon) = P(|\xi_n| < \varepsilon) = 1, \text{ si } 1/n < \varepsilon$$

Por tanto, el límite de $P(|X_n - X| < \varepsilon)$ es 1 cuando n tiende a infinito y $X_n \xrightarrow{p} X$.

- V) Cuando $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^2) = \mathbb{E}(\xi_n^2) = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{3n^2} \rightarrow 0 \implies X_n \xrightarrow{m.c.} X$$

Observación. Aunque basta con demostrar el límite en media cuadrática para concluir los tres tipos de convergencia, hemos desarrollado los tres a efectos pedagógicos.

Ejercicio 27 *Considera la sucesión Z_n de v.a. independientes con distribución Poisson de media $\lambda + 1/n$.*

- I) *Obtén la distribución límite de Z_n , cuando $n \rightarrow \infty$. Obtén su media y su varianza.*
- II) *Considera ahora que, en cada n , $\lambda = \lambda_n$ es una v.a. binaria de parámetro $p_n = 1/n$. ¿Cuál es la distribución incondicionada de Z_n ? ¿Cuál es la distribución límite de Z_n ?*
- III) *Demuestra que en el caso II) Z_n tiende a $Z \equiv 0$ en media cuadrática y en probabilidad.*

Solución

- I) Para cada $k = 0, 1, \dots$,

$$P(Z_n = k) = e^{-(\lambda + \frac{1}{n})} \frac{(\lambda + \frac{1}{n})^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Con lo que $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Por tanto el límite tiene media y varianza igual a λ .

- II) Ahora $Z_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n + \frac{1}{n})$ con $\lambda_n \sim b(1/n)$. Dado que

$$\begin{aligned} P(Z_n = k | \lambda_n) &= e^{-(\lambda_n + 1/n)} \frac{(\lambda_n + \frac{1}{n})^k}{k!}, \\ P(\lambda_n = i) &= \left(\frac{1}{n}\right)^i \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-i} \quad \text{para } i = 0, 1 \end{aligned}$$

la distribución incondicionada de Z_n es

$$\begin{aligned} P(Z_n = k) &= P(Z_n = k | \lambda_n = 0)P(\lambda_n = 0) + P(Z_n = k | \lambda_n = 1)P(\lambda_n = 1) \\ &= e^{-1/n} \frac{(\frac{1}{n})^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + e^{-(1+1/n)} \frac{(1 + \frac{1}{n})^k}{k!} \left(\frac{1}{n}\right) \\ &\rightarrow \begin{cases} 1 & \text{cuando } k = 0 \\ 0 & \text{cuando } k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $0^0 = 1$ y que $0! = 1$.

III) Obtenemos en primer lugar la media y varianza de Z_n :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n|\lambda_n)) = \mathbb{E}(\lambda_n + \frac{1}{n}) = \frac{2}{n} \\ \mathbb{V}(Z_n) &= \mathbb{V}(\mathbb{E}(Z_n|\lambda_n)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(Z_n|\lambda_n)) \\ &= \mathbb{V}\left(\lambda_n + \frac{1}{n}\right) + \mathbb{E}(\lambda_n) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n}\end{aligned}$$

Deducimos que

$$\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{V}(Z_n) + \mathbb{E}(Z_n)^2 = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por tanto, $Z_n \rightarrow Z \equiv 0$ también en probabilidad (y en distribución).

Ejercicio 28 *Se considera la sucesión $X_n = X + \varepsilon_n$, donde $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ y ε_n son v.a. independientes entre sí e independientes de X , con distribución de Poisson $\mathcal{P}(1/n)$. Obtén la distribución límite de X_n .*

Solución

Obtenemos fácilmente la distribución límite usando las propiedades de la función característica:

$$\psi_{X_n}(u) = \psi_X(u)\psi_{\varepsilon_n}(u) = \exp[\lambda(e^{iu} - 1)] \exp\left[\frac{1}{n}(e^{iu} - 1)\right] \rightarrow \exp[\lambda(e^{iu} - 1)]$$

Por tanto, $X_n \xrightarrow{d} X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Ejercicio 29 *Sea una sucesión $X_n \sim N(m, \sigma_n^2 = 1/n)$. Demuestra que $X_n \rightarrow m$ en ley, en probabilidad y en media cuadrática.*

Solución

Sabemos que

$$X_n \xrightarrow{m.c.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

Por tanto, comencemos comprobando si $X_n \xrightarrow{m.c.} X \equiv m$; es decir, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - m|^2) = 0$. Tenemos que

$$\mathbb{E}(|X_n - m|^2) = \mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Como $X_n \xrightarrow{m.c.} m$, también converge en probabilidad y en ley.

Ejercicio 30 *Sea una sucesión $X_n = X + \epsilon_n$, con $\epsilon_n \sim N(0, \sigma_n^2 = 1/n)$ independientes entre sí e independientes de X . Demuestra que $X_n \rightarrow X$ en ley, en probabilidad y en media cuadrática.*

Solución

Al igual que en el ejercicio anterior, comenzamos comprobando si $X_n \xrightarrow{m.c.} X$. Vemos que

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^2) = \mathbb{E}(\epsilon_n^2) = \mathbb{V}(\epsilon_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Por tanto, $X_n \xrightarrow{m.c.} X$ y también converge en probabilidad y en ley.

Ejercicio 31 *Si $X_n \xrightarrow{p} X$, entonces $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ es una sucesión de Cauchy en probabilidad; es decir, para todo $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe N tal que, si $n, m \geq N$,*

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) < \delta$$

Solución

Supongamos que $X_n \xrightarrow{p} X$. Sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Por convergencia en probabilidad, existe N tal que para todo $k \geq N$,

$$P(|X_k - X| > \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\delta}{2}$$

Tomando cualesquiera $n, m \geq N$, y utilizando la desigualdad triangular, se cumple

$$|X_n - X_m| \leq |X_n - X| + |X_m - X|$$

En consecuencia,

$$\{|X_n - X_m| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

Aplicando la cota por unión,

$$P(|X_n - X_m| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Como $\varepsilon, \delta > 0$ son arbitrarios, X_n es una sucesión de Cauchy en probabilidad.

Ejercicio 32

- I) *Considera la sucesión de v.a. independientes $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ con distribución $N(0, \sigma_n^2 = 1 + 1/n)$. Analiza la convergencia en distribución, en probabilidad y en media cuadrática.*
- II) *Considera ahora la sucesión $X_n = X + \varepsilon_n$, donde $X \sim N(0, 1)$ y $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma_n^2 = 1/n)$, con X y ε_n independientes. Analiza la convergencia en distribución, en probabilidad y en media cuadrática.*
- III) *Discute las diferencias y similitudes entre las dos sucesiones.*

Solución

- i) $X_n \sim N(0, 1 + 1/n)$. El límite en distribución se puede analizar mediante el límite de cualquiera de las funciones que determinan la distribución: función de distribución, densidad, característica o generatriz de momentos.

Por ejemplo, si tomamos la función de densidad obtenemos

$$f_{X_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + \frac{1}{n})}} \exp\left[-\frac{x^2}{2(1 + \frac{1}{n})}\right] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

Por tanto, el límite cuando $n \rightarrow \infty$ es la función de densidad de una normal $(0, 1)$.

Para la convergencia en probabilidad necesitamos que, fijado un valor $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$$

A efectos de analizar la condición de convergencia en probabilidad, utilizamos el resultado del Ejercicio 31, y comprobamos si es o no una sucesión de Cauchy. Para ello consideramos X_n y X_m , donde $m < n$. Tenemos que $X_n - X_m$ sigue una ley normal de media 0 y varianza $2 + 1/n + 1/m$, dada la independencia entre las variables. Así, el límite de la varianza es $2 \neq 0$ y ello supone que, por pequeño que sea $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} P(|X_n - X_m| > \varepsilon) > 0$$

Por tanto, $\{X_n\}$ no cumple la condición de Cauchy en probabilidad, con lo que no converge en probabilidad. Al no haber convergencia en probabilidad, tampoco la hay en media cuadrática (ni uniforme).

- II) En el segundo caso, $X_n = X + \varepsilon_n$, donde $X \sim N(0, 1)$ y $\varepsilon_n \sim N(0, \sigma_n^2 = 1/n)$, con X y ε_n independientes. Por tanto, tenemos que X_n sigue una ley $X \sim N(0, \sigma_n^2 = 1 + 1/n)$ que, al igual que antes, podemos demostrar que tiende en distribución a una ley $N(0, 1)$.

Por otra parte, $X_n - X = \varepsilon_n \sim N(0, \sigma_n^2 = 1/n)$. Así,

$$\mathbb{E}(|X_n - X|^2) = \mathbb{V}(\varepsilon_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

con lo que $X_n \rightarrow X$ en media cuadrática y, por tanto, también en probabilidad y en ley.

- III) En el apartado II, todas las variables de la sucesión X_n tienen un componente común $X \sim N(0, 1)$ y se diferencian únicamente en un valor aleatorio que tiende a 0. En el apartado I, por el contrario, las v.a. X_n son independientes por construcción y las diferencias entre los valores que toman no disminuyen en probabilidad.

Ejercicio 33 *Consideremos la sucesión de variables aleatorias independientes $\{X_n; n \geq 1\}$, tal que cada X_n es una variable binaria de parámetro $p = 0,5$. Demuestra que esta sucesión converge en distribución, pero no converge en probabilidad.*

Solución

Todas las variables de la sucesión X_n tienen la misma distribución binaria de parámetro $p = 0,5$. Por tanto, la sucesión de funciones de distribución es una sucesión constante de funciones, todas ellas iguales. Así, el límite es cualquier variable aleatoria X con distribución binaria de parámetro $p = 0,5$.

Utilizando el hecho de que si una sucesión converge, debe ser una sucesión de Cauchy, se tiene que cumplir que $P(|X_n - X_m| > \varepsilon) < \delta$. Sin embargo, para que se dé la convergencia en probabilidad necesitamos que, para cualquier valor $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X_m| > \varepsilon) \rightarrow 0$.

Ahora bien, si tomamos por ejemplo $\varepsilon = 0,2$, tenemos que, al ser independientes los términos de la sucesión,

$$\begin{aligned} P(|X_n - X_m| > 0,2) &= P(X_n = 1)P(X_m = 0) + P(X_n = 0)P(X_m = 1) \\ &= 0,5^2 + 0,5^2 = 0,5 \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión no tiende a 0.

Ejercicio 34 Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Demuestra que si una sucesión de v.a. $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ converge a X en probabilidad, entonces $g(X_n)$ converge a $g(X)$ en probabilidad.

Solución

Por una parte, $X_n \xrightarrow{p} X$, lo que significa que $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$

Por otra parte, g es una función continua y esto implica que si tomamos un valor cualquiera $\delta > 0$, existe un valor ϵ , tal que si $|X_n - X| < \epsilon$, se cumple que $|g(X_n) - g(X)| < \delta$.

Lo que queremos demostrar es que $g(X_n)$ converge a $g(X)$ en probabilidad. Es decir, que fijado un valor arbitrariamente pequeño δ , $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|g(X_n) - g(X)| \geq \delta) = 0$. Ahora bien, enlazando las dos hipótesis tenemos que, para cualquier valor δ , por la continuidad de la función g , encontramos un ϵ tal que si $|X_n - X| < \epsilon$, entonces $|g(X_n) - g(X)| < \delta$. Tenemos entonces que el suceso $\{|X_n - X| < \epsilon\}$ es un subconjunto del suceso $\{|g(X_n) - g(X)| < \delta\}$. La propiedad de monotonía de la probabilidad nos dice que si $A \subset B$, se cumple que $P(A) \leq P(B)$, con lo que

$$P(|X_n - X| < \epsilon) \leq P(|g(X_n) - g(X)| < \delta) \iff P(|g(X_n) - g(X)| \geq \delta) \leq P(|X_n - X| \geq \epsilon)$$

Dado que $P(|X_n - X| \geq \epsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, se tiene el resultado.

Ejercicio 35 Considera una sucesión $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$ de v.a. i.i.d. normales de media μ y varianza σ^2 . Considera la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}_{n=1,2,\dots}$, donde $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

1) Para cada n , ¿qué distribución sigue la v.a. S_n/n ?

- II) *Demuestra que S_n/n converge en distribución y en probabilidad a la constante μ .*

Considera ahora que X_n son v.a. i.i.d. mixtura normales de media μ y varianza σ^2 , donde $(\mu, \sigma^2) = (4, 5)$ con probabilidad 0,3 y $(\mu, \sigma^2) = (1, 2)$ en otro caso.

- III) *Obtén la función de densidad de X_n incondicionada a los valores (μ, σ^2) .*
- IV) *Obtén la media y la varianza de S_n/n .*
- V) *Demuestra que S_n/n converge en distribución y en probabilidad al valor medio de μ .*

Solución

- I) S_n es una suma de n v.a. normales i.i.d.; por tanto, es una v.a. normal, cuya media es la suma de medias $n\mu$ y varianza, la suma de varianzas $n\sigma^2$. La distribución de S_n/n es $S_n/n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

- II) Estudiamos la convergencia en media cuadrática a μ :

$$\mathbb{E} \left(\frac{S_n}{n} - \mu \right)^2 = \mathbb{V} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$$

Por tanto la sucesión $\{S_n/n\}$ converge también en probabilidad y en distribución al valor medio μ .

- III) Condicionada al valor de (μ, σ^2) , la v.a. X_n es normal, y su función de densidad es

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

Por tanto, la densidad incondicionada viene dada por

$$f(x) = \sum_{\mu, \sigma^2} f(x|\mu, \sigma^2) P(\mu, \sigma^2)$$

que en este caso será

$$f(x) = 0,3 \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{\frac{1}{10}(x-4)^2} + 0,7 \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\frac{1}{4}(x-1)^2}$$

iv) Utilizando esperanzas iteradas se obtiene que, para cada X_n ,

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n | (\mu, \sigma^2))) = \mathbb{E}(\mu) = 0,3 \cdot 4 + 0,7 \cdot 1 = 1,9$$

Para la varianza,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{V}(\mathbb{E}(X_n | (\mu, \sigma^2))) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(X_n | (\mu, \sigma^2))) = \mathbb{V}(\mu) + \mathbb{E}(\sigma^2) \\ &= 1,89 + 2,9 = 4,79 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que la media incondicionada es $\mathbb{E}(S_n/n) = \mathbb{E}(X_n) = 1,9$ y la varianza incondicionada es $\mathbb{V}(S_n/n) = \mathbb{V}(X_n)/n = 4,79/n$.

v) Se puede demostrar utilizando el mismo argumento que en el apartado II, ya que $\mathbb{V}(S_n/n) \rightarrow 0$.

Ejercicio 36 *Considera una v.a. X con distribución de Poisson de parámetro λ , donde λ es una variable uniforme en el intervalo $(0, 1)$.*

- i) *Obtén la estructura de probabilidad incondicionada de X . Obtén las probabilidades $P(X = 0)$ y $P(X = 0 | \lambda = 0,5)$. Comenta el resultado teniendo en cuenta que 0.5 es el valor medio de una uniforme en $(0, 1)$.*
- ii) *Obtén la media y la varianza incondicionadas de X . Comenta las semejanzas y diferencias con respecto a la variable $Y \sim \mathcal{P}(0,5)$.*
- iii) *Considera ahora una sucesión de variables independientes, $\{X_n\}_{n=1,2,\dots}$, todas ellas con la misma distribución que X . Discute razonadamente la convergencia en distribución, en probabilidad y en media cuadrática de $S_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ a su valor medio.*

Solución

i) Para cada valor posible de X , $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$P(X = k) = \int_{D_\lambda} P(X = k|\lambda) f(\lambda) d\lambda = \int_0^1 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} d\lambda$$

Por tanto, $P(X = 0) = \int_0^1 e^{-\lambda} d\lambda = 1 - e^{-1} = 0,6321$. Además, la probabilidad condicionada es $P(X = 0|\lambda = 0,5) = e^{-0,5} = 0,6065$. Las probabilidades cambian en función de la aleatoriedad de λ , aunque su valor medio no cambie. La Figura 3.1 muestra la estructura de probabilidad condicionada e incondicionada de la v.a. X para diferentes valores de la variable.

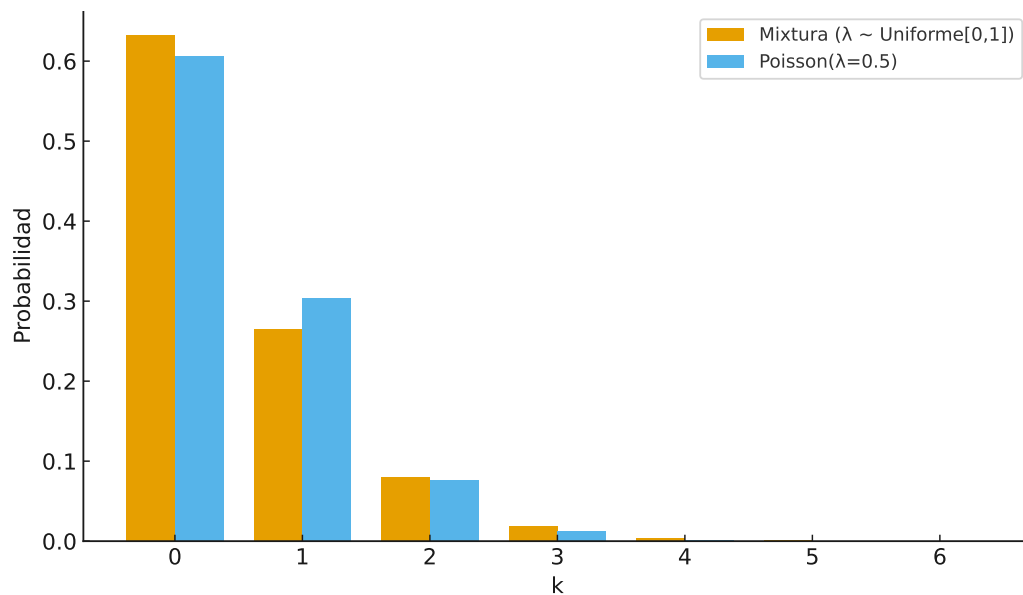


Figura 3.1: Estructura de probabilidad condicionada e incondicionada de X .

II)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\lambda)) = \mathbb{E}(\lambda) = 0,5 \\ \mathbb{V}(X) &= \mathbb{V}(\mathbb{E}(X|\lambda)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(X|\lambda)) \\ &= \mathbb{V}(\lambda) + \mathbb{E}(\lambda) = 0,5833 \end{aligned}$$

Sin embargo, si $\lambda = 0,5$ tenemos que $\mathbb{E}(Y) = 0,5$; $\mathbb{V}(Y) = 0,5$. La varianza de X aumenta, aunque en este caso no mucho, debido a la incertidumbre del valor de λ .

III)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}(X) = 0,5 \\ \mathbb{V}(S_n) &= \frac{1}{n}\mathbb{V}(X) = \frac{0,583}{n}\end{aligned}$$

El resultado demuestra que $\mathbb{E}[(S_n - 0,5)^2] = \mathbb{V}(S_n) \rightarrow 0$, con lo que obtenemos la convergencia en media cuadrática de S_n a su media, el valor 0,5. Por tanto, también converge a su valor medio en probabilidad y en distribución, tal y como puede apreciarse en la Figura 3.2.

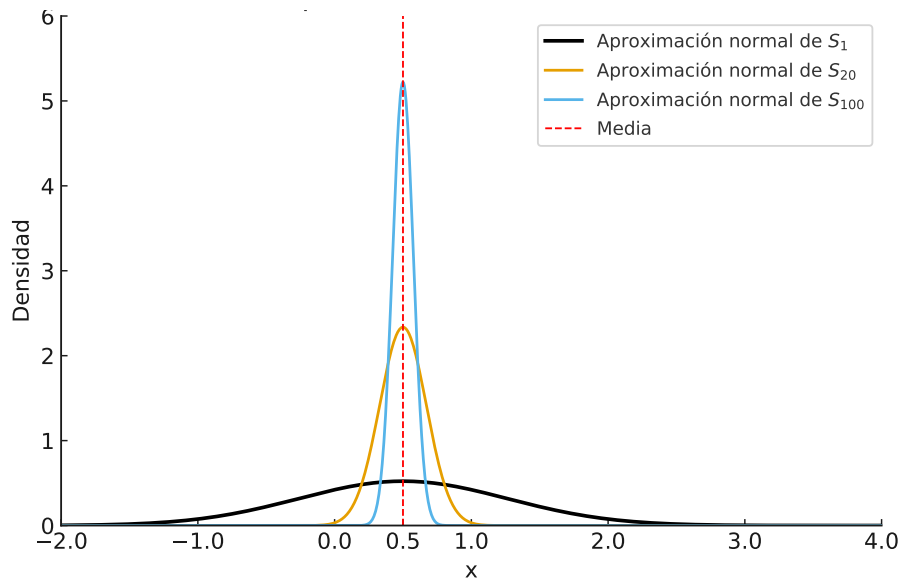


Figura 3.2: Aproximaciones normales.

Parte II

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Ejercicios básicos

Ejercicio 37 *Considera una terna (X_1, X_2, X_3) tal que $X_t \sim b(0,5)$ para $t = 1, 2, 3$; es decir, son todas binarias con $p = 0,5$.*

- I) *Describe todas las trayectorias posibles y calcula la probabilidad de cada una de ellas suponiendo independencia entre las variables.*
- II) *Generaliza el resultado a n variables X_t , donde $t = 1, 2, \dots, n$.*

Solución

- i) Dado que cada X_t puede tomar los valores 0 o 1, y hay tres unidades de tiempo; en total tendremos $2^3 = 8$ posibles trayectorias. Se pueden describir vectorialmente y son las siguientes:

$$\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), \\ (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

las cuales se encuentran representadas en la Figura 4.1.

Este proceso corresponde a una variable tridimensional discreta. Si las variables son independientes, las trayectorias son equiprobables con probabilidad $1/8$. Si las v.a. no fueran independientes, necesitaríamos la función de distribución conjunta para identificar el proceso.

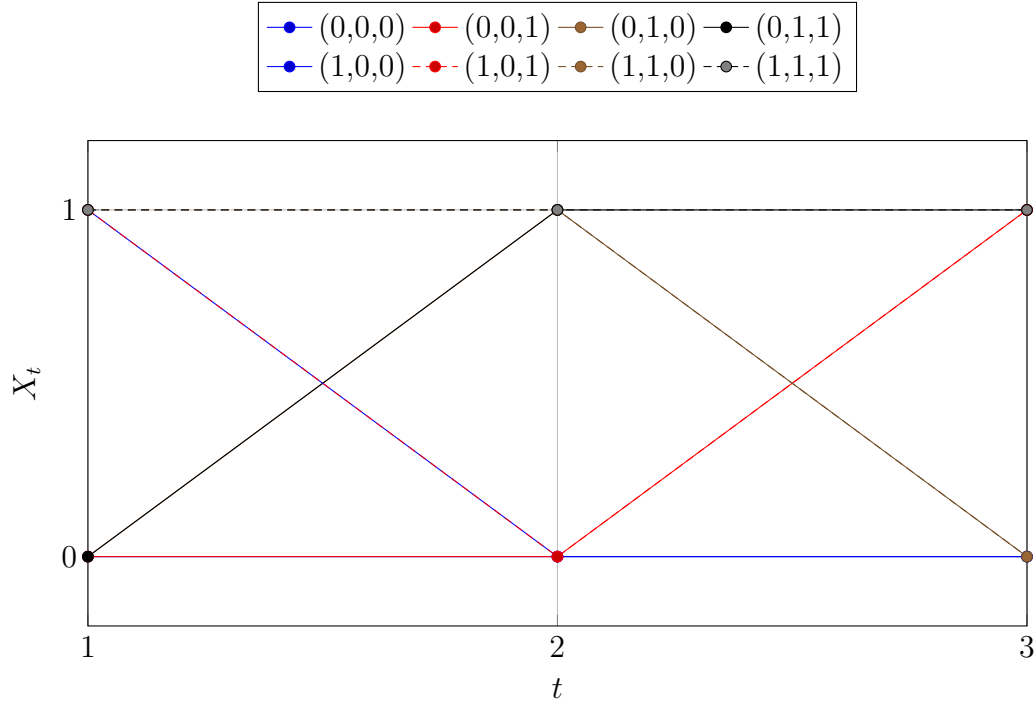


Figura 4.1: Trayectorias posibles de la variable binaria tridimensional (X_1, X_2, X_3) .

II) Las trayectorias serán vectores n -dimensionales de la forma

$$\{(0, 0, \dots, 0), (0, 0, \dots, 1), \dots, (0, 1, \dots, 0), (0, 1, \dots, 1), \\ (1, 0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 1), \dots, (1, 1, \dots, 0), (1, 1, \dots, 1)\}$$

Obtenemos 2^n trayectorias equiprobables, cada una de ellas con probabilidad 2^{-n} .

Ejercicio 38 Sean X e Y dos variables aleatorias independientes. Considera el proceso estocástico en tiempo continuo

$$X_t = tX + Y, \quad t \geq 0$$

Calcula las trayectorias y las distribuciones marginales finito dimensionales.

Solución

Las trayectorias de este proceso son rectas con coeficientes aleatorios.

Para cada posible vector $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, con $0 < t_1 < \dots < t_n$, utilizamos el teorema de la probabilidad condicionada y el hecho de que X e Y son independientes. Así,

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= P(\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}) \\ &= P(\{t_1 X + Y \leq x_1, \dots, t_n X + Y \leq x_n\}) \\ &= P\left(\left\{X \leq \frac{x_1 - Y}{t_1}, \dots, X \leq \frac{x_n - Y}{t_n}\right\}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_X\left(\min_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i - y}{t_i}\right) F_Y(dy) \end{aligned}$$

Ejercicio 39 *Consideremos el proceso estocástico $X_t = A \cos(\varphi + \lambda t)$ en $[0, T]$, donde A y φ son variables aleatorias independientes tales que $\mathbb{E}(A) = 0$, $\mathbb{E}(A^2) < \infty$ y φ tiene distribución uniforme en $[0, 2\pi]$. Calcula la función media y la función de autocovarianzas.*

Solución

Las trayectorias de este proceso son funciones trigonométricas con amplitud y fase inicial aleatorias e independientes. Para obtener la media y la autocovarianza de este proceso utilizamos, además, las igualdades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\cos(\varphi + \lambda t) \cos(\varphi + \lambda s) = \frac{1}{2} (\cos(2\varphi + \lambda(t + s)) + \cos \lambda(t - s))$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} m_X(t) &= \mathbb{E}(A \cos(\varphi + \lambda t)) = \mathbb{E}(A) \mathbb{E}(\cos(\varphi + \lambda t)) = 0 \\ \gamma_X(s, t) &= \mathbb{E}(A \cos(\varphi + \lambda t))(A \cos(\varphi + \lambda s)) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(A^2) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi + \lambda(t + s)) d\varphi \right) + \frac{1}{2} \mathbb{E}(A^2) \cos(\lambda(t - s)) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}(A^2) \cos \lambda(t - s) \end{aligned}$$

Ejercicio 40 Sea ξ una v.a. uniforme en el intervalo $(0, 1)$. *Estudia la equivalencia y la continuidad de las trayectorias de los siguientes pares de procesos continuos en $\mathcal{T} = [0, 1]$:*

I)

$$\begin{aligned} X_t &= 0 \\ Y_t &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \xi \\ 1 & \text{si } t = \xi \end{cases} \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} X_t = X &= \begin{cases} 0 & p = 0,5 \\ 1 & q = 0,5 \end{cases} \\ Y_t &= \begin{cases} X_t & \text{si } t \neq \xi \\ 0,5 & \text{si } t = \xi \end{cases} \end{aligned}$$

Solución

I) Tenemos que

$$P(X_t = Y_t) = P(t \neq \xi) = 1$$

Por tanto, los procesos $\{X_t\}$ e $\{Y_t\}$ son equivalentes. $\{X_t\}$ es un proceso con una única trayectoria (la función nula), continua, mientras que $\{Y_t\}$ tiene una discontinuidad en $t = \xi$.

II) De nuevo obtenemos que son procesos equivalentes ya que

$$P(X_t = Y_t) = P(t \neq \xi) = 1$$

En este caso, $\{X_t\}$ tiene dos posibles trayectorias continuas, las funciones constantes 0 y 1, mientras que la versión $\{Y_t\}$ tiene una discontinuidad en $t = \xi$.

Cadenas de Markov

Ejercicio 41 *Clasifica la siguiente cadena de Markov, obteniendo la matriz de transición después de 2 y 5 etapas y las probabilidades incondicionadas en el límite. ¿Dependen éstas de las probabilidades iniciales?*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Solución

Esta cadena es una cadena regular o ergódica, ya que todos los valores de la matriz de transición son > 0 .

Como ejercicio, vamos a comprobarlo también a partir de los valores propios y las probabilidades de cada estado en el largo plazo. Para ello, obtenemos las raíces del polinomio característico definido como $|\mathbb{P} - \lambda I|$, donde

$$\mathbb{P} - \lambda I = \begin{pmatrix} 0,7 - \lambda & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 - \lambda & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 - \lambda \end{pmatrix}$$

Resolviendo $|\mathbb{P} - \lambda I| = 0$,

$$\begin{aligned} (0,7 - \lambda)(0,6 - \lambda)(0,8 - \lambda) + 0,002 + 0,003 - 0,01(0,6 - \lambda) - 0,06(0,8 - \lambda) \\ - 0,01(0,7 - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 0,7$; $\lambda_3 = 0,4$. Para obtener las probabilidades incondicionadas en el largo plazo resolvemos el problema $\pi\mathbb{P} = \pi$:

$$(x, y, 1 - x - y) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} = (x, y, 1 - x - y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,7x + 0,3y + 0,1 - 0,1x - 0,1y = x \\ 0,2x + 0,6y + 0,1 - 0,1x - 0,1y = y \end{cases}$$

La solución es $\pi = (x = 0,3889, y = 0,2778, 1 - 0,3889 - 0,2778 = 0,3333)$. Todos los componentes de π son positivos, con lo que la cadena es regular o ergódica y todos los estados son recurrentes.

Las matrices de transición después de 2 y 5 etapas son

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,56 & 0,27 & 0,17 \\ 0,4 & 0,43 & 0,17 \\ 0,18 & 0,16 & 0,66 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0,4302 & 0,2925 & 0,2773 \\ 0,4200 & 0,3027 & 0,2773 \\ 0,3148 & 0,2399 & 0,4454 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 42 *Estudia la siguiente matriz de transición clasificando los estados y obteniendo el comportamiento de la cadena a largo plazo:*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Solución

Obtenemos las raíces de la ecuación característica $|\mathbb{P} - \lambda I| = (1 - \lambda)(0,3 - \lambda)(0,5 - \lambda) - 0,5 \cdot 0,7(1 - \lambda) = 0$, de forma que los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -0,2$. Al haber mas de un valor propio unitario, la cadena no es regular.

Obtenemos ahora las probabilidades a largo plazo:

$$\begin{aligned} \pi\mathbb{P} &= \pi \\ \Rightarrow \pi &= (1, 0, 0), \quad (0, 0,42, 0,58) \end{aligned}$$

La cadena no es regular o ergódica, es una cadena reducible con dos clases cerradas. El estado 1 es absorbente y los otros dos son recurrentes. Hay dos conjuntos de estados cerrados: $\{1\}$, $\{2,3\}$. La situación en el largo plazo depende claramente de las probabilidades iniciales. Por ejemplo, con el vector $p(0) = (1, 0, 0)$ nos encontraremos con $p(n) = (1, 0, 0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, mientras que con el vector $p(0) = (0, 0,7, 0,3)$, $p(n) \rightarrow (0, 0,42, 0,58)$.

Ejercicio 43 *Considera una cadena de Markov con matriz de transición*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- I) *Obtén los valores propios de $\mathbb{P}$. ¿Es una cadena regular? Calcula el límite de $\mathbb{P}^n$.*
- II) *Clasifica los estados en transitorios y recurrentes.*
- III) *Obtén las probabilidades en el largo plazo de estar en cada uno de los estados de la cadena.*

Solución

- I) Obtenemos los valores propios de $\mathbb{P}$ a través de las raíces del polinomio característico definido como $|\mathbb{P} - \lambda I|$, donde

$$|\mathbb{P} - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0,2 - \lambda & 0,8 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Resolviendo $0,2\lambda^3 - 0,2\lambda^2 - 0,8\lambda = 0$ se tiene que los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = -0,8$. Por tanto, la matriz de transición tiene rango 2, y al haber un único valor propio unitario, $\mathbb{P}^n$ tiende a una matriz de rango 1:

$$\begin{aligned} \pi \mathbb{P} &= \pi \\ \implies \pi &= (0, 0,56, 0,44) \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto, } \mathbb{P}^n \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0,56 & 0,44 \\ 0 & 0,56 & 0,44 \\ 0 & 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$$

- II) El estado 1 es transitorio y los estados 2 y 3 recurrentes.
- III) La probabilidad en el largo plazo de estar en el estado 1 es 0, de estar en el estado 2 es 0,56 y de estar en el estado 3 es 0,44. De hecho, en el estado 1 únicamente puede estar en el momento inicial, ya que no puede quedarse en ese estado ni ir a él desde ningún otro.

Ejercicio 44 (*Aquiles y la tortuga*) Zenón (495-435 a.C.) habló de una carrera entre Aquiles y una tortuga. Supongamos que se le da a la tortuga una ventaja de w unidades de tiempo. Supongamos también que, durante cada unidad de tiempo, la tortuga recorre una distancia de un metro, o bien, permanece donde está, de acuerdo con una variable binaria con probabilidad de moverse p ($0 < p < 1$), y que Aquiles corre con una rapidez constante de un metro cada unidad de tiempo. Durante las w unidades de tiempo iniciales, la tortuga recorrerá X_1 metros. En tanto Aquiles está alcanzando X_1 , la tortuga recorrerá X_2 metros más, hasta la posición $X_1 + X_2$. En general, mientras Aquiles está yendo desde $X_1 + \dots + X_{n-1}$ hasta $X_1 + \dots + X_{n-1} + X_n$, la tortuga estará recorriendo X_{n+1} metros más.

- I) *Argumenta que $\{X_n : n \geq 1\}$ es una cadena de Markov homogénea.*
- II) *Obtén su matriz de transición.*
- III) *¿Cuál es la probabilidad de que Aquiles alcance a la tortuga en la posición $X_1 + X_2$?*

Solución

- I) Es una cadena de Markov, ya que en cada paso, el tiempo que tiene la tortuga para avanzar es el tiempo que necesita Aquiles para recorrer la distancia que ella ha recorrido en la etapa anterior. $X_1 \sim B(w, p)$ y $X_n \sim B(X_{n-1}, p)$, para $n > 1$. Por tanto, $P(X_n | X_{n-1}, \dots, X_0) = P(X_n | X_{n-1})$.

$$\text{II) } \mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (1-p)^2 & 2p(1-p) & p^2 & 0 & \cdots & 0 \\ (1-p)^3 & 3p(1-p)^2 & 3p^2(1-p) & p^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (1-p)^w & \binom{w}{1}p(1-p)^{w-1} & \binom{w}{2}p^2(1-p)^{w-2} & \binom{w}{3}p^3(1-p)^{w-3} & \cdots & p^w \end{pmatrix}$$

- III) Para que Aquiles alcance a la tortuga en la posición $X_1 + X_2$, se debe cumplir que $X_1 + X_2 = X_1$; es decir, que la tortuga no avance después de recorrer X_1 en las primeras w unidades de tiempo y mientras Aquiles recorre exactamente X_1 metros. Por tanto, la probabilidad es $P(X_1 + X_2 = X_1) = P(X_2 = 0)$, tal que

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= \sum_{i=0}^w P(X_2 = 0 | X_1 = i) P(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=0}^w (1-p)^i \binom{w}{i} (1-p)^{w-i} p^i \\ &= (1-p)^w \sum_{i=0}^w \binom{w}{i} p^i \\ &= (1-p)^w (1+p)^w = (1-p^2)^w \end{aligned}$$

Procesos de Poisson

Ejercicio 45 *Una pieza tiene vida aleatoria con distribución exponencial de media $1/\lambda$ horas. Cuando la pieza falla, se reemplaza inmediatamente por una pieza idéntica. Si N_t es el número de fallos en $[0, t]$, demuestra que N_t sigue un proceso de Poisson de razón λ .*

Solución

Consideremos que X_i es la variable aleatoria que denota la duración de la i -ésima pieza. Sea $T_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ la duración de las primeras k piezas. El número de fallos hasta el momento t , N_t , es una variable aleatoria que puede tomar los valores $k = 0, 1, 2, \dots$, de forma que $N_t = k \Leftrightarrow T_k \leq t < T_{k+1}$. Al ser las variables X_i independientes, sabemos que T_k sigue una ley Gamma de parámetros λ y k , tal que para cada $x > 0$,

$$f_{T_k}(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
P(N_t = k) &= P(T_k \leq t < T_{k+1}) = P(T_k \leq t < T_k + X_{k+1}) \\
&= \int_{(x \leq t < x+y)} f_{T_k}(x) f_{X_{k+1}} dy dx \\
&= \int_0^t \int_{t-x}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda y} dy dx \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda t} dx \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

La Figura 6.1 ilustra el comportamiento de una trayectoria N_t a lo largo del tiempo.

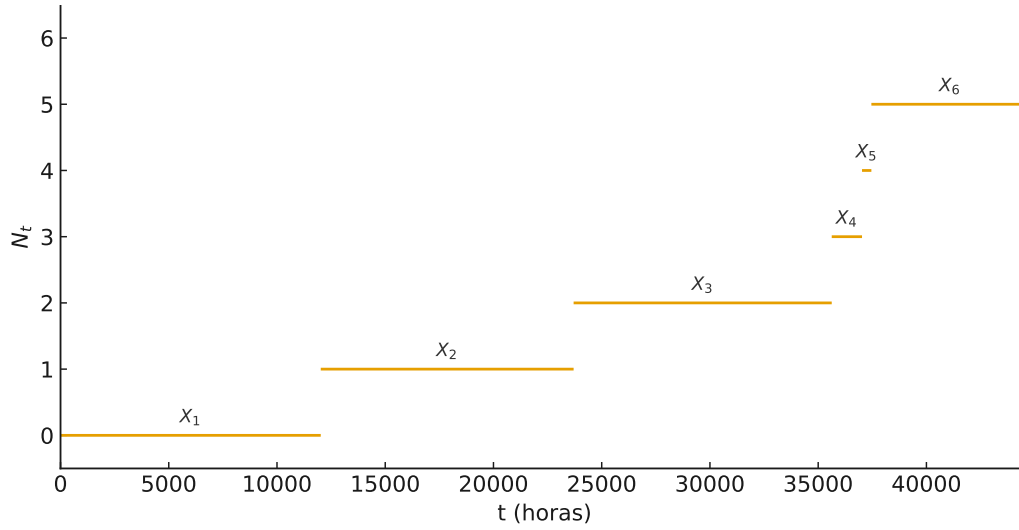


Figura 6.1: Número de fallos con duración exponencial de media 5000 horas.

Ejercicio 46 *En el ejercicio anterior, el coste de reemplazamiento de cada pieza es $\beta > 0$ euros, y la tasa de descuento del dinero $r > 0$. Calcula el valor presente esperado de todos los costes de reemplazamientos futuros.*

Solución

Tenemos que el tiempo que pasa hasta cambiar la primera vez es T_1 , hasta la segunda es T_2 y así, sucesivamente. Por tanto, el valor presente de todos los costes de reemplazamientos futuros en tiempo continuo será

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \beta e^{-rT_n}$$

y el valor esperado de este coste es

$$\mathbb{E}(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta \mathbb{E}(e^{-rT_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta \left(1 + \frac{r}{\lambda}\right)^{-n} = \beta \frac{\frac{1}{1+\frac{r}{\lambda}}}{1 - \frac{1}{1+\frac{r}{\lambda}}} = \beta \frac{\lambda}{r}$$

Ejercicio 47 *Los clientes llegan a una tienda siguiendo un proceso de Poisson de razón λ . Solamente hay un encargado, y los tiempos de atención son independientes y siguen una distribución exponencial de parámetro μ . En el instante inicial hay un único cliente, que está siendo atendido. Prueba que la probabilidad de que el próximo cliente llegue antes de un cierto instante t_1 y, además, encuentre al encargado ocupado es*

$$\frac{\lambda}{\lambda + \mu} [1 - e^{-t_1(\lambda + \mu)}]$$

Solución

Consideremos que Z_1 es el tiempo de atención del primer cliente y que T_2 es el tiempo de llegada del segundo cliente. Nuestro interés es obtener $P(Z_1 \geq T_2 \cap T_2 < t_1)$. Descomponiendo la probabilidad usando el teorema de la partición obtenemos que

$$\begin{aligned} P(\{Z_1 \geq T_2\} \cap \{T_2 < t_1\}) &= \int_0^{t_1} P(Z_1 \geq T_2 | T_2 = s) f(s) ds \\ &= \int_0^{t_1} e^{-s\mu} e^{-s\lambda} \lambda ds = \int_0^{t_1} \lambda e^{-s(\mu + \lambda)} ds \\ &= -\frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-s(\mu + \lambda)} \Big|_0^{t_1} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} [1 - e^{-t_1(\mu + \lambda)}] \end{aligned}$$

Ejercicio 48 *Considera una cartera compuesta por dos activos A y B. Para un índice de referencia, sabemos que el número de caídas bruscas sigue un proceso de Poisson de razón anual $\lambda = 0,5$. Denota por N_t el número de caídas del índice en $[0, t]$.*

- I) *Obtén la probabilidad de que el índice caiga exactamente dos veces en un año.*
- II) *Cuando cae el índice, y solo en ese caso, el activo A cae con probabilidad $p_A = 0,5$ y el activo B cae con probabilidad $p_B = 0,2$. Obtén el proceso que siguen el número de caídas de A, N_{At} , y el número de caídas de B, N_{Bt} .*
- III) *Sabemos que el índice ha caído 2 veces en un año. Obtén las distribuciones respectivas del número de caídas de A y de B en ese año. Teniendo en cuenta que condicionadas a las caídas del índice, hay independencia entre las caídas de los dos activos, obtén la probabilidad de que ambos activos hayan caído 2 veces ese año.*

Solución

- I) $P(N_1 = 2) = e^{-0,5} \frac{0,5^2}{2} = 0,075$.
- II) N_{At} sigue un proceso de Poisson de razón $0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.
 N_{Bt} sigue un proceso de Poisson de razón $0,2 \cdot 0,5 = 0,1$.
- III)

$$N_{A1}|N_1 = 2 \sim B(2; 0,5)$$

$$N_{B1}|N_1 = 2 \sim B(2; 0,2)$$

son dos variables binomiales independientes, con lo que

$$P(\{N_{A1} = 2\} \cap \{N_{B1} = 2\} | N_1 = 2) = 0,5^2 \cdot 0,2^2 = 0,01$$

Ejercicio 49 *Una empresa fabrica bombillas blancas de bajo consumo con duración exponencial, todas independientes entre sí. En general, la vida media es de 10 años, pero en promedio 1 de cada 100 sale defectuosa y su vida media se reduce a 1 año.*

- I) *Obtén la función de densidad de una bombilla tomada al azar. Un cliente compra una de estas bombillas y después de un año sigue funcionando. Calcula la probabilidad de que sea defectuosa. Asimismo, calcula la probabilidad de que funcione otro año más.*
- II) *Se hacen tiras decorativas de 20 bombillas. Calcula la probabilidad de que, después de tenerlas encendidas durante un mes, todas sigan funcionando. Calcula también la distribución del número de bombillas que siguen funcionando al final del mes.*

Solución

- i) Usando el teorema de la partición, tenemos que la función de densidad de la duración en años de una bombilla tomada al azar es

$$f(t) = 0,99\frac{1}{10}e^{-t/10} + 0,01e^{-t}$$

Denotemos por T a la duración, por D el ser una bombilla defectuosa y por R a ser del resto. La probabilidad de que sea defectuosa sabiendo que ha funcionado un año es

$$P(D|T > 1) = \frac{P(T > 1|D)P(D)}{P(T > 1)} = \frac{0,01e^{-1}}{0,99e^{-1/10} + 0,01e^{-1}} = 0,0041$$

Por tanto, la vida de la bombilla a partir del segundo año tiene una ley de probabilidad compuesta con probabilidad revisada

$$\begin{aligned} P(T > 2|T > 1) &= P(T > 2|\{T > 1 \cap D\})P(D) + P(T > 2|\{T > 1 \cap R\})P(R) \\ &= P(T > 1|D)P(D) + P(T > 1|R)P(R) = 0,8995 \end{aligned}$$

- ii) La probabilidad de que cada bombilla dure al menos un mes ($1/12 = 0,08\hat{3}$) es

$$P(T > 0,08\hat{3}) = P(T > 0,08\hat{3}|D)P(D) + P(T > 0,08\hat{3}|R)P(R) = 0,9910$$

Al ser las duraciones independientes, tenemos que el número de bombillas que siguen funcionando al terminar el mes sigue una ley binomial $B(20; 0,9910)$, con lo que la probabilidad de que todas estén funcionando durante un mes es $P(T > 0,08\hat{3})^{20} = 0,8346$.

Ejercicio 50 *Un estudiante compra un ordenador que se bloquea frecuentemente y estima que el número de veces que se bloquea sigue un proceso de Poisson con una media de tres bloqueos a la hora.*

- I) *Calcula la probabilidad de que el ordenador siga funcionando sin bloquearse durante al menos una hora después de encenderlo.*
- II) *Si no se ha bloqueado después de una hora, calcula la probabilidad de que no se bloquee después de $t + 1$ horas.*
- III) *Otro estudiante tiene un ordenador algo más fiable que se bloquea una media de 1 vez por hora siguiendo también un proceso de Poisson. Calcula la probabilidad de que este ordenador se bloquee antes que el primero, si se encienden al mismo tiempo.*

Solución

- I) Sea N_t el número de veces que se bloquea en t horas. Entonces, $N_t \sim \mathcal{P}(3t)$. Que siga funcionando sin bloquearse después de una hora, equivale a que N_1 tome el valor cero, por lo que

$$P(N_1 = 0) = e^{-3} = 0,050$$

II)

$$\begin{aligned} P(N_{t+1} = 0 | N_1 = 0) &= \frac{P(N_{t+1} = 0 \cap N_1 = 0)}{P(N_1 = 0)} = \frac{P(N_{t+1} = 0)}{P(N_1 = 0)} = e^{-3t} \\ &= P(N_t = 0) \end{aligned}$$

- III) Consideramos T_1 y T_2 el tiempo en horas que tardan los respectivos ordenadores en bloquearse. Sabemos que son variables exponenciales, T_1 con media $1/3$ y T_2 con media 1. Entonces,

$$\begin{aligned} P(T_1 > T_2) &= \int_0^\infty P(T_1 > s | T_2 = s) f_2(s) ds = \int_0^\infty \int_s^\infty f_1(t) f_2(s) dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty 3e^{-3t} e^{-s} dt ds = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 51 *En unos grandes almacenes han lanzado una oferta de robots aspiradores que comienza un lunes con 20 kits en stock. Saben que el número de clientes que compran durante los días de oferta sigue un proceso de Poisson con una media de 10 compras en un día.*

- I) *Calcula la probabilidad de vender 10 kits en las primeras 5 horas del lunes.*
- II) *Si el gran almacén está abierto 10 horas al día, calcula la probabilidad de que no queden kits al final del lunes.*
- III) *Se sabe que si se hace un pedido hoy, puede llegar mañana a primera hora con probabilidad 0.5, a primera hora de pasado mañana con probabilidad 0.3 o a primera hora del siguiente día. Si se hace un pedido hoy, calcula la probabilidad de que tengas que decirles a los clientes que no hay kits antes de que llegue el próximo pedido.*

Solución

- i) Sea N_t el número de compras en t días, donde $N_t \sim \mathcal{P}(10t)$. Entonces, $N_{0,5} \sim \mathcal{P}(5)$ es el número de compras en 5 horas. Por tanto,

$$P(N_{0,5} = 10) = \frac{e^{-5}5^{10}}{10!} = 0,01813$$

- ii) Para hacer el cálculo de forma sencilla usamos la aproximación corregida a la normal.

$$P(X \geq 21) = P\left(Z \geq \frac{20,5 - 10}{\sqrt{10}}\right) = P(Z \geq 3,32) = 0,00045$$

- iii) Sea A_i el suceso “llegada del pedido en i días”. Los sucesos $\{A_i\}_{i=1}^3$ componen una partición en el conjunto de posibilidades. Si D denota el suceso en el que hay que hacer esperar a los clientes, entonces,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A_1)P(A_1) + P(D|A_2)P(A_2) + P(D|A_3)P(A_3) \\ &= P(N_1 \geq 21|A_1)P(A_1) + P(N_2 \geq 21|A_2)P(A_2) + P(N_3 \geq 21|A_3)P(A_3) \\ &= 0,5P\left(Z \geq \frac{20,5 - 10}{\sqrt{10}}\right) + 0,3P\left(Z \geq \frac{20,5 - 20}{\sqrt{20}}\right) + 0,2P\left(Z \geq \frac{20,5 - 30}{\sqrt{30}}\right) \\ &= 0,3285 \end{aligned}$$

Ejercicio 52 *Los coches que llegan a un semáforo siguen un proceso de Poisson con una media de 4 vehículos por minuto. El semáforo está 40 segundos en rojo y 80 segundos en verde.*

- I) *Calcula la probabilidad de que haya exactamente 4 coches en cola cuando el semáforo se pone en verde. Calcula la probabilidad de que haya más de 7 coches en cola.*
- II) *Obtén la probabilidad de que a lo largo de una hora haya al menos una ocasión con más de 7 coches en cola (Suponemos que en cada apertura del semáforo se vacía la cola).*

Solución

- I) Sea N_t el número de coches que llegan en t minutos. Entonces, $N_t \sim \mathcal{P}(4t)$. En los 40 segundos en los que el semáforo está en rojo, si Y es el número de coches en cola, la probabilidad de que hayan llegado 4 coches es

$$P(Y = 4) = P(N_{4.4/6} = 4) = P(N_{2,6} = 4) = \frac{e^{-2,6} 2,6^4}{4!} = 0,1414$$

Por otra parte, la probabilidad de que haya más de 7 coches en cola es

$$P(Y > 7) = 1 - P(Y \leq 7) = 1 - [P(Y = 0) + \dots + P(Y = 7)] = 0,0053$$

Como ilustración del decrecimiento en la probabilidad del número de coches en cola, la Figura 6.2 muestra las probabilidades $P(Y \geq 0, 1, \dots, 8)$.

- II) 1 hora son 3600 segundos, durante los cuales el semáforo se pone en rojo $3600/120 = 30$ veces. Sea X el número de veces en los que hay más de 7 coches en cola. Entonces, $X \sim B(30; 0,0053)$. Por tanto,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,9947^{30} = 0,1474$$

Ejercicio 53 *Un determinado activo puede tener caídas y subidas bruscas, que suceden de forma independiente. Se consideran bruscas cuando exceden el 10 % del valor anteriormente cotizado. El número de caídas bruscas a lo largo del tiempo, N_{ct} , sigue un proceso de Poisson de razón 1 caída cada 15 días, mientras que el número de subidas bruscas, N_{st} , sigue un proceso de Poisson de razón 1 subida cada 10 días.*

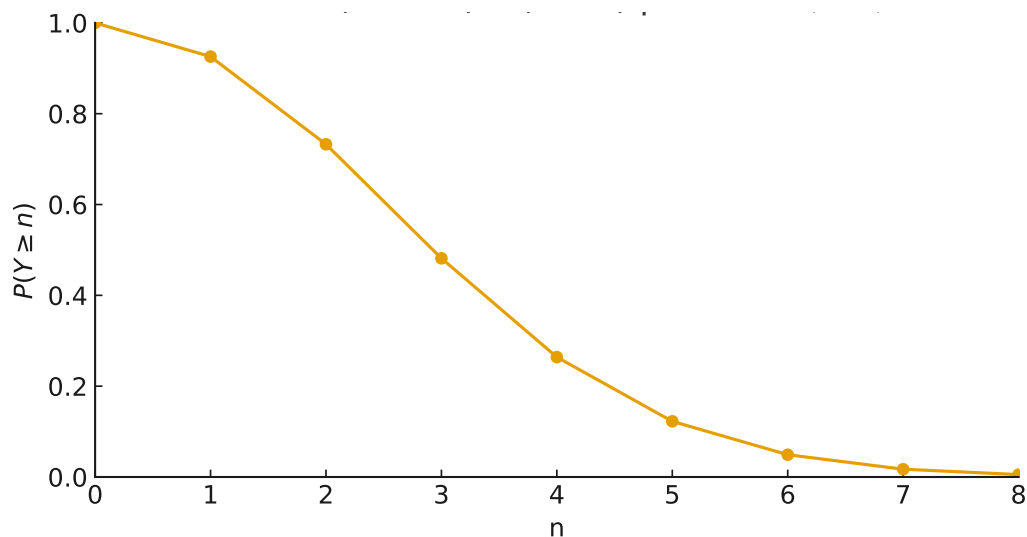


Figura 6.2: $P(Y \geq n)$ probabilidad de que haya n coches en cola, para $n = 0, \dots, 8$.

- I) *Calcula la probabilidad de que en un mismo día no tenga ni una subida ni una bajada brusca. Calcula, a su vez, la probabilidad de que en un mismo día tenga al menos una subida y una bajada bruscas.*
- II) *Calcula la probabilidad de que, en un determinado día, la primera subida brusca suceda antes que la primera caída brusca.*

Solución

- I) Consideremos N_s el número de subidas bruscas y N_c el número de caídas bruscas en un día. Tenemos que $\lambda_c = 1/15$ y $\lambda_s = 1/10$. La probabilidad de que en un mismo día no tenga ni una subida ni una bajada brusca es

$$P(\{N_s = 0\} \cap \{N_c = 0\}) = e^{-1/15} e^{-1/10} = 0,846.$$

La probabilidad de que en un mismo día tenga al menos una subida y una bajada brusca es

$$P(\{N_s \geq 1\} \cap \{N_c \geq 1\}) = (1 - e^{-1/15})(1 - e^{-1/10}) = 6,1 \cdot 10^{-3}$$

- II) El suceso descrito se da en un día bien cuando no hay ninguna caída y sí una subida, o bien cuando a la primera caída le precede una subida. Por tanto, si T_s y T_c denotan los tiempos de la primera subida y primera caída respectivamente, la probabilidad pedida es

$$P(T_s < T_c | T_c < 1) + P(\{T_s < 1\} \cap \{T_c > 1\})$$

Sabemos que $T_s \sim \text{Exp}(\lambda_s)$ y $T_c \sim \text{Exp}(\lambda_c)$, con lo que

$$\begin{aligned} P(T_s < T_c | T_c < 1) &= \int_0^1 P(T_s < t | T_c = t) f_{T_c}(t) dt \\ &= \int_0^1 \int_0^t f_{T_s}(s) ds f_{T_c}(t) dt = 0,0027 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\{T_s < 1\} \cap \{T_c > 1\}) &= P(T_s < 1) P(T_c > 1) \\ &= \int_0^1 f_{T_s}(s) ds \int_1^\infty f_{T_c}(t) dt = 0,088 \end{aligned}$$

Con lo que la suma 0,0907 es la probabilidad requerida.

Procesos autorregresivos

Ejercicio 54 *Justifica si los siguientes procesos son o no estacionarios, teniendo en cuenta que los errores u_t son independientes entre sí, independientes del pasado de X_t , e idénticamente distribuidos con media cero y varianza unitaria. En el caso de serlos, evalúa la media, la varianza, y las funciones de autocovarianzas y autocorrelaciones.*

I) $X_t = 0,8X_{t-6} + u_t$

II) $X_t = u_t + 0,3u_{t-2}$

Solución

- I) En este caso, el proceso es autorregresivo. Para analizar la estacionariedad planteamos la ecuación característica asociada a X_t . Si escribimos $X_t - 0,8X_{t-6} = u_t$, la ecuación característica asociada es $1 - 0,8z^6 = 0$. El proceso será estacionario si las raíces de dicha ecuación están fuera del círculo unidad. Para ello, su módulo debe ser mayor que la unidad, lo que es claro ya que se tiene que $|z|^6 = (1/0,8) > 1$.

La función de medias es la función nula, ya que $\mathbb{E}(X_t) = 0,8\mathbb{E}(X_{t-6}) + \mathbb{E}(u_t)$. Por tanto, la media estacionaria cumple $m = 0,8m$, con lo que $m = 0$.

Para obtener los momentos de segundo orden planteamos el sistema de ecuaciones de Yule-Walker:

$$\begin{cases} \sigma_u^2 = 1 & = \mathbb{Cov}(X_t, u_t) = \gamma(0) - 0,8\gamma(6) \\ 0 & = \mathbb{Cov}(X_t, u_{t+1}) = \gamma(1) - 0,8\gamma(5) \\ 0 & = \mathbb{Cov}(X_t, u_{t+2}) = \gamma(2) - 0,8\gamma(4) \\ 0 & = \mathbb{Cov}(X_t, u_{t+3}) = \gamma(3) - 0,8\gamma(3) \\ 0 & = \mathbb{Cov}(X_t, u_{t+4}) = \gamma(4) - 0,8\gamma(2) \\ 0 & = \mathbb{Cov}(X_t, u_{t+5}) = \gamma(5) - 0,8\gamma(1) \\ 0 & = \mathbb{Cov}(X_t, u_{t+6}) = \gamma(6) - 0,8\gamma(0) \end{cases}$$

De las ecuaciones 2 y 6 se obtiene que $\gamma(1) = \gamma(5) = 0$. De igual manera, las ecuaciones 3 y 5 muestran que $\gamma(2) = \gamma(4) = 0$ y de la ecuación 4 se obtiene que $\gamma(3) = 0$. Finalmente, resolviendo el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas formado por las ecuaciones 1 y 7, obtenemos que $\gamma(0) = 1/(1 - 0,8^2) = 2,78$ y $\gamma(6) = 0,8/(1 - 0,8^2) = 2,22$. Las autocovarianzas de órdenes superiores, $k \geq 7$, se obtienen de forma recursiva siguiendo $\gamma(k) = 0,8\gamma(k - 6)$.

La estructura de autocorrelaciones se obtiene mediante $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$. Por tanto, $\rho(0) = 1$; $\rho(1) = \dots = \rho(5) = 0$; $\rho(6) = 0,8$; $\rho(7) = \dots = \rho(11)$. En general,

$$\rho(k) = \begin{cases} 0,8^m & k = 6^m \\ 0 & k \neq 6^m \end{cases}$$

- ii) Este proceso es un proceso de medias móviles. Por tanto, es estacionario con media cero. La estructura de autocovarianzas se obtiene como:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \mathbb{Cov}(X_t, X_t) = \mathbb{V}(X_t) = \mathbb{Cov}(u_t + 0,3u_{t-2}, u_t + 0,3u_{t-2}) \\ &= 1 + 0,09 = 1,09 \\ \gamma(1) &= \mathbb{Cov}(X_t, X_{t+1}) = \mathbb{Cov}(u_t + 0,3u_{t-2}, u_{t+1} + 0,3u_{t-1}) = 0 \\ \gamma(2) &= \mathbb{Cov}(X_t, X_{t+2}) = \mathbb{Cov}(u_t + 0,3u_{t-2}, u_{t+2} + 0,3u_t) = 0,3 \\ \gamma(k) &= 0; \quad k > 2 \end{aligned}$$

De nuevo podemos obtener la función de autocorrelaciones mediante $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$.

Ejercicio 55 *Considera el proceso*

$$X_t = 0,6X_{t-1} + 0,3X_{t-2} + u_t,$$

donde los errores $u_t \sim iid N(0, \sigma^2 = 1)$ son independientes del pasado de X_t .

- I) ¿Es X_t un proceso estacionario? Razona tu respuesta.
- II) Resuelve la estructura de covarianzas y correlaciones de este proceso.

Solución

- I) Resolvemos la ecuación característica asociada al proceso

$$1 - 0,6z - 0,3z^2 = 0$$

y obtenemos que las soluciones son $z_1 = 1,081$; $z_2 = -3,08$. Ambas soluciones tienen valor absoluto mayor que uno, con lo que el proceso es estacionario.

Como ilustración, representamos 50 trayectorias de este proceso en la Figura 7.1, en la cual se aprecia que la variabilidad permanece estable.

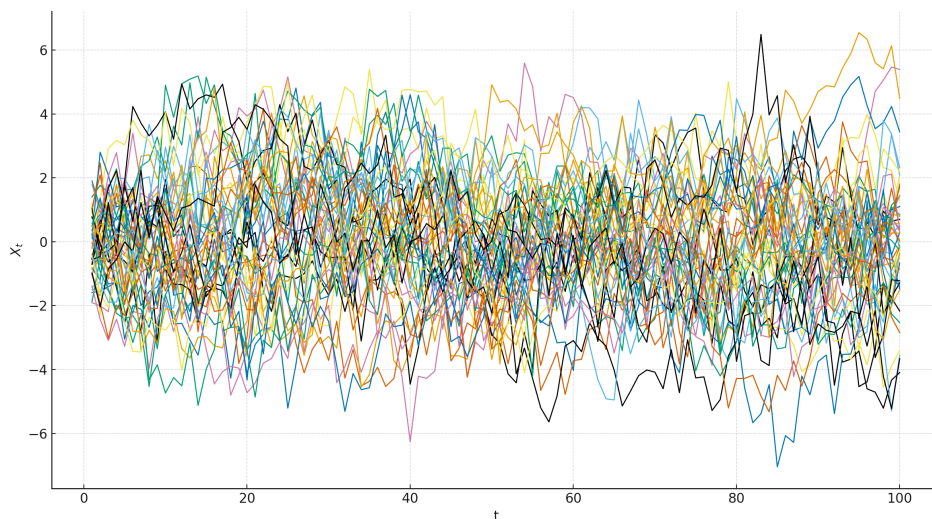


Figura 7.1: 50 trayectorias del proceso $X_t = 0,6X_{t-1} + 0,3X_{t-2} + u_t$.

II) El sistema de Yule-Walker que se plantea en este caso es

$$\begin{cases} 1 &= \gamma(0) - 0,6\gamma(1) - 0,3\gamma(2) \\ 0 &= \gamma(1) - 0,6\gamma(0) - 0,3\gamma(1) \\ 0 &= \gamma(2) - 0,6\gamma(1) - 0,3\gamma(0) \\ 0 &= \gamma(k) - 0,6\gamma(k-1) - 0,3\gamma(k-2), \quad k > 2 \end{cases}$$

Resolviendo, se obtiene que $\gamma(0) = 4,14$; $\gamma(1) = 3,55$; $\gamma(2) = 3,372$.

Para $k \geq 3$, utilizamos la regla recursiva $\gamma(k) = 0,6\gamma(k-1) + 0,3\gamma(k-2)$.

Las correlaciones se obtienen mediante $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$.

Ejercicio 56 *Considera un proceso definido de la forma*

$$X_t = -0,2X_{t-2} + 0,5X_{t-4} + u_t,$$

donde $X_0 \equiv 0$ y los errores u_t son i.i.d., independientes del pasado de X_t , de media nula y varianza unitaria.

- I) *¿Es X_t un proceso estacionario? Razona tu respuesta (Idea: para resolver la ecuación característica prueba el cambio $x = z^2$).*
- II) *Obtén las funciones de autocovarianzas y de autocorrelaciones hasta el retardo 8.*

Solución

- I) Para ver si el proceso X_t es estacionario planteamos la ecuación característica

$$1 + 0,2z^2 - 0,5z^4 = 0$$

Haciendo el cambio de variable $x = z^2$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$1 + 0,2x - 0,5x^2 = 0$$

Las dos raíces son reales y sus valores son $x_1 = -1,228$ y $x_2 = 1,62$, de módulos mayores que la unidad. Por tanto, como sus raíces cuadradas también tendrán módulo mayor que la unidad, el proceso es estacionario.

- II) Para calcular la función de autocovarianzas, planteamos el sistema de ecuaciones de Yule-Walker, que viene dado por

$$\begin{cases} \gamma(0) + 0,2\gamma(2) - 0,5\gamma(4) = 1 \\ \gamma(1) + 0,2\gamma(1) - 0,5\gamma(3) = 0 \\ \gamma(2) + 0,2\gamma(0) - 0,5\gamma(2) = 0 \\ \gamma(3) + 0,2\gamma(1) - 0,5\gamma(1) = 0 \\ \gamma(4) + 0,2\gamma(2) - 0,5\gamma(0) = 0 \end{cases}$$

De las ecuaciones 2 y 4 es inmediato ver que $\gamma(1) = \gamma(3) = 0$. Por tanto, basta con resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, del que obtenemos los valores $\gamma(0) = 1,587$, $\gamma(2) = 1,905$ y $\gamma(4) = 0,9206$.

Después, aplicamos la fórmula recursiva $\gamma(k) + 0,2\gamma(k-2) - 0,5\gamma(k-4) = 0$ para los retardos de orden superior y obtenemos que $\gamma(5) = \gamma(7) = 0$, $\gamma(6) = 0,7684$ y $\gamma(8) = 0,3066$. Los valores de la función de autocorrelación se obtienen directamente como $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$.

Ejercicio 57 *Considera el proceso $X_t = 0,8X_{t-3} + u_t$, con errores $u_t \sim iid N(0,1)$ e independientes del pasado de X_t . Considera que X_0 sigue la distribución estacionaria.*

- I) *Verifica que el proceso X_t es estacionario.*
- II) *Obtén las funciones de autocovarianzas y de autocorrelaciones del proceso hasta $\gamma(9)$ y $\rho(9)$.*
- III) *Obtén la distribución de X_9 condicionada a $X_3 = 2$. Obtén, además, la distribución de X_9 condicionada a $X_6 = 1,6$ e interpreta los resultados.*

Solución

- I) Comprobamos que la ecuación característica tiene sus soluciones fuera del círculo unidad: $1 - 0,8z^3 = 0 \Rightarrow z^3 = 1,25 \Rightarrow |z|^3 = 1,25$. Por tanto, $|z| = \sqrt[3]{1,25} > 1$ y se tiene que el proceso X_t es estacionario.

II) Planteamos el sistema de ecuaciones de Yule-Walker

$$\begin{cases} 1 &= \gamma(0) - 0,8\gamma(3) \\ 0 &= \gamma(1) - 0,8\gamma(2) \\ 0 &= \gamma(2) - 0,8\gamma(1) \\ 0 &= \gamma(3) - 0,8\gamma(0) \end{cases}$$

De las ecuaciones 2 y 3 obtenemos que $\gamma(1) = \gamma(2) = 0$, mientras que de las ecuaciones 1 y 4 obtenemos que $\gamma(3) = 2,222$ y $\gamma(0) = 2,778$.

A partir de aquí, se cumple que $\gamma(4) = \gamma(5) = 0$; $\gamma(6) = 1,778$; $\gamma(7) = \gamma(8) = 0$; $\gamma(9) = 1,422$.

Por tanto, la estructura de autocorrelaciones viene dada por: $\rho(0) = 1$; $\rho(1) = \rho(2) = 0$; $\rho(3) = 0,8$; $\rho(4) = \rho(5) = 0$; $\rho(6) = 0,8^2$; $\rho(7) = \rho(8) = 0$; $\rho(9) = 0,8^3$.

La Figura 7.2 muestra la representación de la función de autocorrelación (ACF, por sus siglas en inglés), donde se aprecia su tendencia negativa a medida que aumentan los retardos. Esta característica de pérdida de memoria es clave en procesos estacionarios.

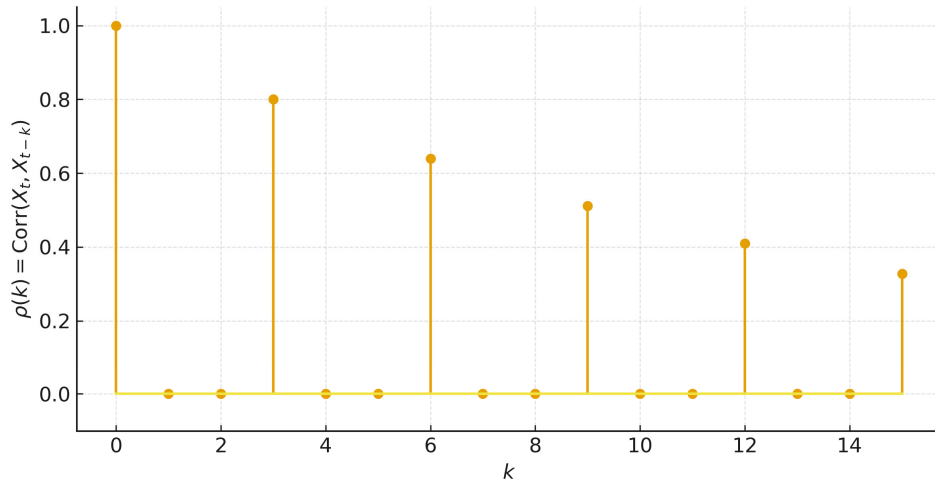


Figura 7.2: ACF del proceso $X_t = 0,8X_{t-3} + u_t$.

III)

$$X_9 = 0,8X_6 + u_9 = 0,8(0,8X_3 + u_6) + u_9 = 0,64X_3 + 0,8u_6 + u_9$$

Por tanto, $X_9 | (X_3 = 2)$ sigue una ley normal de media 1,28 y de varianza 1,8. Asimismo, $X_9 | (X_6 = 1,6)$ sigue una ley normal de media 1,28 y varianza 1.

En estos casos particulares, la media condicionada de X_9 es la misma, pero la varianza es mayor cuando condicionamos a X_3 dado que hay mayor incertidumbre.

Ejercicio 58 *Una cadena tiene establecimientos en 3 países diferentes y estima que los beneficios para el 2025 en cada país (en millones de euros) siguen una ley normal $B_i \sim N(1, \sigma^2 = 2)$, $i = 1, 2, 3$. Considera que hay independencia en los beneficios por países.*

- I) *Obtén la distribución de los beneficios totales de la cadena $BT = B_1 + B_2 + B_3$ en el año 2025. ¿Cuál es la probabilidad de que la cadena tenga pérdidas?*
- II) *Se considera que la dinámica de los beneficios totales en años sucesivos sigue un proceso del tipo $BT_t = 0,3 + 0,9BT_{t-1} + u_t$, con $u_t \sim N(0, 1)$ independientes entre sí y de BT_{t-1} . Calcula la probabilidad de que la cadena tenga pérdidas en el año 2026.*
- III) *Si sabemos que en 2025 la cadena ha tenido 0,5M de euros de beneficios, ¿cuál es la probabilidad de que haya pérdidas en 2026?*
- IV) *Sabiendo que es un proceso estacionario, calcula la media y la varianza de los beneficios anuales en el largo plazo (ten en cuenta que en la ecuación del proceso la media y la varianza serán la misma para todos los periodos).*

Solución

- i) Si BT_0 representa los beneficios totales de la cadena en 2025, como $BT_0 \sim N(3, \sigma^2 = 6)$, la probabilidad de pérdidas es

$$P(BT_0 < 0) = P\left(Z < \frac{-3}{\sqrt{6}}\right) = \Phi(-1,225) = 0,1104$$

II) Denotando por BT_1 los beneficios totales de 2026, tenemos que

$$BT_1 = 0,3 + 0,9BT_0 + u_t \sim N(3, \sigma^2 = 0,9^2 \cdot 6 + 1) = N(3, \sigma^2 = 5,86)$$

Por tanto, la probabilidad de pérdidas en 2026 es $\Phi(-1, 239) = 0,1076$.

III) La distribución de los beneficios totales en 2026 en este caso es

$$BT_1 = 0,3 + 0,9 \cdot 0,5 + u_t \sim N(0,75; \sigma^2 = 1)$$

Ahora la probabilidad de pérdidas es $\Phi(-0, 75) = 0,2266$.

IV) Como el proceso es estacionario, las medias y varianzas son las mismas en cualquier año. Denotando por m y por σ^2 la media y varianza estacionarias respectivamente, resolvemos

$$\begin{aligned} m &= 0,3 + 0,9m \\ \sigma^2 &= 0,81\sigma^2 + 1 \end{aligned}$$

Así, obtenemos que

$$\begin{aligned} m &= \frac{0,3}{0,1} = 3 \\ \sigma^2 &= \frac{1}{0,19} = 5,26 \end{aligned}$$

Martingalas

Ejercicio 59 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, de varianza finita σ^2 , tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_n) = 0$. Prueba que el siguiente proceso estocástico es una martingala con respecto a la filtración natural $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$:

$$M_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Solución

Recordemos que, para que una sucesión sea martingala, una de las condiciones que se tiene que cumplir es $E(|M_n|) < \infty$. Demostremos esta condición. Para ello, contemplamos dos posibilidades: $|M_n| \leq 1$ y $|M_n| > 1$.

Si $|M_n| \leq 1$, $\mathbb{E}(|M_n|) \leq 1 < \infty$.

Si $|M_n| > 1$, $|M_n| < |M_n|^2$, por lo que $\mathbb{E}(|M_n|) < \mathbb{E}(|M_n|^2)$. Además, como X_i son v.a. independientes, podemos escribir

$$\mathbb{E}(|M_n|^2) = \mathbb{E}(M_n^2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^2) = n\sigma^2 < \infty$$

Este apartado lo daremos por probado en los ejercicios siguientes.

Además, se debe cumplir que $\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= M_{n-1} + \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} + 0 \\ &= M_{n-1}\end{aligned}$$

En la Figura 8.1 se representan 50 trayectorias de este proceso considerando, sin pérdida de generalidad para esta observación, que las variables X_i son normales estándar (Z_i). Vemos cómo la variabilidad va creciendo de forma lineal. De hecho, el estadístico representativo de esta variabilidad global, la varianza, crece de forma lineal con n .

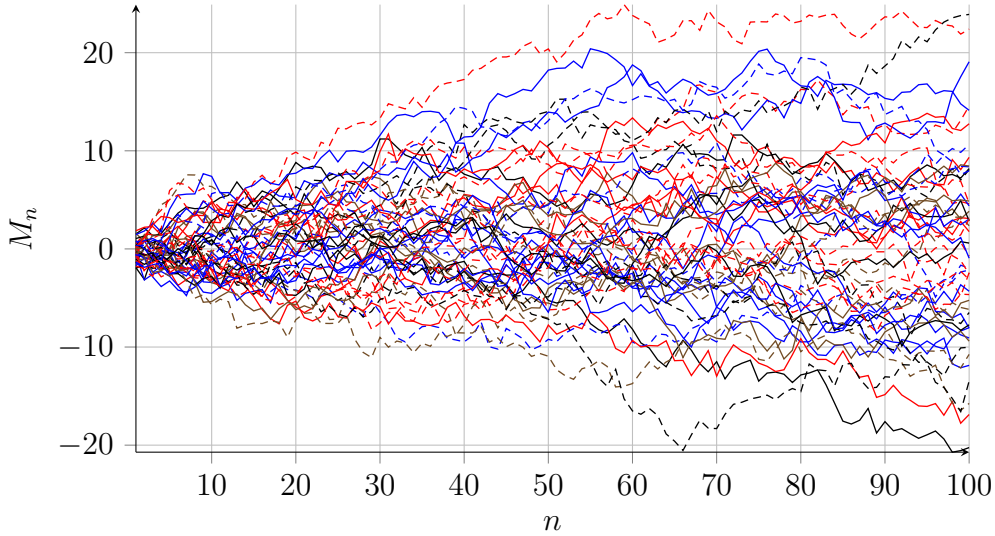


Figura 8.1: Trayectorias del proceso $M_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, con $Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Ejercicio 60 *En el mismo contexto del ejercicio anterior, prueba que el siguiente proceso estocástico también es una martingala:*

$$M_n = \prod_{i=1}^n X_i$$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i | \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n-1} X_i \cdot X_n | \mathcal{F}_{n-1}\right) \\
&= M_{n-1} \cdot \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} \cdot 1 \\
&= M_{n-1}
\end{aligned}$$

Ejercicio 61 Sea $\{M_t\}_{t \geq 0}$ una martingala con respecto de la filtración natural $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, tal que $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$, para todo $t \geq 0$. Demuestra que

$$\mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s)$$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_t^2 - 2M_t M_s + M_s^2 | \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 - 2M_t M_s + 2M_s^2 | \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s) - 2\mathbb{E}(M_t M_s - M_s^2 | \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s) - 2M_s \mathbb{E}(M_t - M_s | \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s)
\end{aligned}$$

Ejercicio 62 Sea $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, con distribución uniforme en el intervalo $[-1, 1]$. Definimos el proceso estocástico

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Demuestra que los siguientes procesos estocásticos son martingalas:

I)

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ M_n = \sum_{i=1}^n S_{i-1}^2 Y_i, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

II)

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ M_n = S_n^2 - \frac{n}{3}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Solución

I)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n S_{i-1}^2 Y_i | \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n-1} S_{i-1}^2 Y_i + S_{n-1}^2 Y_n | \mathcal{F}_{n-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} S_{i-1}^2 Y_i + \mathbb{E}(S_{n-1}^2 Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} S_{i-1}^2 Y_i + S_{n-1}^2 \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= M_{n-1} \end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(S_n^2 - \frac{n}{3} | \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}(S_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - \frac{n}{3} \\ &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right)^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right) - \frac{n}{3} = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i + Y_n\right)^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right) - \frac{n}{3} \\ &= \mathbb{E}\left(\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n-1} Y_i\right)Y_n + Y_n^2\right] | \mathcal{F}_{n-1}\right) - \frac{n}{3} \\ &= S_{n-1}^2 - \frac{n-1}{3} \\ &= M_{n-1} \end{aligned}$$

Ejercicio 63 Sea $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas, con $X_n \sim N(0, \sigma^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Calcula el valor de a que hace que el siguiente proceso sea una martingala:

$$\begin{cases} M_0 = 1 \\ M_n = e^{(a \sum_{i=1}^n X_i - n\sigma^2)}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(e^{a\sum_{i=1}^n X_i - n\sigma^2}|\mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbb{E}\left(e^{a\sum_{i=1}^{n-1} X_i + aX_n - (n-1)\sigma^2 - \sigma^2}|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{a\sum_{i=1}^{n-1} X_i - (n-1)\sigma^2} e^{aX_n - \sigma^2}|\mathcal{F}_{n-1}\right) = M_{n-1}\mathbb{E}\left(e^{aX_n - \sigma^2}|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\
&= M_{n-1} \exp\left(-\sigma^2 + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Para que $\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$, se tiene que cumplir que $\exp\left(-\sigma^2 + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right) = 1$, y eso sucede sí y solo sí $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$.

Ejercicio 64 *Considera un proceso martingala en tiempo discreto $\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$. Sea $Y_n = M_0 + \sum_{i=1}^n M_{i-1}(M_i - M_{i-1})$, con $Y_0 = M_0$. Comprueba que $\{Y_n\}$ es también una martingala.*

Solución

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(M_0 + \sum_{i=1}^n M_{i-1}(M_i - M_{i-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(M_0 + \sum_{i=1}^{n-1} M_{i-1}(M_i - M_{i-1}) + M_{n-1}(M_n - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}\right) \\
&= \mathbb{E}(Y_{n-1} + M_{n-1}(M_n - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= Y_{n-1} + M_{n-1}\mathbb{E}(M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) \\
&= Y_{n-1}
\end{aligned}$$

Ejercicio 65 *Para un proceso martingala $\{M_n\}_{n=1,2,\dots}$, considera el proceso definido como $Y_n = M_0 + \sum_{i=1}^n S_i(M_i - M_{i-1})$, con $Y_0 = M_0$. Especifica una condición suficiente del proceso $\{S_i\}$ para que $\{Y_n\}$ siga siendo martingala.*

Solución

Si consideramos que $\{S_n\}$ es un proceso predecible (adaptable a la filtración $\mathcal{F}_{n-1}$), tendremos

$$\mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}[S_n(M_n - M_{n-1})|Y_{n-1}] = S_n\mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})|Y_{n-1}] = 0$$

Por tanto, la predictibilidad es una condición suficiente.

Parte III

CÁLCULO DE ITÔ

Movimiento Browniano

Comenzamos visualizando 50 trayectorias de un movimiento Browniano estándar en la Figura 9.1.

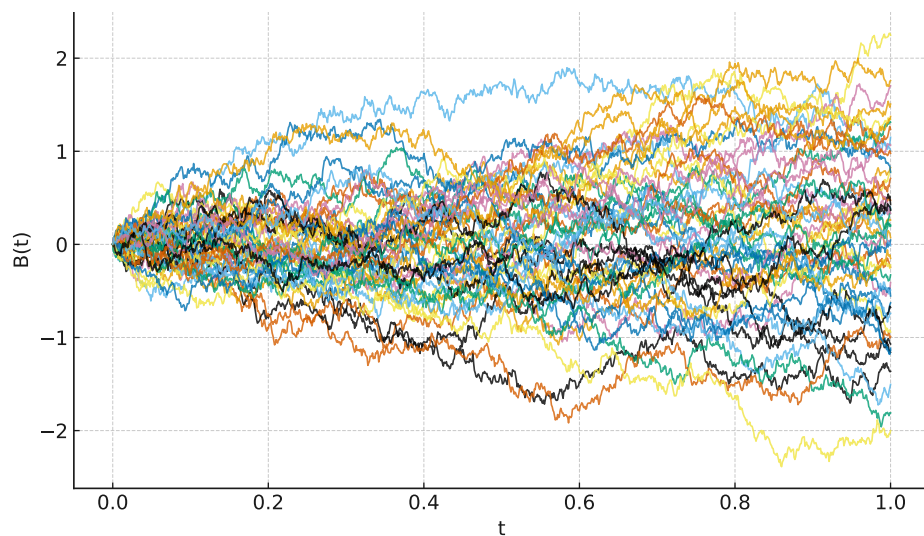


Figura 9.1: 50 trayectorias de un movimiento Browniano estándar en $[0, 1]$.

Ejercicio 66 Si B_t es un movimiento Browniano, demuestra que el siguiente proceso estocástico es una martingala:

$$M_t = B_t^3 - 3tB_t$$

Solución

Como ilustración, probemos en este caso la condición $\mathbb{E}|M_t| < \infty$. Tenemos que $\mathbb{E}|M_t| \leq \mathbb{E}|B_t^3| + 3t\mathbb{E}|B_t|$ y, dado que B_t tiene tanto su varianza como el momento de orden 3 acotados, las esperanzas anteriores son finitas.

Para el siguiente paso, sea $s < t$. Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t^3 - 3tB_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^3 - 3tB_t|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}((B_t - B_s)^3 + 3(B_t - B_s)^2 B_s + 3(B_t - B_s) B_s^2 + B_s^3 - 3tB_t|\mathcal{F}_s) \\ &= 0 + 3(t - s)B_s + B_s^3 - 3tB_s = B_s^3 - 3sB_s \\ &= M_s\end{aligned}$$

Ejercicio 67 *Comprueba que si B_t es un movimiento browniano, ni el puente browniano, $K_t = B_t - tB_1$, ni el movimiento browniano con deriva, $Q_t = \sigma B_t + \mu t$, son martingalas.*

Solución

Para $s < t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(K_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(B_t - tB_1|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t|\mathcal{F}_s) - t\mathbb{E}(B_1|\mathcal{F}_s) \\ &= (1 - t)B_s \neq K_s \\ \mathbb{E}(Q_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\sigma B_t + \mu t|\mathcal{F}_s) = \sigma B_s + \mu t \neq Q_s\end{aligned}$$

Ejercicio 68 *Este ejercicio es una consecuencia del teorema funcional del límite y proporciona nociones básicas que se utilizan en la teoría de cointegración para hacer contrastes de raíces unitarias.*

Considera el proceso $X_t = aX_{t-1} + u_t$, donde $X_0 = 0$ y las variables u_t son independientes de media nula y varianza σ^2 . Obtén la distribución del estimador

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2}$$

bajo la hipótesis nula $H_0 : a = 1$.

Solución

Bajo la hipótesis nula, $a = 1$, por lo que podemos escribir

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^T X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=1}^T (X_{t-1} + u_t) X_{t-1}}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2} = 1 + \frac{\sum_{t=1}^T u_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^T X_{t-1}^2}$$

La distribución de este estadístico es la misma que si consideramos $\sigma = 1$, ya que si reemplazamos X_t por X_t/σ y u_t por u_t/σ , el proceso se mantiene igual. Por tanto, para analizar el estadístico consideramos $\sigma = 1$. Bajo H_0 , $a = 1$ y, siendo $\Delta X_{t-1} = X_t - X_{t-1} = u_t$, podemos reescribir el numerador y el denominador de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T u_t X_{t-1} &= T \sum_{t=1}^T \frac{\Delta X_{t-1}}{T^{1/2}} \frac{X_{t-1}}{T^{1/2}} \\ \sum_{t=1}^T X_{t-1}^2 &= T^2 \sum_{t=1}^T \frac{X_{t-1}^2}{T} \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Usando el principio de invarianza de Donsker, tenemos que $f(X_t/\sqrt{T})$ converge en distribución a $f(B_t)$.

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \frac{\Delta X_{t-1}}{T^{1/2}} \frac{X_{t-1}}{T^{1/2}} &\xrightarrow{d} \int_0^1 B_t dB_t \\ \sum_{t=1}^T \frac{X_{t-1}^2}{T} \frac{1}{T} &\xrightarrow{d} \int_0^1 B_t^2 dt \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T u_t X_{t-1} &\xrightarrow{d} \int_0^1 B_t dB_t \\ \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \frac{X_{t-1}^2}{T} \frac{1}{T} &\xrightarrow{d} \int_0^1 B_t^2 dt \end{aligned}$$

Y se deduce,

$$T(\hat{a} - 1) \xrightarrow{d} \frac{\int_0^1 B_t dB_t}{\int_0^1 B_t^2 dt}$$

Cálculo de Itô

Ejercicio 69 *Considera que S_t sigue un proceso de Itô de la forma*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(t) dt + \sigma(t) dB_t,$$

donde $\mu(t)$ y $\sigma(t)$ son funciones continuas en $[0, T]$. Demuestra

$$S_t = S_0 \exp \left[\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s \right]$$

Solución

Comprobemos que S_t cumple la ecuación diferencial del enunciado. Podemos escribir $S_t = f(t, X_t)$, donde $f(t, x) = S_0 \exp \left[\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + x \right]$ y $X_t = \int_0^t \sigma(s) dB_s$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} f_t(t, x) &= \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) S_0 \exp \left[\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + x \right] \\ f_x(t, x) &= S_0 \exp \left[\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + x \right] \\ f_{xx}(t, x) &= S_0 \exp \left[\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + x \right] \end{aligned}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} f_t(t, X_t) &= \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) S_t \\ f_x(t, X_t) &= S_t \\ f_{xx}(t, X_t) &= S_t \end{aligned}$$

Utilizando la regla de Itô, $df(t, X_t) = f_t dt + f_x dX_t + \frac{1}{2} f_{xx} (dX_t)^2$, obtenemos

$$dS_t = \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) S_t dt + S_t dX_t + \frac{1}{2} S_t (dX_t)^2$$

Como $X_t = \int_0^t \sigma(s) dB_s$, se cumplen $dX_t = \sigma(t) dB_t$; $(dX_t)^2 = \sigma^2(t) dt$. Así, se deduce

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) dt + \sigma(t) dB_t + \frac{\sigma^2(t)}{2} dt \\ &= \mu(t) dt + \sigma(t) dB_t \end{aligned}$$

Ejercicio 70 Sea X_t un proceso de Itô, $dX_t = \mu dt + \sigma dB_t$, con $X_0 = 0$.

i) Obtén la ecuación diferencial que cumple $Y_t = e^{X_t}$.

ii) Idem para $Y_t = ae^{X_t}$.

Solución

i) Tomamos $f(t, x) = e^x$. Así, $f_t = 0$; $f_x = e^x$; $f_{xx} = e^x$. Utilizando la fórmula de Itô, $df(t, X_t) = f_t dt + f_x dX_t + \frac{1}{2} f_{xx} (dX_t)^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} dY_t &= e^{X_t} dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t} (dX_t)^2 \\ &= e^{X_t} (\mu dt + \sigma dB_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{X_t} dt \\ &= \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) Y_t dt + \sigma Y_t dB_t \\ \Rightarrow \frac{dY_t}{Y_t} &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \end{aligned}$$

II) En este caso $f(t, x) = ae^x$; $f_t = 0$; $f_x = ae^x$; $f_{xx} = ae^x$. Utilizando de nuevo la fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} d(ae^{X_t}) &= ae^{X_t}dX_t + \frac{a}{2}e^{X_t}(dX_t)^2 \\ &= Y_t(\mu dt + \sigma dB_t) + \frac{1}{2}Y_t(\mu dt + \sigma dB_t)^2 \\ &= Y_t\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + Y_t\sigma dB_t \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t$$

Ejercicio 71 *Resuelve la ecuación diferencial estocástica*

$$\begin{cases} dX_t = 2dt + 3X_tdB_t \\ X_0 = 3 \end{cases}$$

Indicación: Utiliza el cambio de variable $X_t = Y_te^{3B_t - \frac{9}{2}t}$.

Solución

A partir de $Y_t = X_tF_t$, con $F_t = e^{-3B_t + \frac{9}{2}t}$, se obtiene

$$\begin{aligned} dY_t &= F_t dX_t + X_t dF_t + dX_t dF_t \\ &= e^{-3B_t + \frac{9}{2}t}(2dt + 3X_t dB_t) + X_t e^{-3B_t + \frac{9}{2}t}(-3dB_t + 9dt) - 9X_t e^{-3B_t + \frac{9}{2}t}dt \\ &= 2e^{-3B_t + \frac{9}{2}t}dt \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Y_t &= 3 + 2 \int_0^t e^{-3B_s + \frac{9}{2}s} ds \\ X_t &= 3e^{3B_t - \frac{9}{2}t} + 2 \int_0^t e^{3(B_t - B_s) - \frac{9}{2}(t-s)} ds \end{aligned}$$

Ejercicio 72 *Expresa la v.a. B_T^4 como la suma de su esperanza más una integral estocástica. Calcula su media y su varianza.*

Solución

Aplicando Itô a B_t^4 tenemos

$$\begin{aligned} dB_t^4 &= 4B_t^3 dB_t + 6B_t^2 dt \\ B_T^4 &= 4 \int_0^T B_t^3 dB_t + 6 \int_0^T B_t^2 dt \end{aligned}$$

Integrando por partes y aplicando Itô a B_t^2 : $dv = dt$; $v = t$; $B_t^2 = u$; $du = 2B_t dB_t + dt$, se tiene que

$$\int_0^T B_t^2 dt = TB_T^2 - \int_0^T t(2B_t dB_t + dt)$$

Así, $B_T^2 = \int_0^T dB_t^2 = 2 \int_0^T B_t dB_t + \int_0^T dt$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} B_T^4 &= 4 \int_0^T B_t^3 dB_t + 6T \int_0^T (2B_t dB_t + dt) - 6 \int_0^T t(2B_t dB_t + dt) \\ &= 3T^2 + \int_0^T (4B_t^3 + 12(T-t)B_t) dB_t \\ \mathbb{E}(B_T^4) &= 3T^2 \\ \mathbb{V}(B_T^4) &= \int_0^T \mathbb{E}(4B_t^3 + 12(T-t)B_t)^2 dt \\ &= \int_0^T \mathbb{E}(16B_t^6 + 96(T-t)B_t^4 + 144(T-t)^2 B_t^2) dt \\ &= 240 \frac{T^4}{4} + 96 \cdot 3 \left(\frac{T^4}{3} - \frac{T^4}{4} \right) + 144 \left(\frac{T^4}{2} + \frac{T^4}{4} - \frac{2T^4}{3} \right) \\ &= 96T^4 \\ &= \mathbb{E}(B_T^8) - \mathbb{E}(B_T^4)^2 = 105T^4 - 9T^4 = 96T^4 \end{aligned}$$

Ejercicio 73 *Considera la v.a. $F = \int_0^T t^2 B_t dt$.*

- i) *Obtén su representación integral (Idea: utiliza Itô con $t^3 B_t$ o integra por partes).*
- ii) *Obtén la media, la varianza y la distribución de la v.a. F .*

Solución

- i) Consideremos $f(t, x) = t^3 x$, con $f_t = 3t^2 x$; $f_x = t^3$; $f_{xx} = 0$. Aplicando la fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} d(t^3 B_t) &= 3t^2 B_t dt + t^3 dB_t \\ T^3 B_T &= \int_0^T 3t^2 B_t dt + \int_0^T t^3 dB_t \\ \int_0^T 3t^2 B_t dt &= T^3 B_T - \int_0^T t^3 dB_t = T^3 \int_0^T dB_t - \int_0^T t^3 dB_t \\ &= \int_0^T (T^3 - t^3) dB_t \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^T t^2 B_t dt = \frac{1}{3} \int_0^T (T^3 - t^3) dB_t$$

- ii) De la representación integral obtenemos que la media de F es cero y la varianza es $\mathbb{V}(F) = (1/9) \int_0^T (T^3 - t^3)^2 dt = T^7/14$.

Al ser F de la forma $F = \int_0^T u(t) dB_t$ con $u(t)$ determinista, tenemos que $F \sim N(0, T^7/14)$.

Ejercicio 74 *Consideremos un proceso de movimiento browniano $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$. Encuentra la representación integral de la variable aleatoria $F = 4B_T^3 + 5$.*

Solución

Aplicando Itô a B_t^3 tenemos que $dB_t^3 = 12B_t^2 dB_t + 12B_t dt$. Por tanto, integrando por partes y teniendo en cuenta

$$\int_0^T B_t dt = t B_t \Big|_0^T - \int_0^T t dB_t = T B_T - \int_0^T t dB_t = \int_0^T (T - t) dB_t$$

obtenemos

$$F = 5 + \int_0^T 12(B_t^2 + T - t) dB_t$$

Representación integral de martingalas

Ejercicio 75 Sea $L_t = \exp\left(-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$.

- I) *Obtén la representación integral de L_T .*
II) *Razona si el proceso L_t es o no una martingala.*

Solución

I) Aplicando Itô,

$$dL_t = -\frac{\lambda^2}{2}L_t dt - \lambda L_t dB_t + \frac{\lambda^2}{2}L_t dt = -\lambda L_t dB_t$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^T dL_t &= \int_0^T -\lambda L_t dB_t \\ L_T - L_0 &= \int_0^T -\lambda L_t dB_t\end{aligned}$$

y, como $L_0 = 1$, obtenemos

$$L_T = 1 - \lambda \int_0^T L_t dB_t$$

- II) Al ser $dL_t = -\lambda L_t dB_t$, vemos que el proceso L_t no tiene deriva (no hay un término con dt), con lo que el proceso L_t tiene la propiedad de martingala y su representación integral es

$$L_t = 1 - \int_0^t \lambda L_s dB_s$$

Ejercicio 76 *Calcula los valores del parámetro a para los cuales el proceso estocástico*

$$X_t = e^{3at} \sin B_t$$

es una martingala. Calcula la media de este proceso y comprueba que es una martingala cuadrado integrable.

Solución

Por la fórmula de Itô,

$$dX_t = 3ae^{3at} \sin B_t dt + e^{3at} \cos B_t dB_t - \frac{1}{2}e^{3at} \sin B_t dt$$

Por tanto, si $3a - 1/2 = 0$; es decir, si $a = 1/6$, tendremos

$$X_t = \int_0^t e^{3as} \cos B_s dB_s$$

Comprobemos que X_t cumple la condición de ser cuadrado integrable.

$$E \left[\left(\int_0^t e^{3as} \cos B_s dB_s \right)^2 \right] = E \left(\int_0^t e^{6as} \cos^2 B_s ds \right) \leq \int_0^t e^{6as} ds < \infty$$

Finalmente, $E(X_t) = E(X_0) = 0$.

Ejercicio 77 *Considera la v.a.*

$$F_T = \int_0^T 2t B_t dt + 3B_T$$

- 1) *Obtén la expresión de F_T como su media más una integral estocástica (Idea: Aplica Itô al proceso $t^2 B_t$).*

II) *Obtén la media y la varianza de F_T y su distribución.*

III) *Razona por qué el proceso F_t , $0 \leq t \leq T$, no es martingala.*

Solución

I) Consideramos el proceso $X_t = t^2 B_t$ y tomamos $f(t, x) = t^2 x$, de manera que $f_t = 2tx$; $f_x = t^2$; $f_{xx} = 0$. Aplicando Itô,

$$\begin{aligned} d(t^2 B_t) &= 2t B_t dt + t^2 dB_t \\ T^2 B_T &= \int_0^T 2t B_t dt + \int_0^T t^2 dB_t \end{aligned}$$

Por tanto, como

$$\int_0^T 2t B_t dt = T^2 B_T - \int_0^T t^2 dB_t = \int_0^T (T^2 - t^2) dB_t,$$

se obtiene

$$\int_0^T 2t B_t dt + 3B_T = \int_0^T (T^2 - t^2 + 3) dB_t$$

Observa que obtienes el mismo resultado integrando por partes $\int_0^T 2t B_t dt$.

II)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F_T) &= 0 \\ \mathbb{V}(F_T) &= \int_0^T \mathbb{E}(T^2 - t^2 + 3)^2 dt = \int_0^T (T^2 - t^2 + 3)^2 dt \\ &= \int_0^T (T^4 + t^4 - 2t^2 T^2 + 6T^2 - 6t^2 + 9) dt \\ &= \frac{8}{15} T^5 + 4T^3 + 9T \end{aligned}$$

Además, $F_T \sim N\left(0, \frac{8}{15} T^5 + 4T^3 + 9T\right)$, ya que se trata de una integral del tipo $\int_0^T u_t dB_t$, donde u_t es determinista.

III) El proceso F_t tiene como dinámica $dF_t = 2t B_t dt + 3dB_t$, que tiene deriva, con lo que no podemos expresar F_t como una integral estocástica indefinida más una media constante.

Ejercicio 78 *Considera la v.a.*

$$F_T = \int_0^T B_t^2 dt$$

- I) *Obtén la expresión de F_T como su media más una integral estocástica (Idea: Aplica Itô al proceso tB_t^2).*
- II) *Obtén la media y la varianza de F_T .*
- III) *Considera 100 v.a. independientes, $X_1, \dots, X_{100}$ con la misma distribución que F_1 . Describe razonadamente la distribución aproximada de $S_{100} = X_1 + \dots + X_{100}$.*

Solución

- i) Aplicando la fórmula de Itô al proceso tB_t^2 , se obtiene

$$\begin{aligned} d(tB_t^2) &= B_t^2 dt + 2tB_t dB_t + t dt \\ TB_T^2 &= \int_0^T B_t^2 dt + \int_0^T 2tB_t dB_t + \int_0^T t dt \end{aligned}$$

Por otra parte, como $d(B_t^2) = 2B_t dB_t + dt$, se tiene que $B_T^2 = \int_0^T 2B_t dB_t + T$. Por tanto,

$$\int_0^T B_t^2 dt = \int_0^T 2TB_t dB_t + T^2 - \int_0^T 2tB_t dB_t - \frac{T^2}{2} = \int_0^T 2(T-t) B_t dB_t + \frac{T^2}{2}$$

II)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F_T) &= \frac{T^2}{2} \\ \mathbb{V}(F_T) &= \int_0^T \mathbb{E}(2(T-t) B_t)^2 dt = \int_0^T 4(T-t)^2 t dt = \frac{T^4}{3} \end{aligned}$$

III) La variable

$$F_1 = \int_0^1 2(T-t) B_t dB_t + \frac{1}{2}$$

no es normal, ya que no se puede escribir de la forma $F_1 = \int_0^1 u(t)dB_t$, con u_t determinista. Usando el Teorema Central del Límite para las variables independientes, obtenemos la aproximación

$$S_{100} = X_1 + \dots + X_{100} \sim N\left(50, \frac{100}{3}\right)$$

Ejercicio 79 *Considera el proceso $M_t = t^2 B_t - a \int_0^t s B_s ds$, para $t \in [0, T]$.*

- I) *Obtén el valor de a para que M_t sea martingala.*
- II) *Obtén la distribución de M_T para el caso anterior. Utiliza la representación integral de variables aleatorias.*
- III) *Utilizando los resultados anteriores, explica razonadamente si puedes obtener la distribución de M_t , para cada $t \in [0, T]$. En caso afirmativo, especifícala.*

Solución

- I) Utilizando la fórmula de Itô, $dM_t = 2tB_t dt + t^2 dB_t - atB_t dt$. Para que no haya deriva, se debe cumplir que $a = 2$.

- II) Integrando por partes tenemos

$$2 \int_0^T t B_t dt = T^2 B_T - \int_0^T t^2 dB_t$$

Así,

$$M_T = T^2 B_T - T^2 B_T + \int_0^T t^2 dB_t = \int_0^T t^2 dB_t$$

Al ser t^2 determinista,

$$M_T \sim N\left(0, \int_0^T t^4 dt\right) = N\left(0, \frac{T^5}{5}\right)$$

- III) Para cualquier t en $[0, T]$,

$$M_t = \int_0^t u^2 dB_u \sim N\left(0, \frac{t^5}{5}\right)$$

Ejercicio 80 *Considera la variable $X_T = a \int_0^T e^t B_t dt + b$.*

- I) *Obtén la distribución de X_T . ¿Para qué valores de a y b tiene X_T media nula?*
- II) *Considera el proceso $X_t = a \int_0^t e^u B_u du + b$, para $t \in [0, T]$. ¿Tiene estructura de martingala? Razona tu respuesta.*

Solución

- I) Aplicamos Itô al proceso $e^t B_t$, con $f(t, x) = e^t x$. Dado que $f_t = e^t x$; $f_x = e^t$; $f_{xx} = 0$, obtenemos

$$d(e^t B_t) = e^t B_t dt + e^t dB_t$$

Por tanto, $e^T B_T = \int_0^T e^t B_t dt + \int_0^T e^t dB_t$. Despejando, se tiene

$$\int_0^T e^t B_t dt = e^T \int_0^T dB_t - \int_0^T e^t dB_t = \int_0^T (e^T - e^t) dB_t$$

En base a lo anterior, podemos escribir $X_T = a \int_0^T e^t B_t dt + b = a \int_0^T (e^T - e^t) dB_t + b$. Teniendo en cuenta la representación integral, $\mathbb{E}(X_T) = 0 \Leftrightarrow b = 0$, mientras que a puede tomar cualquier valor.

Además, al ser $(e^T - e^t)$ una función determinista, X_T es normal de media b y varianza

$$\begin{aligned} a^2 \int_0^T (e^T - e^t)^2 dt &= a^2 \int_0^T (e^{2T} + e^{2t} - 2e^{T+t}) dt \\ &= a^2 \left(\frac{2T-3}{2} e^{2T} + 2e^T - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

- II) No, ya que $dX_t = ae^t B_t dt$ corresponde a una dinámica con deriva, incompatible con la propiedad de martingala.

Ejercicio 81 *Considera dos movimientos Brownianos independientes B_t y W_t , y el proceso definido de la forma*

$$X_t = x_0 + \int_0^t B_s^2 dW_s + \int_0^t e^{W_s} dB_s$$

Obtén la expresión integral del proceso X_t^2 y el valor de su media.

Solución

Tenemos que el proceso X_t está expresado como su media y valor inicial x_0 y una integral estocástica dependiendo de un movimiento Browniano bidimensional.

Como B_t y W_t son procesos independientes, $dB_t dW_t = 0$. Utilizando la regla de Itô,

$$\begin{aligned} dX_t^2 &= 2X_t dX_t + (dX_t)^2 \\ &= 2X_t (B_t^2 dW_t + e^{W_t} dB_t) + (B_t^4 + e^{2W_t}) dt \end{aligned}$$

Además, para $X_0 = x$, podemos escribir

$$X_t^2 = x^2 + \int_0^t 2X_s B_s^2 dW_s + \int_0^t 2X_s e^{W_s} dB_s + \int_0^t (B_s^4 + e^{2W_s}) ds$$

y el valor de la media es

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t^2) &= x^2 + \int_0^t \mathbb{E}(B_s^4 + e^{2W_s}) ds \\ &= x_0^2 + \int_0^t (3s^2 + e^{2s}) ds \\ &= x_0^2 + t^3 + \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) \end{aligned}$$

Adicionalmente, vemos que este proceso no tiene estructura de martingala, ya que tiene una parte de deriva no nula y no lo podemos escribir como su media más una integral estocástica indefinida.

Black-Scholes

Ejercicio 82 *El precio de un activo financiero sigue el modelo de Black y Scholes*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

con condición inicial S_0 y tipo de interés r .

- I) *Proporciona una expresión explícita para S_t en función de t y B_t .*
- II) *Calcula el precio inicial de un derivado que en T paga $\log S_T$. Discute el resultado en función de σ y r . En particular, comenta qué sucede cuando $r = 0$ y $\sigma = 0$.*

Solución

- i) Usando el Lema de Itô para

$$f(t, B_t) = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right]$$

se puede comprobar que

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right],$$

puesto que cumple la ecuación diferencial del enunciado

$$dS_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S_t dt + \sigma S_t dB_t + \frac{\sigma^2}{2} S_t dB_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t)$$

- II) Denotemos por V_t el valor del derivado en un momento t . Bajo la medida neutral al riesgo $\mu = r$, con lo que

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{E}_Q \left(e^{-rT} \log S_T \right) = \mathbb{E}_Q \left(e^{-rT} \log \left\{ S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T \right] \right\} \right) \\ &= \mathbb{E}_Q \left(e^{-rT} \left\{ \log S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T \right\} \right) \\ &= e^{-rT} \left\{ \log S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right\} \end{aligned}$$

Cuando r y σ son nulos, $V_0 = \log S_0$. Dicho de otra forma, si no hay descuento de precios ni incertidumbre, el valor inicial coincide con el valor final, ya que $S_t = S_0$, para todo t .

Ejercicio 83 *El precio de un activo financiero sigue el modelo de Black y Scholes*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

con condición inicial S_0 y tipo de interés r .

- I) *Obtén la distribución que sigue $\log S_T$.*
 II) *Calcula el precio inicial de un derivado que en T paga 30 euros si $S_T > e^{(r-\sigma^2/2)T} S_0$ y 0 en otro caso. Discute el resultado.*

Solución

- I) $S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right)$. Por tanto,

$$\log S_T = \log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T \sim N \left(\log S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right)$$

II) Bajo la medida neutral al riesgo, $\log S_T \sim N\left(\log S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$.

Si el derivado V_T paga 30 euros cuando $S_T > e^{(r-\sigma^2/2)T} S_0$,

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{E}_Q \left(e^{-rT} 30 I \left\{ S_T > e^{(r-\sigma^2/2)T} S_0 \right\} \right) \\ &= 30 e^{-rT} P_Q \left(S_T > e^{(r-\sigma^2/2)T} S_0 \right) \\ &= 30 e^{-rT} P_Q \left(\log S_T > \log S_0 + \left(r - \sigma^2/2 \right) T \right) \\ &= 15 e^{-rT} \text{ (euros)} \end{aligned}$$

Tenemos que la probabilidad neutral al riesgo de que $S_T > e^{(r-\sigma^2/2)T} S_0$ es 0,5. Por tanto, el valor inicial de V_0 es el valor descontado de $0,5V_T$.

Ejercicio 84 *El precio de un activo financiero sigue el modelo de Black y Scholes*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

con condición inicial S_0 y tipo de interés r .

- I) *Fijada una fecha de vencimiento T , encuentra la probabilidad neutra mediante la aplicación del teorema de Girsanov y formula su densidad.*
- II) *Calcula el precio inicial de una opción rango que paga en el vencimiento T el valor $D > 0$ si $k_1 < S_T < k_2$ y 0 en otro caso.*
- III) *Valora el derivado cuando $T = 1$, $D = 2$ y el intervalo es $(1, 1,5)$. Considera que $S_0 = 1$, $\sigma = 1$ y $r = 0$.*

Solución

- I) Bajo la probabilidad neutral al riesgo Q , la densidad es

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}T - \frac{\mu-r}{\sigma}B_T}$$

II) Bajo Q , $S_T = S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T \right]$ y el valor del derivado V_t en 0 es

$$V_0 = \mathbb{E}_Q \left(e^{-rT} V_T \right) = \mathbb{E}_Q \left(e^{-rT} D \cdot I \{ S_T \in (k_1, k_2) \} \right) = e^{-rT} D \cdot P_Q (S_T \in (k_1, k_2))$$

teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} P_Q (S_T \in (k_1, k_2)) &= P_Q (k_1 < S_T < k_2) \\ &= P_Q \left(k_1 < S_0 \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma B_T \right] < k_2 \right) \end{aligned}$$

Esta probabilidad se obtiene como

$$\begin{aligned} &P_Q \left(\frac{k_1}{S_0} \exp \left[\left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] < \exp [\sigma B_T] < \frac{k_2}{S_0} \exp \left[\left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] \right) \\ &= P_Q \left(\frac{1}{\sigma} \log \frac{k_1}{S_0} + \frac{T}{\sigma} \left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) < B_T < \frac{1}{\sigma} \log \frac{k_2}{S_0} + \frac{T}{\sigma} \left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \\ &= P_Q \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \log \frac{k_1}{S_0} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) < \frac{B_T}{\sqrt{T}} < \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \log \frac{k_2}{S_0} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \\ &= \Phi \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \log \frac{k_2}{S_0} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) - \Phi \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \log \frac{k_1}{S_0} + \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \left(-r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

III) Sustituyendo los valores en la expresión del apartado anterior, se obtiene que el valor inicial del derivado es

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} D \cdot P_Q (S_T \in (k_1, k_2)) \\ &= 2 (\Phi (0,5 + \log(1,5)) - \Phi (0,5 + \log(1))) \\ &= 2 (\Phi (0,9054) - \Phi (0,5)) \\ &= 2(0,8173 - 0,6914) = 0,2518 \end{aligned}$$

Ejercicio 85 *El precio de un activo financiero sigue el modelo de Black y Scholes*

$$\frac{dS_t}{S_t} = dt + 0,5dB_t$$

con condición inicial $S_0 = 100$ y $r = 1$. Calcula el precio en el instante inicial de un derivado que produce en T un beneficio igual a $\sqrt{S_T}$.

Solución

El proceso que sigue el precio del activo es

$$S_t = 100e^{(1-\frac{1}{2^3})t+\frac{1}{2}B_t} = 100e^{\frac{7}{8}t+\frac{1}{2}B_t}$$

y el precio del derivado en el instante inicial es

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q \left(\sqrt{S_T} \right) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q \left(\sqrt{S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma B_T}} \right) \\ &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q \left(S_0^{1/2} e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\frac{\sigma}{2}B_T} \right) \\ &= e^{-rT} S_0^{1/2} e^{\frac{1}{2}(r-\frac{\sigma^2}{2})T} \mathbb{E}_Q \left(e^{\frac{\sigma}{2}B_T} \right) \\ &= \sqrt{S_0} e^{(-\frac{r}{2}-\frac{\sigma^2}{8})T} = 10e^{-\frac{17}{32}T} \end{aligned}$$

Ejercicio 86 *El precio de un activo financiero sigue el modelo de Black y Scholes*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

con condición inicial S_0 . Calcula el precio V_0 en el instante inicial de un derivado con un valor final igual a S_T . Explica la lógica del resultado.

Solución

Bajo la probabilidad neutral al riesgo, $S_t = S_0 \exp((r - \sigma/2)t + \sigma B_t)$, con lo que el precio inicial del derivado es

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q(S_T) \\ &= e^{-rT} S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T} \mathbb{E}_Q(e^{\sigma B_T}) \\ &= e^{-rT} S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T} e^{(\sigma^2/2)T} = S_0 \end{aligned}$$

Lógicamente, en ausencia de oportunidades de arbitraje, un derivado que paga exactamente S_T en el instante T , tiene el mismo valor final que el propio activo, con lo que su valor inicial ha de ser también el mismo, $V_0 = S_0$.

Ejercicio 87 *Considera un activo cuyos precios en el tiempo siguen un geométrico browniano de la forma*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

- I) *Expresa el precio del activo en cada instante S_t como función de t y de B_t . Comprueba que, si $u < t$,*

$$E(e^{-rt}S_t|\mathcal{F}_u) \neq e^{-ru}S_u$$

salvo en el caso en que $\mu = r$.

- II) *Obtén el valor en el instante inicial de un derivado que en T paga $h = S_T^{3/2}$.*

- III) *Idem para el derivado que paga una unidad si el activo al vencimiento ha superado el valor e^{rT} y 0 en caso contrario.*

Solución

- I) El precio del activo viene dado por

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-rt}S_t|\mathcal{F}_u) &= \mathbb{E}\left(e^{-rt}S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}|\mathcal{F}_u\right) \\ &= \mathbb{E}\left(S_0 e^{(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}|\mathcal{F}_u\right) \\ &= e^{(\mu - r)t} \mathbb{E}\left(S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t}|\mathcal{F}_u\right) \\ &= e^{(\mu - r)t} S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}u + \sigma B_u} \\ &= e^{(\mu - r)t} e^{-ru} S_u = e^{-ru} S_u \Leftrightarrow \mu = r \end{aligned}$$

II) El valor del derivado en $t = 0$ es

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_Q(e^{-rT}h) &= \mathbb{E}_Q(e^{-rT}S_T^{3/2}) = \mathbb{E}_Q\left(e^{-rT}S_0^{3/2}e^{\frac{3}{2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\frac{3}{2}\sigma B_T}\right) \\
 &= \mathbb{E}_Q\left(S_0^{3/2}e^{\left(\frac{1}{2}r-\frac{3\sigma^2}{4}\right)T+\frac{3}{2}\sigma B_T}\right) \\
 &= S_0^{3/2}e^{\left(\frac{1}{2}r-\frac{3\sigma^2}{4}\right)T}\mathbb{E}_Q\left(e^{\frac{3}{2}\sigma B_T}\right) \\
 &= S_0^{3/2}e^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{3\sigma^2}{8}\right)T}
 \end{aligned}$$

III) En este caso,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_Q(e^{-rT}h) &= \mathbb{E}_Q(e^{-rT}I(S_T > e^{rT})) = e^{-rT}P(S_T > e^{rT}) \\
 &= e^{-rT}P(S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma B_T} > e^{rT}) \\
 &= e^{-rT}S_0P\left(rT - \frac{\sigma^2}{2}T + \sigma B_T > rT\right) \\
 &= e^{-rT}S_0P\left(\sigma B_T > \frac{\sigma^2}{2}T\right) \\
 &= e^{-rT}S_0P\left(B_T > \frac{\sigma}{2}T\right) \\
 &= e^{-rT}S_0\left(1 - \Phi\left(\frac{\sigma}{2}T^{1/2}\right)\right)
 \end{aligned}$$

Ejercicio 88 *Consideremos un activo financiero que sigue la dinámica de precios $S_t = S_0 \exp(\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t)$, donde B_t es un movimiento browniano y σ y μ son constantes. Sea una cartera autofinanciada formada por α_t unidades de activo seguro y β_t unidades de S_t . ¿Qué proceso sigue dicha cartera?*

Solución

Denotando por ϕ la cartera descrita en el enunciado, su rendimiento viene determinado por $V_t(\phi) = \alpha_t e^{rt} + \beta_t S_t$. Entonces, utilizando el lema de Itô (considera $f(t, x) = \alpha_t e^{rt} + \beta_t x$) y teniendo en cuenta que, al ser una cartera autofinanciada, es balanceada y, por tanto, $e^{rt}d\alpha_t + S_t d\beta_t = 0$, obtenemos

$$dV_t(\phi) = e^{rt}d\alpha_t + \alpha_t r e^{rt}dt + S_t d\beta_t + \beta_t dS_t = \alpha_t r e^{rt}dt + \beta_t dS_t$$

Si consideramos el valor actualizado de la cartera, $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, tenemos que $\tilde{V}_t(\phi) = \alpha_t + \beta_t\tilde{S}_t$, y se cumple

$$d\tilde{V}_t(\phi) = d\alpha_t + \tilde{S}_t d\beta_t + \beta_t d\tilde{S}_t = \beta_t d\tilde{S}_t$$

Ejercicio 89 *Considera un activo cuyos precios en el tiempo siguen un geométrico browniano de la forma*

$$\frac{dS_t}{S_t} = 0,2dt + 0,3dB_t$$

- I) *Expresa el precio del activo S_t en cada instante como función de t y de B_t .*
- II) *Obtén el precio en el instante inicial de un derivado que produce una liquidación en T igual a $S_T^3 + 2$.*
- III) *Calcula dicho precio para $T = 2$, $r = 0,05$ y $S_0 = 1$.*

Solución

I)

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right) = S_0 \exp\left(\left(0,2 - \frac{0,09}{2}\right)t + 0,3B_t\right)$$

II) En función de la medida neutral al riesgo, tenemos que, de forma general,

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 V_0 &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q (S_T^3 + 2 | S_0) \\
 &= e^{-rT} \mathbb{E}_Q \left(S_0^3 \exp \left(3 \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + 3\sigma B_T \right) | S_0 \right) + 2e^{-rT} \\
 &= S_0^3 \exp \left(3 \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T - rT \right) \mathbb{E}_Q (\exp (3\sigma B_T) | S_0) + 2e^{-rT} \\
 &= S_0^3 \exp \left((2r - 3\sigma^2/2) T \right) \exp (9\sigma^2 T/2) + 2e^{-rT} \\
 &= S_0^3 \exp \left((2r + 3\sigma^2) T \right) + 2e^{-rT}
 \end{aligned}$$

III) Sustituyendo los valores en la expresión del apartado anterior,

$$V_0 = \exp \left((0,1 + 3 \cdot 0,3^2) 2 \right) + 2e^{-0,05 \cdot 2} = 3,905$$

Bibliografía

- [1] A. Etheridge. *A Course in Financial Calculus*. Cambridge University Press, 2002.
- [2] G. Grimmet and D. Stirzaker. *Probability and Random Processes*. Oxford University Press, 2001.
- [3] I. Karatzas and S. E. Schreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 1991.
- [4] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, 1998.
- [5] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*. Chapman and Hall, 1996.
- [6] T. Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus*. World Scientific, 2000.
- [7] Steve Selvin. Monty hall problem. *American Statistician*, 29(3):134–134, 1975.
- [8] S. E. Shreve. *Stochastic calculus for finance*. Springer, 2004.