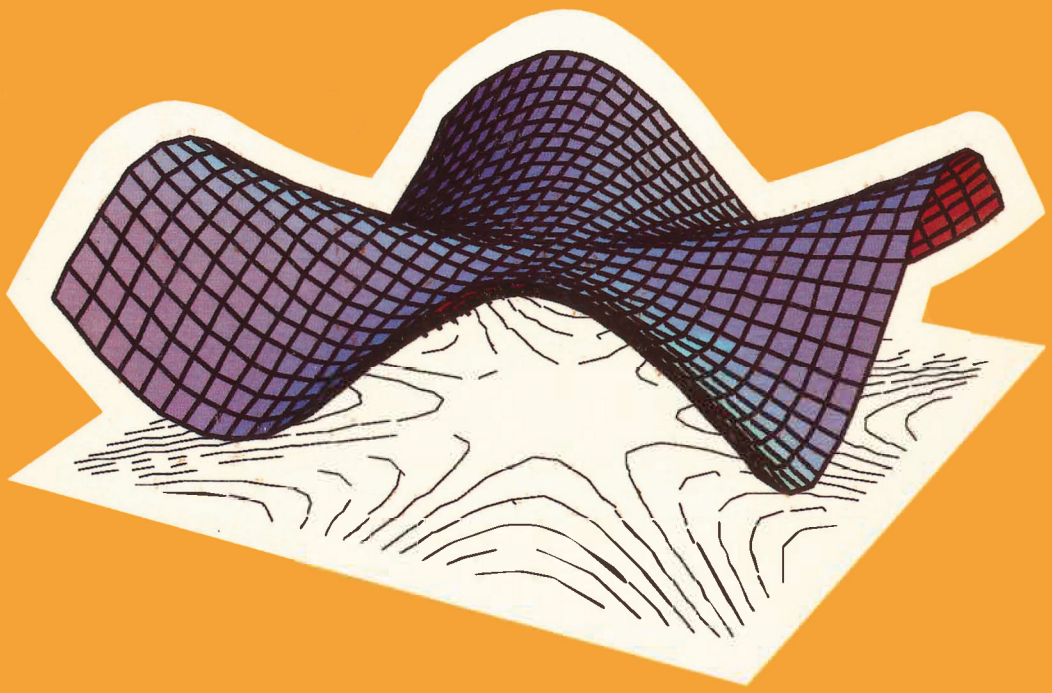
LECCIONES BÁSICAS DE ÁLGEBRA LINEAL



J. L. MALAINA - A. GALLEGO
M. L. GONZÁLEZ - E. MARTÍN

Servicio Editorial
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

Argitarapen Zerbitzua
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

LECCIONES BASICAS
DE
ALGEBRA LINEAL

LECCIONES BASICAS
DE
ALGEBRA LINEAL

J.L. Malaina
A. Gallego
M.L. González
E. Martín

Bilbao

SERVICIO EDITORIAL
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ARGITARAPEN ZERBITZUA
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

1995

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

Lecciones básicas de álgebra lineal [Recurso electrónico] /J.L. Malaina ... [et al.]. – Datos. – [Leioa] : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2026]. – 1 recurso en línea: PDF (514 p.)
Ed. electrónica de la ed. impresa (1995)
Modo de acceso: World Wide Web.
ISBN: 978-84-1319-754-8

1.Álgebra lineal. 2. Geometría. I. Malaina Ríos, José Luis, coaut.

(0.034)512.64

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

Argitalpen Zerbitzua• Servicio Editorial
editorial@ehu.eus • 94 601 2227
www.ehu.eus/argitalpenak
Edificio Biblioteca, 1.ª planta
B.º Sarriena s/n. Campus de Bizkaia

ISBN: 978-84-1319-754-8

Indice

Introducción 11

Tema 1. **Espacios vectoriales** 13

1. Estructura de espacio vectorial 13
2. Combinaciones lineales 16
3. Subespacios vectoriales 20
4. Subespacio vectorial engendrado por una parte finita de un espacio vectorial . 25
5. Suma de subespacios vectoriales. Suma directa 29
6. Dependencia e independencia lineal 43
7. Bases y dimensión de un espacio vectorial 52
8. Coordenadas de un vector 56
9. Dimensión de un subespacio vectorial 56
10. Rango de un sistema de vectores 61

Tema 2. **Matrices** 71

1. Matrices 71
2. Suma o adición de matrices. Producto de un escalar por una matriz 73
3. Producto de matrices 77
4. Potencias naturales o potencias de exponente entero positivo de matrices cuadradas 83
5. Trasposición de matrices. Matriz traspuesta 88
6. Conjugación de una matriz compleja. Matriz conjugada 91
7. Conjugación-trasposición de una matriz compleja. Matriz asociada 92

Tema 3. **Determinantes** 97

1. Determinante de una matriz cuadrada 97
2. Propiedades fundamentales de los determinantes 99
3. Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila o columna 104
4. Menores de una matriz. Rango o característica de una matriz 112
5. Matrices equivalentes por filas 117

Tema 4. **Matrices inversibles** 127

1. Matrices singulares. Matrices regulares 127
2. Matrices inversibles 127
3. Matriz adjunta 128
4. Propiedades relativas a las matrices inversibles o regulares 137
5. Potencias de exponente entero de matrices regulares 138
6. Matrices ortogonales. Propiedades relativas a las matrices ortogonales 141
7. Matrices unitarias. Propiedades relativas a las matrices unitarias 144
8. Aplicación del cálculo matricial a los cambios de base en un espacio vectorial . 146

Tema 5. **Sistemas lineales** 155

1. Sistemas de ecuaciones lineales 155
2. Sistemas equivalentes. Teorema fundamental de la equivalencia 159
3. Teorema de ROUCHE-FROBENIUS 161
4. Sistemas de CRAMER 164
5. Método de GAUSS 173

Tema 6. **Espacios vectoriales euclídeos** 189

1. Producto escalar. Espacio vectorial euclídeo 189
2. Norma euclídea 191
3. Expresión matricial de un producto escalar 200
4. Ortogonalidad en espacios vectoriales euclídeos 202
5. Sistemas ortogonales y sistemas ortonormales. Proceso de ortogonalización de GRAM-SCHMIDT 207
6. Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio vectorial 223
7. Aproximación lineal en espacios vectoriales euclídeos 226
8. Solución aproximada de un sistema de ecuaciones lineales 234

Tema 7. **Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Matrices cuadradas diagonizables** 239

1. Valores y vectores propios de una matriz cuadrada 239
2. Propiedades de los valores propios. Subespacios propios 240
3. Teorema de CAYLEY-HAMILTON 244
4. Polinomio mínimo de una matriz cuadrada 248
5. Matrices cuadradas diagonizables 251
6. Diagonalización de matrices cuadradas reales simétricas 264

Tema 8. **Formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$** 273

1. Formas bilineales en $\mathbb{R}^n$. Expresión matricial 273
2. Formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ 274
3. Expresión matricial de una forma cuadrática 275
4. Diagonalización ortogonal de una forma cuadrática. Descomposición en suma de cuadrados 278
5. Clasificación de las formas cuadráticas 285

Tema 9. **El plano afín ordinario** 293

1. El plano afín ordinario 293
2. Sistemas de referencia cartesianos. Coordenadas de un punto 294
3. Rectas en el plano afín ordinario 295
4. Ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesiana de una recta en el plano afín ordinario 296
5. Paralelismo de rectas en el plano afín ordinario 299
6. Posiciones relativas de dos rectas en el plano afín ordinario 300
7. Haz de rectas 301
8. El plano afín euclídeo ordinario 303
9. Sistemas de referencia en el plano afín euclídeo ordinario 304
10. Ortogonalidad en el plano afín euclídeo ordinario 305
11. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta. Distancia de un punto a una recta 307
12. Distancia entre dos rectas 312
13. Angulos en el plano afín euclídeo ordinario 314

Tema 10. **Curvas en el plano afín ordinario** 317

1. Curvas en el plano afín ordinario 317
2. Estudio general de las cónicas 318
3. Definición métrica de las cónicas no degeneradas 334

Tema 11. **El espacio afín ordinario** 347

1. El espacio afín ordinario 347
2. Sistemas de referencia cartesianos. Coordenadas de un punto 348
3. Rectas y planos en el espacio afín ordinario 348
4. Ecuaciones vectorial, paramétricas y cartesiana de rectas y planos en el espacio afín ordinario 349
5. Paralelismo de rectas y planos en el espacio afín ordinario 356
6. Posiciones relativas de recta y plano en el espacio afín ordinario 358
7. Posiciones relativas de dos planos en el espacio afín ordinario 360
8. Haz de planos 361
9. El espacio afín euclídeo ordinario 363
10. Sistemas de referencia en el espacio afín euclídeo ordinario 364
11. Ortogonalidad en el espacio afín euclídeo ordinario 365
12. Proyección ortogonal de un punto sobre un subespacio afín del espacio afín euclídeo ordinario. Distancia de un punto a un subespacio afín 367
13. Distancia entre dos subespacios afines paralelos 371
14. Distancia entre dos rectas que se cruzan 373
15. Angulos en el espacio afín euclídeo ordinario 376

Tema 12. **Curvas y superficies en el espacio afín ordinario** 385

1. Curvas y superficies en el espacio afín ordinario 385
2. Superficies cilíndricas 387
3. Superficies cónicas 391
4. Superficies conoides 396

5. Superficies regladas 399
6. Superficies de revolución 399
7. Superficies de traslación 403
8. Cuádricas 406

Apéndice I. **Generalidades sobre teoría de conjuntos y estructuras algebraicas** . 429

1. Conjuntos 429
2. Aplicaciones 435
3. Leyes de composición y estructuras algebraicas 441

Apéndice II. **Aplicaciones lineales** 451

1. Aplicaciones lineales 451
2. Núcleo de una aplicación lineal 457
3. Imagen de una aplicación lineal 460
4. Relación entre las dimensiones del núcleo y de la imagen de una aplicación lineal . 463
5. Rango de una aplicación lineal 465
6. Determinación y existencia de aplicaciones lineales 468
7. Matriz de una aplicación lineal 477
8. Aplicación lineal asociada a una matriz. 482

Apéndice III. **Nociones básicas sobre análisis matricial y sistemas dinámicos continuos** 489

1. Nociones básicas sobre análisis matricial 489
2. Nociones básicas sobre sistemas dinámicos continuos 500

Bibliografía 511

Introducción

El Algebra Lineal es una teoría matemática que se elabora a partir de la noción de espacio vectorial o lineal. La aplicación de la estructura de espacio vectorial es tan útil y polivalente que no hay prácticamente rama de la Ingeniería y de la Ciencia en general que no se vea beneficiada con su utilización. Y así, es frecuente ver cómo muchas obras de interés en áreas técnicas tan dispares como cálculo de estructuras mecánicas, mecánica de fluidos, teoría de circuitos eléctricos, automática, físico-química..., se configuran con sendas introducciones, o quizás apéndices, en donde recuerdan elementos de Algebra Lineal suficientes para el desarrollo de la obra.

La noción de espacio vectorial puede ser considerada como una prolongación natural de la estructura vectorial (magnitudes dirigidas) de tres dimensiones tan invocada y utilizada por la física clásica, pero el gran interés del concepto abstracto de espacio vectorial está en que en el marco de esta estructura algebraica pueden estudiarse, respecto de leyes de composición adecuadas, espacios tan dispares y útiles para la Ingeniería y Ciencia en general, como los espacios R^n y C^n, el espacio de las funciones y el espacio de las matrices entre otros.

Elementos de Algebra Lineal son indispensables en el desarrollo de ramas de la matemática de gran interés para un ingeniero como el cálculo diferencial e integral, la teoría de ecuaciones diferenciales, los métodos numéricos de computación, la programación lineal, la programación dinámica, la teoría de sistemas dinámicos..., siendo frecuente que las obras sobre dichas materias recogen en su programa contenidos de Algebra Lineal.

Por otro lado el Algebra Lineal permite presentar a la Geometría como una prolongación natural suya, pudiéndose así desarrollar con precisión la teoría de espacios afines y espacios euclídeos que recogen y generalizan

las propiedades geométricas del espacio tridimensional en el estamos inmersos.

En la obra que presentamos hemos recogido aquellos elementos necesarios para una formación básica en Algebra Lineal y Geometría, siendo conscientes que ello comporta un buen número de elecciones (incluir una materia, suprimir o destacar otra, encadenar las materias de una determinada forma, etc.). No obstante los temas de la obra están orientados a la formación integral del alumno, no incluyendo teorías más particulares y pretendiendo abarcar un amplio espectro de conceptos básicos y métodos fundamentales, procurando incluir los tópicos necesarios para otras disciplinas.

Destacamos también que no nos hemos limitado a una exposición teórica, sino que a lo largo de los distintos temas hemos resuelto un buen número de ejercicios, adjuntando asimismo algunos apéndices de interés.

Esta obra nace de la revisión de la obra del mismo título que publicamos en 1984. En la citada revisión hemos reordenado, reformulado e incluso suprimido algunas cuestiones atendiendo a nuestra experiencia en el ejercicio de la docencia universitaria y a las sugerencias de Estudiantes y Profesores a lo largo de estos últimos diez años.

Los autores
Bilbao, Primavera de 1995

Tema I

Espacios vectoriales

1. ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL

Sea un cuerpo conmutativo K y representemos por 0 (respectivamente 1) al elemento nulo (respectivamente elemento unidad).

Consideremos un conjunto V dotado de una ley de composición interna (+) y una ley de composición externa (.) con dominio de operadores K.

Definición 1.1

Se dice que V tiene estructura de espacio vectorial sobre K o que V es un K-espacio vectorial si:

i) V tiene estructura de grupo abeliano respecto de la ley de composición interna (+).

ii) Respecto de la ley de composición externa (.) se cumplen los siguientes axiomas:

a)	$\forall \alpha, \beta \in K$	$\forall x \in V$	$(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x$
b)	$\forall \alpha \in K$	$\forall x, y \in V$	$\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$
c)	$\forall \alpha, \beta \in K$	$\forall x \in V$	$\alpha . (\beta . x) = (\alpha . \beta) . x$
d)	$\forall x \in V$		$1 . x = x$

Hacemos notar que hemos utilizado los signos (+) y (.) para representar también a las leyes de composición interna definidas en K.

A los elementos x, y, z, ... de un K-espacio vectorial V les denominaremos «vectores» y los denotaremos $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, ...

Al elemento neutro del grupo abeliano V respecto de la ley de composición interna (+), se le denomina «vector nulo» y se le representa por $\overline{0}$.

Al elemento simétrico de un vector $\overline{x} \in V$ respecto de la ley de composición interna (+), se le denomina «vector opuesto de $\overline{x}$» y se le representa por $-\overline{x}$.

A los elementos α, β, γ, ... del cuerpo conmutativo K se les denomina «escalares».

Proposición 1.1

Dado un K-espacio vectorial V, resulta que:

1.º)	$\forall \alpha \in K$	$\forall \overline{x}, \overline{y} \in V$	$\alpha . (\overline{x} - \overline{y}) = \alpha . \overline{x} - \alpha . \overline{y}$
2.º)	$\forall \alpha, \beta \in K$	$\forall \overline{x} \in V$	$(\alpha - \beta) . \overline{x} = \alpha . \overline{x} - \beta . \overline{x}$
3.º)	$\forall \alpha \in K$		$\alpha . 0 = 0$
4.º)	$\forall \overline{x} \in V$		$0 . \overline{x} = 0$
5.º)	$\forall \alpha \in K$	$\forall \overline{x} \in V$	$\alpha . (-\overline{x}) = -\alpha . \overline{x}$
6.º)	$\forall \alpha \in K$	$\forall \overline{x} \in V$	$\alpha . \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \overline{x} = \overline{0}$
7.º)	$\forall \overline{x} \in V - \{\overline{0}\}$		$\alpha . \overline{x} = \beta . \overline{x} \Rightarrow \alpha = \beta$
8.º)	$\forall \alpha \in K - \{0\}$	$\forall \overline{x} \in V$	$\alpha . \overline{x} = \alpha . \overline{y} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$

Demostración

1.º) $\alpha . \overline{x} = \alpha [(\overline{x} - \overline{y}) + \overline{y}] = \alpha . (\overline{x} - \overline{y}) + \alpha . \overline{y} \Rightarrow \alpha . \overline{x} - \alpha . \overline{y} = \alpha . (\overline{x} - \overline{y})$

2.º) $\alpha . \overline{x} = [(\alpha - \beta) + \beta] . \overline{x} = (\alpha - \beta) . \overline{x} + \beta . \overline{x} \Rightarrow \alpha . \overline{x} - \beta . \overline{x} = (\alpha - \beta) . \overline{x}$

3.º) $\alpha . \overline{0} = \alpha . (\overline{x} - \overline{x}) = \alpha . \overline{x} - \alpha . \overline{x} = \overline{0}$

4.º) $0 . \overline{x} = (\alpha - \alpha) . \overline{x} = \alpha . \overline{x} - \alpha . \overline{x} = 0$

5.º) $\alpha . (-\overline{x}) = \alpha . (\overline{0} - \overline{x}) = \alpha . \overline{0} - \alpha . \overline{x} = \overline{0} - \alpha . \overline{x} = -\alpha . \overline{x}$
$(-\alpha) . \overline{x} = (0 - \alpha) . \overline{x} = 0 . \overline{x} - \alpha . \overline{x} = 0 - \alpha . \overline{x} = -\alpha . \overline{x}$

6.º) Si $\alpha = 0$ la propiedad se cumple trivialmente.
Si $\alpha \in K - \{0\}$ existe $\alpha^{-1} \in K - \{0\}$ y tendremos:
$\alpha . \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow \alpha^{-1} (\alpha . \overline{x}) = \alpha^{-1} . \overline{0} \Rightarrow (\alpha^{-1} . \alpha) . \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow 1 . \overline{x} = 0$
$\Rightarrow \overline{x} = 0$

7.º) $\alpha . \overline{x} = \beta . \overline{x} \Rightarrow \alpha . \overline{x} - \beta . \overline{x} = \overline{0} \Rightarrow (\alpha - \beta) . \overline{x} = \overline{0} \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha - \beta = 0$
$\Rightarrow \alpha = \beta$

— La implicación (1) se deduce considerando que $\overline{x} \neq 0$ y el apartado 6.º).

8.º) $\alpha \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{y} \Rightarrow \alpha \cdot \overline{x} - \alpha \cdot \overline{y} = 0 \Rightarrow \alpha\,(\overline{x} - \overline{y}) = \overline{0} \overset{(*)}{\Rightarrow} \overline{x} - \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$

— La implicación (2) se deduce considerando que $\alpha \neq 0$ y el apartado 6.º).

Ejemplos

1.º) El conjunto V de los vectores libres del plano ordinario (respectivamente espacio ordinario) es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial respecto de la ley de composición interna (+) «suma o adición de vectores libres» y la ley de composición externa (.) «producto de un número real por un vector libre». El vector nulo $\overline{0}$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es el vector libre $\overline{0}$ de módulo cero.

2.º) Sea un cuerpo conmutativo K respecto de las leyes de composición interna (+) y (.).

El cuerpo conmutativo K es un K-espacio vectorial respecto de la ley de composición interna (+) y la ley (.) considerada como ley de composición externa con dominio de operadores K. El vector nulo $\overline{0}$ del K-espacio vectorial K es el elemento nulo 0 del cuerpo conmutativo K.

Son particularmente interesantes el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}$ y el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}$.

3.º) Sea un cuerpo conmutativo K respecto de las leyes de composición interna (+) y (.).

En el conjunto producto cartesiano K^n definimos la ley de la composición interna (+) y la ley de composición externa (.) con dominio de operadores K siguientes:

$$\forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in K^n,\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\forall \alpha \in K \quad \forall\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n \quad \alpha \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

El conjunto K^n es un K-espacio vectorial respecto de las leyes que acabamos de definir. El vector nulo $\overline{0}$ del K-espacio vectorial K^n es la n-tupla $(0, 0, \overset{n}{\ldots}, 0)$ en donde 0 es el elemento nulo del cuerpo conmutativo K.

Son particularmente interesantes el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^n$.

4.º) Sea un cuerpo conmutativo K respecto de las leyes de composición interna (+) y (.).

El conjunto $\mathcal{P}_n$ de los polinomios de grado menor o igual que n en la variable x y coeficientes en K, es un K-espacio vectorial respecto de la ley de composición interna (+) «suma o adición de polinomios» y la ley de composición externa (.) «producto de un escalar por un polinomio». El vector nulo $\overline{0}$ del K-espacio vectorial $\mathcal{P}_n$ es el polinomio $0 \cdot x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots + 0 \cdot x + 0 = 0$ en donde 0 es el elemento nulo del cuerpo conmutativo K.

5.º) Sea el conjunto $\mathcal{F}$ de las funciones de $D \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Definimos la suma de dos funciones cualesquiera $f, g \in \mathcal{F}$ como la función $f + g \in \mathcal{F}$ definida por:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in D$$

Análogamente. definimos el producto de un escalar cualquiera $\alpha \in \mathbb{R}$ por una función $f \in \mathcal{F}$ como la función $\alpha \cdot f \in \mathcal{F}$ definida por:

$$(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x) \qquad \forall x \in D$$

De esta manera quedan definidas en $\mathcal{F}$ una ley de composición interna (+) «suma de funciones» y una ley de composición externa (.) «producto de un escalar por una función» con dominio de operadores $\mathbb{R}$.

El conjunto $\mathcal{F}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial respecto de dichas leyes de composición. El vector nulo $\overline{0}$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}$ es la función $f_o \in \mathcal{F}$ definida por:

$$f_o(x) = 0 \qquad \forall x \in D$$

2. COMBINACIONES LINEALES

Sea un K-espacio vectorial V y consideramos n vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n \in V$.

Definición 2.1

Se dice que un vector $\overline{x} \in V$ es una combinación lineal de los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ si existen n escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tal que

$$\overline{x} = \alpha_1 \cdot \overline{u}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{u}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{u}_n \text{ (abreviadamente } \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{u}_i)$$

Proposición 2.1

Si $\bar{x} \in V$ es combinación lineal de los vectores del sistema $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ y cada vector $\bar{u}_i$ es combinación lineal de los vectores del sistema $G = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m\}$, entonces el vector $\bar{x}$ es combinación lineal de los vectores del sistema G.

Demostración

Como $\bar{x}$ es combinación lineal de los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n$ tenemos que:

$$\exists\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \quad / \quad \bar{x} = \alpha_1 \cdot \bar{u}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{u}_2 + ... + \alpha_n \cdot \bar{u}_n \qquad (1)$$

Análogamente, como cada $\bar{u}_i$ es combinación lineal de los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m$ resulta que:

$$\exists\, \beta_{i1}, \beta_{i2}, ..., \beta_{im} \in K \quad / \quad \bar{u}_i = \beta_{i1} \cdot \bar{v}_1 + \beta_{i2} \cdot \bar{v}_2 + ... + \beta_{im} \cdot \bar{v}_m \qquad (2)$$

Considerando (1) y (2) tenemos que:

$$\begin{aligned}\bar{x} = {} & \alpha_1 (\beta_{11} \cdot \bar{v}_1 + \beta_{12} \cdot \bar{v}_2 + ... + \beta_{1m} \cdot \bar{v}_m) + \alpha_2 (\beta_{21} \cdot \bar{v}_1 + \beta_{22} \cdot \bar{v}_2 + ... + \\ & + \beta_{2m} \cdot \bar{v}_m) + ... + \alpha_n (\beta_{n1} \cdot \bar{v}_1 + \beta_{n2} \cdot \bar{v}_2 + ... + \beta_{nm} \cdot \bar{v}_m) = (\alpha_1 \beta_{11} + \\ & + \alpha_2 \beta_{21} + ... + \alpha_n \beta_{n1}) \cdot \bar{v}_1 + (\alpha_1 \beta_{12} + \alpha_2 \beta_{22} + ... + \alpha_n \beta_{n2}) \cdot \bar{v}_2 + ... + \\ & + (\alpha_1 \beta_{1m} + \alpha_2 \beta_{2m} + ... + \alpha_n \beta_{nm}) \cdot \bar{v}_m\end{aligned}$$

De donde, denotando $\delta_j = \alpha_1 \beta_{1j} + \alpha_2 \beta_{2j} + ... + \alpha_n \beta_{nj}$ para $j = 1, 2, ..., m$ obtenemos:

$$\bar{x} = \delta_1 \cdot \bar{v}_1 + \delta_2 \cdot \bar{v}_2 + ... + \delta_m \cdot \bar{v}_m$$

en donde $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_m \in K$. Por tanto $\bar{x}$ es una combinación lineal de $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m$.

Observación

Lo expuesto en la demostración se escribe abreviadamente en la forma:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \bar{u}_i \qquad \bar{u}_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \cdot \bar{v}_j$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \cdot \bar{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_{ij} \cdot \bar{v}_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} \cdot \bar{v}_j = \sum_{j=1}^{m} \delta_j \cdot \bar{v}_j$$

Ejercicio 1

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y consideremos los vectores de $\mathbb{R}^3$: $\bar{x} = (1, -1, 3)$ $\bar{y} = (0, 1, 0)$ $\bar{z} = (2, \lambda, 1)$ $\bar{u}_1 = (1, 1, 1)$ $\bar{u}_2 = (1, 2, 0)$ en donde λ es un parámetro que toma valores reales.

1.º) Demostrar que $\bar{x}$ es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$.
2.º) Probar que $\bar{y}$ no es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$.
3.º) Hallar λ de tal forma que $\bar{z}$ sea combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$.

Solución:

1.º) $\bar{x}$ combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2 \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \,/\, \bar{x} = \alpha_1 \,.\, \bar{u}_1 + \alpha_2 \,.\, \bar{u}_2$

$$\bar{x} = \alpha_1 \,.\, \bar{u}_1 + \alpha_2 \,.\, \bar{u}_2 \Leftrightarrow (1, -1, 3) = \alpha_1 \,.\, (1, 1, 1) + \alpha_2 \,.\, (1, 2, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -1 \\ \alpha_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2 \end{cases}$$

Según esto, $\bar{x}$ es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ pues existen escalares $\alpha_1 = 3 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_2 = -2 \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{x} = 3 \,.\, \bar{u}_1 - 2 \,.\, \bar{u}_2$.

2.º) $\bar{y}$ no es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2 \Leftrightarrow \nexists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \,/\, \bar{y} = \alpha_1 \,.\, \bar{u}_1 + \alpha_2 \,.\, \bar{u}_2$.

$$(1)\ \bar{y} = \alpha_1 \,.\, \bar{u}_1 + \alpha_2 \,.\, \bar{u}_2 \Leftrightarrow (0, 1, 0) = \alpha_1 \,.\, (1, 1, 1) + \alpha_2 \,.\, (1, 2, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1 \quad (2) \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Como el sistema (2) es incompatible, resulta que no existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ que verifiquen la expresión vectorial (1) y en consecuencia $\bar{y}$ no es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$.

3.º) $\bar{z}$ es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2 \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \,/\, \bar{z} = \alpha_1 \,.\, \bar{u}_1 + \alpha_2 \,.\, \bar{u}_2$.

$$\bar{z} = \alpha_1 \,.\, \bar{u}_1 + \alpha_2 \,.\, \bar{u}_2 \Leftrightarrow (2, \lambda, 1) = \alpha_1 \,.\, (1, 1, 1) + \alpha_2 \,.\, (1, 2, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = \lambda \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Según esto:

Si $\lambda = 3$, el vector $\bar{z} = (2, 3, 1)$ es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ pues existen escalares $\alpha_1 = 1 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_2 = 1 \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{z} = 1 \,.\, \bar{u}_1 + 1 \,.\, \bar{u}_2 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$.

Si $\lambda \in \mathbb{R} - (3)$, el vector $\bar{z} = (2, \lambda, 1)$ no es combinación lineal de $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ pues no existen escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{z} = \alpha_1 \,.\, \bar{u}_1 + \alpha_2 \,.\, \bar{u}_2$.

Ejercicio 2

Seal el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}$ de las funciones $[0, 2) \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y consideremos las funciones $f_1, f_2, f_3, g \in \mathcal{F}$ definidas por:

$$\forall x \in [0, 2) \quad f_1(x) = 1 - x \quad f_2(x) = |1 - x| \quad f_3(x) = E(x) \quad g(x) = x \,.\, E(x)$$

Demostrar que g es combinación lineal de f_1, f_2 y f_3.

Solución:

g combinación lineal de f_1, f_2 y $f_3 \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ /

$$g = \alpha_1 \,.\, f_1 + \alpha_2 \,.\, f_2 + \alpha_3 \,.\, f_3 \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = \alpha_1 \,.\, f_1(x) + \alpha_2 \,.\, f_2(x) + \alpha_3 \,.\, f_3(x) \quad \forall x \in [0, 2) \Leftrightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \,/\, x \,.\, E(x) = \alpha_1 \,.\, (1 - x) + \alpha_2 \,.\, |1 - x| + \alpha_3 \,.\, E(x) \quad \forall x \in [0, 2)$$

$$x \,.\, E(x) = \alpha_1 \,.\, (1 - x) + \alpha_2 \,.\, |1 - x| + \alpha_3 \,.\, E(x) \quad \forall x \in [0, 2) \Leftrightarrow$$

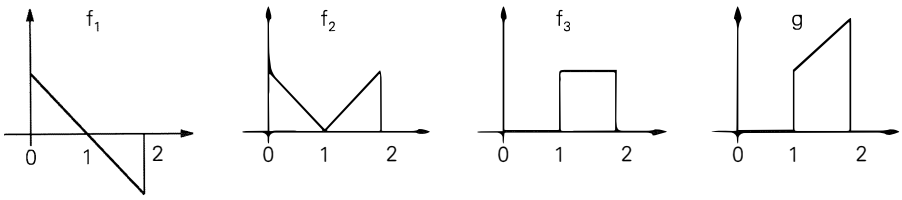
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha_1 \,.\, (1 - x) + \alpha_2 \,.\, (1 - x) & \forall x \in [0, 1) \\ 1 = \alpha_3 \\ x = \alpha_1 \,.\, (1 - x) + \alpha_2 \,.\, (x - 1) + \alpha_3 & \forall x \in (1, 2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = (\alpha_1 + \alpha_2) \,.\, (1 - x) & \forall x \in [0, 1) \\ 1 = \alpha_3 \\ x - 1 = (\alpha_2 - \alpha_1) \,.\, (x - 1) & \forall x \in (1, 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1/2 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

Luego g es combinación lineal de f_1, f_2 y f_3 pues existen escalares $\alpha_1 = -1/2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 = 1/2 \in \mathbb{R}$ y $\alpha_3 = 1 \in \mathbb{R}$ tales que $g = -1/2 \,.\, f_1 + 1/2 \,.\, f_2 + f_3$.

Observación

Considerando las gráficas de las funciones se comprueba fácilmente el resultado obtenido.



3. SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea un K-espacio vectorial V y consideremos un subconjunto no vacío S de V.

Definición 3.1

Se dice que S es un subespacio vectorial de V si las leyes de composición definidas en V inducen leyes de composición en S respecto de las cuales S es un K-espacio vectorial.

Proposición 3.1

$$\text{S subespacio vectorial de V} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \overline{x}, \overline{y} \in S & \overline{x} + \overline{y} \in S \\ \forall \alpha \in S \quad \forall \overline{x} \in S & \alpha \,.\, \overline{x} \in S \end{cases}$$

Demostración

$\Rightarrow$) Trivial.

$\Leftarrow$) Supongamos que:

$$\forall \overline{x}, \overline{y} \in S \qquad \overline{x} + \overline{y} \in S \tag{1}$$

$$\forall \alpha \in S \quad \forall \overline{x} \in S \qquad \alpha \,.\, \overline{x} \in S \tag{2}$$

Demostremos que S es un subespacio vectorial de V. Es decir, probemos que las leyes de composición (+) y (.) definidas en V inducen en S

otras leyes de composición denotadas también por (+) y (.) respecto de las cuales S es un K-espacio vectorial.

De (1) y (2) se deduce que las leyes de composición (+) y (.) definidas en V inducen en S otras leyes de composición denotadas también por (+) y (.).

Por otro lado, considerando (2) y (1) tenemos que:

$$\alpha = -1 \in K \quad \wedge \quad \overline{y} \in S \quad \Rightarrow \quad (-1) \,.\, \overline{y} = -(1 \,.\, \overline{y}) = -\overline{y} \in S$$
$$\overline{x} \in S \quad \wedge \quad -\overline{y} \in S \quad \Rightarrow \quad \overline{x} - \overline{y} \in S$$

Según esto, $\forall \overline{x}, \overline{y} \in S$ se cumple que $\overline{x} - \overline{y} \in S$, de donde resulta que S es un subgrupo del grupo (V, +). Es decir, S tiene estructura de grupo respecto de la ley de composición interna (+).

Además, el grupo (S, +) es un grupo conmutativo o abeliano, pues la ley de composición interna (+) conmutativa en V motiva que la ley de composición interna (+) definida en S sea también conmutativa.

Los axiomas que se satisfacen en V respecto de la ley de composición externa (.), se verifican también en $S \subset V$ respecto de la ley de composición externa (.) inducida en S por la definida en V.

De todo lo expuesto, se deduce que las leyes de composición (+) y (.) definidas en V inducen leyes de composición (+) y (.) definidas en S respecto de las cuales S es un K-espacio vectorial. Es decir, concluimos que S es un subespacio vectorial de V.

Proposición 3.2

S subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in K \;\; \forall \overline{x}, \overline{y} \in S \;\; \alpha \,.\, \overline{x} + \beta \,.\, \overline{y} \in S.$

Demostración

$\Rightarrow$) Trivial.

$\Leftarrow$) Supongamos que:

$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in S \qquad \alpha \,.\, \overline{x} + \beta \,.\, \overline{y} \in S \qquad (1)$$

Demostremos que S es un subespacio vectorial de V.

Considerando (1) tenemos que:

$$\alpha = 1 \in K \wedge \beta = 1 \in K \wedge \overline{x}, \overline{y} \in S \;\Rightarrow\; 1 \,.\, \overline{x} + 1 \,.\, \overline{y} = \overline{x} + \overline{y} \in S$$
$$\alpha \in K \wedge \beta = 0 \in K \wedge \overline{x}, \overline{y} \in S \;\Rightarrow\; \alpha \,.\, \overline{x} + 0 \,.\, \overline{y} = \alpha \,.\, \overline{x} + \overline{0} = \alpha \,.\, \overline{x} \in S$$

De estos resultados y la porposición 3.1., concluimos que S es un subespacio vectorial de V.

Definición 3.2

$\{\overline{0}\}$ y V son subespacios vectoriales de V a los que se denomina subespacios vectoriales impropios. Cualquier subespacio vectorial de V distinto de los anteriores se denomina subespacio vectorial propio.

Proposición 3.3

Si S y T son dos subespacios vectoriales cualesquiera de V resulta que:

1.º) $S \cap T$ es un subespacio vectorial de V.
2.º) $S \cap T$ es el más amplio de todos los subespacios vectoriales de V incluidos en S y T.

Demostración

1.º) En principio, $S \cap T \neq \varnothing$ pues al menos $\overline{0} \in S \cap T$ dado que $\overline{0} \in S$ y $\overline{0} \in T$.

Por otro lado:

$$\alpha, \beta \in K \wedge \overline{x}, \overline{y} \in S \cap T \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha, \beta \in K \wedge \overline{x}, \overline{y} \in S \\ \alpha, \beta \in K \wedge \overline{x}, \overline{y} \in T \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha \,.\, \overline{x} + \beta \,.\, \overline{y} \in S \\ \alpha \,.\, \overline{x} + \beta \,.\, \overline{y} \in T \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\alpha \,.\, \overline{x} + \beta \,.\, \overline{y} \in S \cap T$$

Luego:

$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in S \cap T \qquad \alpha \,.\, \overline{x} + \beta \,.\, \overline{y} \in S \cap T$$

De donde considerando la proposición 3.2 concluimos que $S \cap T$ es un subespacio vectorial de V.

2.º) Supongamos que P es un subespacio vectorial de V tal que $P \subset S$ y $P \subset T$, entonces $P \subset S \cap T$ y en consecuencia el subespacio vectorial $S \cap T$ es el más amplio de todos los subespacios vectoriales de V incluidos en S y T.

Observación

La proposición 3.3 se generaliza de inmediato para un número cualquiera de subespacios vectoriales de V.

Ejercicio 3

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$.

$S = \{(x_1, 0, x_3)/x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$T = \{(0, x_2, x_3)/x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3/x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$

1.º) Demostrar que S y T son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.
2.º) Determinar el subespacio vectorial $S \cap T$ de $\mathbb{R}^3$.
3.º) Probar que el subconjunto $S \cup T$ de $\mathbb{R}^3$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
4.º) Demostrar que W no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Solución

1.º) Veamos que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

En principio, $S \neq \varnothing$ pues $\overline{0} = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ ya que el segundo elemento de la terna (0, 0, 0) es nulo.

Por otro lado:

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \wedge (x_1, 0, x_3), (y_1, 0, y_3) \in S \Rightarrow \alpha \,.\, (x_1, 0, x_3) + \beta \,.\, (y_1, 0, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, 0, \alpha x_3 + \beta y_3) \in S$$

Luego:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall (x_1, 0, x_3), (y_1, 0, y_3) \in S \qquad \alpha \,.\, (x_1, 0, x_3) + \beta \,.\, (y_1, 0, y_3) \in S$$

De donde, considerando la proposición 3.2, concluimos que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Análogamente probaríamos que T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

2.º) Tomemos un vector cualquiera $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, entonces:

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \cap T \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \in S \\ (x_1, x_2, x_3) \in T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$S \cap T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 0 \wedge x_2 = 0\} = \{(0, 0, x_3) / x_3 \in \mathbb{R}^3\}$$

3.º) Observemos, por ejemplo, que $\overline{x} = (1, 0, 0) \in S$, $\overline{y} = (0, 1, 0,) \in T$ y $\overline{x} + \overline{y} = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin S \cup T$. Por tanto, considerando la proposición 3.1, concluimos que $S \cup T$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

4.º) Observemos, por ejemplo, que $\alpha = 4 \in \mathbb{R}$, $\overline{x} = (0, 0, ½) \in W$ pues $0^2 + 0^2 + (½)^2 = ¼ < 1$ y $\alpha \cdot \overline{x} = 4 \cdot (0, 0, ½) \notin W$ dado que $0^2 + 0^2 + 2^2 = 4 > 1$. Por tanto, considerando la proposición 3.1, concluimos que W no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Observación

El apartado 3.º) del ejercicio anterior nos permite enunciar que la unión de dos subespacios vectoriales cualesquiera de V no es necesariamente un subespacio vectorial de V.

Ejercicio 4

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ de los polinomios de grado menor o igual que dos en la variable x y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Demostrar que $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 / p(0) = p(1)\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$.

Solución

En principio, $S \neq \varnothing$ pues al menos $p_o(x) = 0x^2 + 0x + 0 = 0 \in S$ dado que $p_o(0) = p_o(1)$,

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos polinomios cualesquiera $p(x), q(x) \in S$, resulta que:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) \in S \Rightarrow p(0) = p(1) \Rightarrow \alpha\, p(0) = \alpha\, p(1) \\ q(x) \in S \Rightarrow q(0) = q(1) \Rightarrow \beta\, q(0) = \beta\, q(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\, p(0) + \beta\, q(0) = \alpha\, p(1) + \beta\, q(1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\, p(x) + \beta\, q(x) \in S$$

Luego:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall p(x) \in S \qquad \alpha\, p(x) + \beta\, q(x) \in S$$

De donde, considerando la proposición 3.2, concluimos que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$.

4. SUBESPACIO VECTORIAL ENGENDRADO POR UNA PARTE FINITA DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea un K-espacio vectorial V y consideremos un subconjunto o parte no vacía $G = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ de V· Representemos por L(G) al conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n \in G$:

$$L(G) = \{\alpha_1 . \bar{u}_1 + \alpha_2 . \bar{u}_2 + ... + \alpha_n . \bar{u}_n \,/\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K\}$$

Proposición 4.1

1.º) L(G) es un subespacio vectorial de V·
2.º) L(G) es el menos amplio de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a G.

Demostración

1.º) En principio, $L(G) \neq \varnothing$ pues al menos $0 . \bar{u}_1 + 0 . \bar{u}_2 + ... + 0 . \bar{u}_n = \bar{0} \in L(G)$

Por otro lado, para cualesquiera escalares $\alpha, \beta \in K$ y cualesquiera vectores $\bar{x}, \bar{y} \in L(G)$, tenemos que:

$$\bar{x} \in L(G) \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \;/\; \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \bar{u}_i$$

$$\bar{y} \in L(G) \Rightarrow \exists\, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in K \;/\; \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i . \bar{u}_i$$

$$\alpha . \bar{x} + \beta . \bar{y} = \alpha . \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . \bar{u}_i + \beta . \sum_{i=1}^{n} \beta_i . \bar{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i) . \bar{u}_i + \sum_{i=1}^{n} (\beta\beta_i) . \bar{u}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) . \bar{u}_i$$

Según esto, y considerando que $\alpha\alpha_i + \beta\beta_i \in K$ para i = 1, 2, ..., n, deducimos que $\alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} \in L(G)$.

Luego:

$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in L(G) \qquad \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} \in L(G)$$

Finalmente, considerando la proposición 3.2, concluimos que L(G) es un subespacio vectorial de V.

2.º) Veamos en principio que L(G) contiene a G:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u}_1 = 1 \cdot \bar{u}_1 + 0 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + 0 \cdot \bar{u}_n \\ \bar{u}_2 = 0 \cdot \bar{u}_1 + 1 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + 0 \cdot \bar{u}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{u}_n = 0 \cdot \bar{u}_1 + 0 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + 0 \cdot \bar{u}_{n-1} + 1 \cdot \bar{u}_n \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n \in L(G) \Rightarrow G \subset L(G)$$

Demostremos que L(G) es el menos amplio de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a G. Supongamos que S es otro subespacio vectorial de V tal que $G \subset S$, entonces, si tomamos cualesquiera escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ tenemos que:

$$G \subset S \Rightarrow \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n \in S \overset{(1)}{\Rightarrow} \alpha_1 \cdot \bar{u}_1, \alpha_2 \cdot \bar{u}_2, \ldots, \alpha_n \cdot \bar{u}_n \in S \overset{(2)}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot \bar{u}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{u}_n \in S$$

Luego:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K \qquad \alpha_1 \cdot \bar{u}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{u}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{u}_n \in S$$

Según esto $L(G) \subset S$ y en consecuencia L(G) es el menos amplio de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a G.

—La implicación (1) se deduce considerando la segunda condición de la proposición 3.1.

—La implicación (2) se deduce considerando reiteradamente la primera condición de la proposición 3.1.

Proposición 4.2

$$L(G) = L(H) \Leftrightarrow G \subset L(H) \wedge H \subset L(G)$$

Demostración

⇒) Sea L(G) = L(H) y demostremos que $G \subset L(H)$ y $H \subset L(G)$:
Como $G \subset L(G)$ y $L(G) = L(H)$, tenemos que $G \subset L(H)$.
Análogamente, considerando que $H \subset L(H)$ y $L(G) = L(H)$, resulta que $H \subset L(G)$

⇐) Supongamos que $G \subset L(H)$ y $H \subset L(G)$ y demostremos que $L(G) = L(H)$:
Tomemos un vector cualquiera $\overline{x} \in L(G)$, entonces como $G \subset L(H)$, considerando la proposición 2.1 resulta que $\overline{x} \in L(H)$. Por tanto, $L(G) \subset L(H)$.
Análogamente, si tomamos un vector cualquiera $\overline{x} \in L(H)$, entonces como $H \subset L(G)$, considerando la proposición 2.1 resulta que $\overline{x} \in L(G)$. Por tanto, $L(H) \subset L(G)$.

De $L(G) \subset L(H)$ y $L(H) \subset L(G)$ se concluye $L(G) = L(H)$.

Observación

De la proposición 4.2 se deduce de inmediato el siguiente resultado de utilidad:

$$L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{u}_i\}) = L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\})$$

Definición 4.1

Al subespacio vectorial L(G) de V se le denomina clausura lineal de G o subespacio vectorial engendrado por G. La parte finita no vacía G se dice que es una familia o sistema de generadores del subespacio vectorial L(G).

Ejercicio 5

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Determinar un sistema de generadores G del subespacio vectorial $S = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 \ / \ / \ p(0) = p(1)\}$ de $\mathcal{P}_2$.

Solución

$$\begin{aligned} p(x) \in S &\Leftrightarrow \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} / p(x) = ax^2 + bx + c \wedge p(0) = p(1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} / p(x) = ax^2 + bx + c \wedge c = a + b + c \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists\, a, b, c \in \mathbb{R} / p(x) = ax^2 + bx + c \wedge b = -\,a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists\, a, c \in \mathbb{R} / p(x) = ax^2 - ax + c = a \,.\, (x^2 - x) + c \,.\, 1 \end{aligned}$$

Luego:

$$S = \{a \,.\, (x^2 - x) + c \,.\, 1 / a, c \in \mathbb{R}\} = L(\{x^2 - x, 1\})$$

De donde concluimos que $G = \{x^2 - x, 1\}$ es un sistema de generadores de S.

Observación

Aunque el enunciado del ejercicio nos dice que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$, el resultado $S = L(\{x^2 - x, 1\})$ nos prueba que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$ dado que S coincide con el subespacio vectorial engendrado por $\{x^2 - x, 1\}$.

Ejercicio 6

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y consideremos el subconjunto $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$. Demostrar que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y hallar un sistema de generadores de S.

Solución

Consideremos una terna cualquier $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \quad \forall \in \mathbb{R}$$

Luego:

$$S = \{(\alpha, -2\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha \,.\, (1, -2, 1) / \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, -2, 1)\})$$

De donde se concluye que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y que $G = \{(1, -2, 1)\}$ es un sistema de generadores de S.

5. SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES. SUMA DIRECTA

Sea un K-espacio vectorial V y consideremos dos subespacios vectoriales S y T de V.

Definición 5.1

Se denomina suma de los subespacios vectoriales S y T al conjunto denotado por S + T y definido por:

$$S + T = \{\overline{x}_1 + \overline{x}_2 / \overline{x}_1 \in S \wedge \overline{x}_2 \in T\}$$

Proposición 5.1

Si S y T son dos subespacios vectoriales cualesquiera de V resulta que:

1. °) S + T es un subespacio vectorial de V.
2. °) S + T es el menos amplio de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S y T.

Demostración

1.°) En principio $S + T \neq \varnothing$ pues al menos $\overline{0} \in S + T$ dado que $\overline{0} = \overline{0} + \overline{0}$ con $\overline{0} \in S$ y $\overline{0} \in T$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in K$ y dos vectores cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in S + T$ tenemos que:

$$\overline{x} \in S + T \Rightarrow \overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 / \overline{x}_1 \in S \wedge \overline{x}_2 \in T$$
$$\overline{y} \in S + T \Rightarrow \overline{y} = \overline{y}_1 + \overline{y}_2 / \overline{y}_1 \in S \wedge \overline{y}_2 \in T$$

$$\alpha . \overline{x} + \beta . \overline{y} = \alpha . (\overline{x}_1 + \overline{x}_2) + \beta . (\overline{y}_1 + \overline{y}_2) = (\alpha . \overline{x}_1 + \beta . \overline{y}_1) + (\alpha . \overline{x}_2 + \beta . \overline{y}_2)$$

De donde, considerando que $\alpha . \overline{x}_1 + \beta . \overline{y}_1 \in S \wedge \alpha . \overline{x}_2 + \beta . \overline{y}_2 \in T$, resulta que $\alpha . \overline{x} + \beta . \overline{y} \in S + T$.

Luego:

$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in S + T \qquad \alpha . \overline{x} + \beta . \overline{y} \in S + T$$

Concluyendo finalmente que S + T es un subespacio vectorial de V.

2.º) Veamos en principio que $S \subset S + T$, y $T \subset S + T$:

Cada vector $\bar{x} \in S$ se escribe en la forma $\bar{x} = \bar{x} + \bar{0}$ con $\bar{x} \in S$ y $\bar{0} \in T$, de donde $\bar{x} \in S + T$. Por tanto $S \subset S + T$.

Cada vector $\bar{x} \in T$ se escribe en la forma $\bar{x} = \bar{0} + \bar{x}$ con $\bar{0} \in S$ y $\bar{x} \in T$, de donde $\bar{x} \in S + T$. Por tanto $T \subset S + T$.

Demostremos que $S + T$ es el menos amplio de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S y T. Supongamos que P es otro subespacio vectorial de V tal que $S \subset P$ y $T \subset P$, entonces:

Como cada vector $\bar{x} \in S + T$ se escribe en la forma $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ con $\bar{x}_1 \in S$ y $\bar{x}_2 \in T$, considerando que $S \subset P$ y $T \subset P$, resulta que $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in P$ y en consecuencia $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x} \in P$ dado que P es un subespacio vectorial de V.

Luego: $S + T \subset P$.

Según esto, $S + T$ es el menos amplio de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a S y T.

Observaciones

La definición 5.1 y la proposición 5.1 se generalizan de inmediato para un número finito cualquiera de subespacios vectoriales de V.

Recordemos que si S y T son subespacios vectoriales de V, el conjunto unión $S \cup T$ no es necesariamente un subespacio vectorial de V. De la proposición 5.1 se deduce que $S + T$ es el menos amplio de todos los subespacios vectoriales de V que contienen al conjunto unión $S \cup T$.

Proposición 5.2

$$\left.\begin{array}{l} S = L(F) \\ T = L(G) \end{array}\right\} \Rightarrow S + T = L(F \cup G)$$

Demostración

Supongamos que $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ y $G = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m\}$.

Veamos que $S + T \subset L(F \cup G)$:

$$\bar{x} \in S + T \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \,/\, \bar{x}_1 \in S = L(F) \wedge \bar{x}_2 \in T = L(G) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n,\ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in K \,/\, \bar{x} = \alpha_1 \,.\, \bar{u}_1 + \alpha_2 \,.\, \bar{u}_2 + ... +$$
$$+ \alpha_n \,.\, \bar{u}_n + \beta_1 \,.\, \bar{v}_1 + \beta_2 \,.\, \bar{v}_2 + ... + \beta_m \,.\, \bar{v}_m \Rightarrow \bar{x} \in L(F \cup G).$$

Según esto, $S + T \subset L(F \cup G)$.

Veamos que $L(F \cup G) \subset S + T$:

$$\left.\begin{array}{l} F \subset L(F) = S \subset S + T \\ G \subset L(G) = T \subset S + T \end{array}\right\} \Rightarrow F \cup G \subset S + T \overset{(1)}{\Rightarrow} L(F \cup G) \subset S + T$$

Según esto, $L(F \cup G) \subset S + T$.

Finalmente, como $S + T \subset L(F \cup G)$ y $L(F \cup G) \subset S + T$ concluimos que $S + T = L(F \cup G)$.

—La implicación (1) se deduce considerando que $L(F \cup G)$ es el menos amplio de todos los subespacios vectoriales de V que contienen a $F \cup G$.

Definición 5.2

Se dice que los subespacios vectoriales S y T de V son subespacios vectoriales independientes o que la suma $S + T$ es suma directa, denotándose $S \oplus T$, si cada vector $\overline{x} \in S + T$ se puede expresar de forma única como $\overline{x} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$ en donde $\overline{x}_1 \in S$ y $\overline{x}_2 \in T$.

Si $S \oplus T = V$ se dice que S y T son subespacios vectoriales suplementarios o que V es suma directa de S y T.

Proposición 5.3

$$S \text{ y } T \text{ independientes} \Leftrightarrow S \cap T = \{\overline{0}\}$$

Demostración

⇒) Supongamos que los subespacios vectoriales S y T son independientes y demostremos que $S \cap T = \{\overline{0}\}$:

Tomemos un vector cualquiera $\overline{x} \in S \cap T$, entonces como $\overline{x} \in S$ y $\overline{x} \in T$, resulta que el vector $\overline{x}$ se puede escribir de las dos maneras siguientes:

$$\overline{x} = \overline{x} + \overline{0} \,/\, \overline{x} \in S \wedge \overline{0} \in T \qquad (1)$$
$$\overline{x} = \overline{0} + \overline{x} \,/\, \overline{0} \in S \wedge \overline{x} \in T \qquad (2)$$

Ahora bien, considerando que S y T son independientes, resulta que el vector $\overline{x} \in S \cap T \subset S + T$ se debe escribir de forma única como suma de

un vector de S y otro de T. Según esto, las expresiones (1) y (2) deben coincidir, de donde $\bar{x} = \bar{0}$ y por tanto $S \cap T = \{\bar{0}\}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $S \cap T = \{\bar{0}\}$ y demostremos que los subespacios vectoriales S y T son independientes:

Tomemos un vector cualquiera $\bar{x} \in S + T$ y supongamos que $\bar{x}$ se puede escribir de dos formas distintas como suma de un vector de S y otro de T:

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \,/\, \bar{x}_1 \in S \;\wedge\; \bar{x}_2 \in T$$
$$\bar{x} = \bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 \,/\, \bar{x}'_1 \in S \;\wedge\; \bar{x}'_2 \in T$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \\ \bar{x} = \bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 \Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}'_1 = \bar{x}'_2 - \bar{x}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1, \bar{x}'_1 \in S \\ \bar{x}_2, \bar{x}'_2 \in T \end{array}\right\} \overset{(3)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} \bar{x}_1 - \bar{x}'_1 \in S \\ \bar{x}'_2 - \bar{x}_2 \in T \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x}_1 - \bar{x}'_1 = \bar{x}'_2 - \bar{x}_2 \in S \cap T = \{\bar{0}\}$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}'_1 = \bar{x}'_2 - \bar{x}_2 = \bar{0} \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}'_1 \;\wedge\; \bar{x}_2 = \bar{x}'_2$$

De este resultado se deduce que cada vector $\bar{x} \in S + T$ se escribe de forma única como suma de un vector $\bar{x}_1 \in S$ y otro vector $\bar{x}_2 \in T$. Por tanto, los subespacios vectoriales S y T son independientes.

—La implicación (3) se deduce considerando que S y T son subespacios vectoriales de V.

Proposición 5.4

$$S \text{ y } T \text{ suplementarios} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} V = S + T \\ S \cap T = \{\bar{0}\} \end{array}\right.$$

Demostración

Inmediata considerando lo anteriormente expuesto.

Ejercicio 7

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y consideremos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$$
$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

1.º) ¿S + T coincide con $\mathbb{R}^4$?
2.º) Hallar $S \cap T$.
3.º) ¿Los subespacios vectoriales S y T son independientes?
4.º) ¿$\mathbb{R}^4$ es suma directa de S y T?

Solución

1.º) En principio determinemos explícitamente los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ de S y T:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_4 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = -\beta \end{cases} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$S = \{(\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in T \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \Leftrightarrow x_4 = x_1 - x_2 + x_3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \gamma \\ x_2 = \delta \\ x_3 = \omega \\ x_4 = \gamma - \delta + \omega \end{cases} \quad \forall \gamma, \delta, \omega \in \mathbb{R}$$

$$T = \{(\gamma, \delta, \omega, \gamma - \delta + \omega) / \gamma, \delta, \omega \in \mathbb{R}\}$$

Tomemos ahora un vector cualquiera $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ y veamos si es posible encontrar un vector $\overline{s} = (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) \in S$ y otro vector $\overline{t} = (\gamma, \delta, \omega, \gamma - \delta + \omega) \in T$ tal que $\overline{x} = \overline{s} + \overline{t}$:

$$\overline{x} = \overline{s} + \overline{t} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\alpha, -\alpha, \beta, -\beta) + (\gamma, \delta, \omega, \gamma - \delta + \omega) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = x_1 \\ -\alpha + \delta = x_2 \\ \beta + \omega = x_3 \\ -\beta + \gamma - \delta + \omega = x_4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \lambda \\ \beta = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\lambda) \\ \gamma = x_1 - \lambda \\ \delta = x_2 + \lambda \\ \omega = -\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2\lambda) \end{cases} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Según esto, cada vector $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ se puede escribir en la forma:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= (\lambda, -\lambda, \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\lambda), -\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\lambda)) +$$
$$+ (x_1 - \lambda, x_2 + \lambda, -\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2\lambda), -\tfrac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\lambda))$$

en donde $(\lambda, -\lambda, \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\lambda), -\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\lambda)) \in S$ y $(x_1 - \lambda, x_2 + \lambda, -\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2\lambda), -\tfrac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2\lambda)) \in T$ siendo λ un parámetro que toma valores reales.

Por tanto, concluimos que $\mathbb{R}^4 = S + T$.

2.º) Tomemos un vector cualquiera $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, entonces:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S \cap T \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = -\alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Luego:

$$S \cap T = \{(\alpha, -\alpha, -\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\alpha . (1, -1, -1, 1) / \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, -1, -1, 1)\})$$

3.º) Considerando la proposición 5.3, resulta que los subespacios vectoriales S y T de $\mathbb{R}^4$ no son independientes pues $S \cap T \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$.

4.º) De la proposición 5.4, concluimos de inmediato que los subespacios vectoriales S y T no son suplementarios. Es decir, $\mathbb{R}^4$ no es suma directa de S y T.

A este mismo resultado se llega considerando que, según la expresión final del apartado 1.º), cada vector de $\mathbb{R}^4$ se escribe de infinitas maneras como suma de un vector de S y otro de T.

Ejercicio 8

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y consideremos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} \qquad T = L(\{(1, 0, 1)\})$$

Demostrar que $\mathbb{R}^3$ es suma directa de S y T.

Solución

En principio determinemos explícitamente los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ de S y T:

$$(x_1, x_2, x_3) \in S \Leftrightarrow x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha - 2\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Luego:

$$S = \{(\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Por otro lado:

$$T = L(\{(1, 0, 1)\}) = \{\gamma . (1, 0, 1) / \gamma \in \mathbb{R}\} = \{(\gamma, 0, \gamma) / \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Tomemos ahora un vector cualquiera $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ y veamos si es posible encontrar un vector $\overline{s} = (\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) \in S$ y otro vector $\overline{t} = (\gamma, 0, \gamma) \in T$ tales que $\overline{x} = \overline{s} + \overline{t}$:

$$\overline{x} = \overline{s} + \overline{t} \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (\alpha - 2\beta, \alpha, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta + \gamma = x_1 \\ \alpha = x_2 \\ \beta + \gamma = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = x_2 \\ \beta = \frac{1}{3}(-x_1 + x_2 + x_3) \\ \gamma = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 + 2x_3) \end{cases}$$

Luego cada vector $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma:

$$(x_1, x_2, x_3) = (\tfrac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3), x_2, \tfrac{1}{3}(-x_1 + x_2 + x_3)) + \\ + (\tfrac{1}{3}(x_1 - x_2 + 2x_3), 0, \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2 + 2x_3))$$

en donde $(\frac{1}{3}(2x_1 + x_2 - 2x_3), x_2, \frac{1}{3}(-x_1 + x_2 + x_3)) \in S$ y

$$(\tfrac{1}{3}(x_1 - x_2 + 2x_3), 0, \tfrac{1}{3}(x_1 - x_2 + 2x_3)) \in T.$$

Según esto, cada vector de $\mathbb{R}^3$ se escribe de forma única como suma de un vector de S y otro de T. Por tanto, $\mathbb{R}^3$ es suma directa de S y T.

Ejercicio 9

Sea un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes a_{ij} en el cuerpo conmutativo $\mathbb{R}$ de los números reales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Interpretemos cada solución del sistema como una n-tupla de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que el conjunto S constituido por las soluciones del sistema es un subespacio vectorial del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Solución

El sistema se expresa simbólicamente en la forma:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Según esto, el conjunto S de soluciones del sistema viene definido por:

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m\}$$

Demostremos que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$:

En principio, $S \neq \varnothing$ pues $(0, 0, \overset{n}{\ldots}, 0) \in S$ ya que $a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + ... + a_{in} \cdot 0 = 0$ para $i = 1, 2, ..., m$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos n-tuplas cualesquiera $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in S$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1, x_2, ..., x_n) \in S \Rightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = 0 \wedge i = 1, 2, ..., m \\ (y_1, y_2, ..., y_n) \in S \Rightarrow a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + ... + a_{in}y_n = 0 \wedge i = 1, 2, ..., m\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha\, a_{i1}x_1 + \alpha\, a_{i2}x_2 + ... + \alpha\, a_{in}x_n = 0 \wedge i = 1, 2, ..., m \\ \beta\, a_{i1}y_1 + \beta\, a_{i2}y_2 + ... + \beta\, a_{in}y_n = 0 \wedge i = 1, 2, ..., m\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{i1}(\alpha x_1 + \beta y_1) + a_{i2}(\alpha x_2 + \beta y_2) + ... + a_{in}(\alpha x_n + \beta y_n) = 0 \wedge i = 1, 2, ..., m$$

$$\Rightarrow (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, ..., \alpha x_n + \beta y_n) \in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha (x_1, x_2, ..., x_n) + \beta (y_1, y_2, ..., y_n) \in S$$

Es decir:

$$\forall (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in S, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$\alpha (x_1, x_2, ..., x_n) + \beta (y_1, y_2, ..., y_n) \in S$$

Por tanto, S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 10

El conjunto S de las sucesiones de números reales es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial respecto de las leyes de composición definidas por:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \qquad \forall (x_n), (y_n) \in S$$
$$\alpha \cdot (x_n) = (\alpha\, x_n) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall (x_n) \in S$$

1.º) Demostrar que el conjunto L de las sucesiones de números reales convergentes es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial respecto de las leyes de composición definidas por:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \qquad \forall (x_n), (y_n) \in L$$
$$\alpha \cdot (x_n) = (\alpha\, x_n) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall (x_n) \in L$$

2.º) Probar que los subconjuntos J y C de S constituidos respectivamente por los infinitésimos y las sucesiones constantes son subespacios vectoriales de S.

3.º) Demostrar que S es suma directa de J y C.

Solución

1.º) Este apartado queda verificado demostrando que el subconjunto L de S es un subespacio vectorial de S:

En principio, $L \neq \varnothing$, pues la sucesión constante $(0) \in S$ es convergente y en consecuencia $(0) \in L$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos sucesiones convergentes cualesquiera $(x_n), (y_n) \in L$, se sigue de resultados del análisis matemático que:

$$\left.\begin{array}{l}(x_n) \in L \Rightarrow (x_n) \text{ convergente} \Rightarrow \alpha \,.\, (x_n) = (\alpha\, x_n) \text{ convergente} \\ (y_n) \in L \Rightarrow (y_n) \text{ convergente} \Rightarrow \beta \,.\, (y_n) = (\beta\, y_n) \text{ convergente}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \,.\, (x_n) + \beta \,.\, (y_n) = (\alpha x_n + \beta y_n) \text{ convergente} \Rightarrow \alpha \,.\, (x_n) + \beta \,.\, (y_n) \in L$$

Luego:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall (x_n), (y_n) \in L, \quad \alpha \,.\, (x_n) + \beta \,.\, (y_n) \in L$$

En consecuencia, L es un subespacio vectorial de S. Es decir, L es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial respecto de las leyes de composición (+) y (.) definidas sobre L.

2.º) Demostremos que J es un subespacio vectorial de L:

En principio $J \neq \varnothing$, pues la sucesión constante $(0) \in L$ es un infinitésimo y en consecuencia $(0) \in J$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos infinitésimos cualesquiera $(x_n), (y_n) \in J$, se sigue de resultados del análisis matemático que:

$$\left.\begin{array}{l}(x_n) \in J \Rightarrow (x_n) \text{ infinitésimo} \Rightarrow \alpha \,.\, (x_n) = (\alpha\, x_n) \text{ infinitésimo} \\ (y_n) \in J \Rightarrow (y_n) \text{ infinitésimo} \Rightarrow \beta \,.\, (y_n) = (\beta\, y_n) \text{ infinitésimo}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \,.\, (x_n) + \beta \,.\, (y_n) = (\alpha x_n + \beta y_n) \text{ infinitésimo} \Rightarrow \alpha \,.\, (x_n) + \beta \,.\, (y_n) \in J$$

Luego:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall (x_n), (y_n) \in J, \quad \alpha \,.\, (x_n) + \beta \,.\, (y_n) \in J$$

En consecuencia, J es un subespacio vectorial de L.
Análogamente probaríamos que C es un subespacio vectorial de L.

3.º) Tomemos una sucesión convergente cualquiera $(x_n) \in L$, y supongamos que $(x_n) \to x$. Entonces la sucesión (x_n) se puede expresar en la forma:

$$(x_n) = (x_n - x) + (x)$$

en donde $(x_n - x) \in J$ y $(x) \in C$.
Según esto, se tiene que $L = J + C$.
Determinemos $J \cap C$:

$$(x_n) \in J \cap C \Leftrightarrow (x_n) \in J \wedge (x_n) \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_n) \text{ infinitésimo} \wedge (x_n) \text{ sucesión constante} \Leftrightarrow (x_n) = (0).$$

Luego:

$$J \cap C = \{(0)\}$$

Finalmente, de los resultados:

$$L = J + C$$
$$J \cap C = \{(0)\}$$

se concluye que L es suma directa de J y C.

Ejercicio 11

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}$ de las funciones de $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Consideremos los subconjuntos P y J de $\mathcal{F}$ constituidos respectivamente por las funciones pares y las funciones impares.

1.º) Demostrar que P y J son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$.
2.º) Probar que $\mathcal{F}$ es suma directa de P y J.

Solución

Una función $f \in \mathcal{F}$ se denomina función par si $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in [-a, a]$.
Una función $f \in \mathcal{F}$ se denomina función impar si $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in [-a, a]$.
Según esto:

$$P = \{f \in \mathcal{F} / f(-x) = f(x) \qquad \forall x \in [-a, a]\}$$
$$J = \{f \in \mathcal{F} / f(-x) = -f(x) \qquad \forall x \in [-a, a]\}$$

1.º) Demostremos que P es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}$:
En principio, $P \neq \emptyset$, pues la función $f_o \in \mathcal{F}$ definida por $f_o(x) = 0$ $\forall x \in [-a, a]$ verifica que $f_o(-x) = f_o(x) = 0$ y en consecuencia $f_o \in P$.
Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos funciones cualesquiera $f, g \in P$, se sigue que:

$$\forall x \in [-a, a] \quad (\alpha . f + \beta . g)(-x) = (\alpha . f)(-x) + (\beta . g)(-x) =$$
$$= \alpha . f(-x) + \beta . g(-x) = \alpha . f(x) + \beta . g(x) =$$
$$= (\alpha . f)(x) + (\beta . g)(x) = (\alpha . f + \beta . g)(x)$$

Luego:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha . f + \beta . g \in P$$

En consecuencia P es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}$:
Análogamente probaríamos que J es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}$.

2.º) Tomemos una función cualquiera $f \in \mathcal{F}$ y veamos si es posible encontrar una función $g \in P$ y otra función $h \in J$ tal que $f = g + h$:

$$f = g + h \Leftrightarrow f(x) = (g + h)(x) \quad \forall x \in [-a, a] \Leftrightarrow f(x) = g(x) + h(x) \quad \forall x \in [-a, a] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{cases} \quad \forall x \in [-a, a] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases} \quad \forall x \in [-a, a] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + f(-x) = 2g(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases} \quad \forall x \in [-a, a] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \tfrac{1}{2} [f(x) + f(-x)] \\ h(x) = g(x) - f(-x) \end{cases} \quad \forall x \in [-a, a] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \tfrac{1}{2} [f(x) + f(-x)] \\ h(x) = \tfrac{1}{2} [f(x) - f(-x)] \end{cases} \quad \forall x \in [-a, a]$$

Luego cada función $f \in \mathcal{F}$ se escribe en la forma:

$$f = g + h$$

en donde $g \in P$ y $h \in J$ vienen definidas por:

$$\begin{aligned} g(x) &= \tfrac{1}{2}\,[f(x) + f(-x)] \\ h(x) &= \tfrac{1}{2}\,[f(x) - f(-x)] \end{aligned} \qquad \forall x \in [-a, a]$$

Según esto, cada función $f \in \mathcal{F}$ se expresa de forma única como suma de una función de P y otra función de J. Por tanto, $\mathcal{F}$ es suma directa de P y J.

Ejercicio 12

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}$ de las funciones de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Consideremos los siguientes conjuntos:

El conjunto $A \subset \mathcal{F}$ de las funciones acotadas sobre $[a, b]$.
El conjunto $C \subset \mathcal{F}$ de las funciones continuas sobre $[a, b]$.
El conjunto $D \subset \mathcal{F}$ de las funciones derivables sobre $[a, b]$.
El conjunto $J \subset \mathcal{F}$ de las funciones integrables RIEMANN sobre $[a, b]$.

Demostrar que A, C, D y J son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$.

Solución

Considerando resultados del análisis matemático tenemos que:

—En principio $A \neq \varnothing$, pues la función $f_0 \in \mathcal{F}$ definida por $f_0(x) = 0$ $\forall x \in [a, b]$ es una función acotada sobre $[a, b]$ y en consecuencia $f_0 \in A$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos funciones cualesquiera $f, g \in A$, se sigue que:

$$\left.\begin{array}{l} f \in A \Rightarrow f \text{ acotada sobre } [a, b] \Rightarrow \alpha \,.\, f \text{ acotada sobre } [a, b] \\ g \in A \Rightarrow g \text{ acotada sobre } [a, b] \Rightarrow \beta \,.\, g \text{ acotada sobre } [a, b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \text{ acotada sobre } [a, b] \Rightarrow \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \in A$$

Es decir:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in A, \quad \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \in A$$

Luego A es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}$.

—En principio $C \neq \emptyset$, pues la función $f_0 \in \mathcal{F}$ es una función continua sobre [a, b] y en consecuencia $f_0 \in C$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos funciones cualesquiera $f, g \in C$, se sigue que:

$$\left.\begin{array}{l} f \in C \Rightarrow f \text{ continua sobre } [a, b] \Rightarrow \alpha \,.\, f \text{ continua sobre } [a, b] \\ g \in C \Rightarrow g \text{ continua sobre } [a, b] \Rightarrow \beta \,.\, g \text{ continua sobre } [a, b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \text{ continua sobre } [a, b] \Rightarrow \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \in C$$

Es decir:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in C, \quad \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \in C$$

Luego C es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}$.

—En principio $D \neq \emptyset$, pues la función $f_0 \in \mathcal{F}$ es derivable sobre [a, b] y en consecuencia $f_0 \in D$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos funciones cualesquiera $f, g \in D$, se sigue que:

$$\left.\begin{array}{l} f \in D \Rightarrow f \text{ derivable sobre } [a, b] \Rightarrow \alpha \,.\, f \text{ derivable sobre } [a, b] \\ g \in D \Rightarrow g \text{ derivable sobre } [a, b] \Rightarrow \beta \,.\, g \text{ derivable sobre } [a, b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \text{ derivable sobre } [a, b] \Rightarrow \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \in D$$

Es decir:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in D, \quad \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \in D$$

Luego D es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}$.

—En principio $J \neq \emptyset$, pues la función $f_0 \in \mathcal{F}$ es integrable RIEMANN y en consecuencia $f_0 \in J$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos funciones cualesquiera $f, g \in J$, se sigue que:

$$\left.\begin{array}{l} f \in J \Rightarrow f \text{ integrable RIEMANN sobre } [a, b] \\ g \in J \Rightarrow g \text{ integrable RIEMANN sobre } [a, b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \alpha \,.\, f \text{ integrable RIEMANN sobre } [a, b] \\ \Rightarrow \beta \,.\, g \text{ integrable RIEMANN sobre } [a, b] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \text{ integrable RIEMANN sobre } [a, b] \Rightarrow \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \in J$$

Es decir:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall f, g \in J, \quad \alpha \,.\, f + \beta \,.\, g \in J$$

Luego J es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}$.

6. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Sea un K-espacio vectorial V y consideremos el sistema $F = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ de vectores de V.

Definición 6.1

Se dice que los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n$ son linealmente independientes o que el sistema de vectores $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ es un sistema libre, si la expresión vectorial: $\lambda_1 \overline{u}_1 + \lambda_2 \overline{u}_2 + ... + \lambda_n \overline{u}_n = \overline{0}$ se cumple únicamente para $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Definición 6.2

Se dice que los vectores $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n$ son linealmente dependientes o que el sistema de vectores $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ es un sistema ligado, si la expresión vectorial: $\lambda_1 \overline{u}_1 + \lambda_2 \overline{u}_2 + ... + \lambda_n \overline{u}_n = \overline{0}$ se cumple para $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ no todos nulos.

Consecuencias inmediatas

1.º) Todos los vectores de un sistema libre son distintos del vector nulo.
2.º) Si a un sistema ligado se le añaden nuevos vectores resulta otro sistema ligado.
3.º) Todo subconjunto de un sistema libre es también un sistema libre.

Demostración

1.º) Sea $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ libre y supongamos que uno de sus vectores, por ejemplo $\bar{u}_1 = \bar{0}$, entonces la expresión $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n = \bar{0}$ se cumple para $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, con lo que $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ no sería libre. Luego si un sistema de vectores contiene al vector nulo es ligado.

2.º) Sea $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ ligado, entonces la expresión $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n = \bar{0}$ se cumple para $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ no todos nulos. Si consideramos el sistema $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n, \bar{u}_{n+1}, ..., \bar{u}_m\} \subset V$, se cumple que: $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n + \lambda_{n+1} \bar{u}_{n+1} + ... + \lambda_m \bar{u}_m = \bar{0}$. Tomando los $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ anteriores (no todos nulos) y $\lambda_{n+1} = ... = \lambda_m = 0$, de donde se deduce que el sistema $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n, \bar{u}_{n+1}, ..., \bar{u}_m\}$ es ligado.

3.º) Sea $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ libre. Si un subconjunto cualquiera de $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ fuera ligado, añadiéndole los vectores de $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ que no pertenezcan al subconjunto, tendríamos, según la consecuencia 2.ª, un sistema ligado, pero este sistema es $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ que por hipótesis es libre, luego todo subconjunto de $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ es libre.

Ejercicio 13

En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ consideremos los vectores:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 2) \qquad \bar{u}_2 = (-1, 1, 0) \qquad \bar{u}_3 = (2, -1, \alpha)$$
$$\bar{v}_1 = (0, 1, 1) \qquad \bar{v}_2 = (0, -1, 2) \qquad \bar{v}_3 = (1, 1, \alpha)$$

1.º) Discutir la dependencia o independencia lineal de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ según los valores del parámetro real α.

2.º) Idem de $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$.

Solución

1.º)

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \lambda_3 \bar{u}_3 = \bar{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 (1, 0, 2) + \lambda_2 (-1, 1, 0) + \lambda_3 (2, -1, \alpha) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 + \alpha\lambda_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \alpha\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \alpha\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ (2 - \alpha)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En la solución de este sistema podemos considerar dos casos:

— $\alpha \neq 2$: $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 0$, con lo que $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ son linealmente independientes.

— $\alpha = 2$: puede ser $\lambda_3 \neq 0$, con lo que $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ son linealmente dependientes.

2.º)

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 (0, 1, 1) + \lambda_2 (0, -1, 2) + \lambda_3 (1, 1, \alpha) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + \alpha\lambda_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Luego $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ son linealmente independientes.

Ejercicio 14

Sea un K-espacio vectorial E y supongamos que los vectores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ de E son linealmente independientes. Consideremos los vectores:

$$\bar{u} = \alpha \bar{x} + (1-\alpha) \bar{y}$$
$$\bar{v} = \alpha \bar{y} + (1-\alpha) \bar{z}$$
$$\bar{w} = \alpha \bar{z} + (1-\alpha) \bar{x}$$

donde $\alpha \in K$ es un escalar cualquiera.

1.º) Supongamos que E es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, demostrar que $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ son linealmente independientes $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2.º) Supongamos que E es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, hallar α para que $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ sean linealmente dependientes.

Solución

1.º)

$$\lambda_1 \overline{u} + \lambda_2 \overline{v} + \lambda_3 \overline{w} = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 [\alpha \overline{x} + (1-\alpha)\overline{y}] + \lambda_2 [\alpha \overline{y} + (1-\alpha)\overline{z}] + \lambda_3 [\alpha \overline{z} + (1-\alpha)\overline{x}] = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\lambda_1 \alpha + \lambda_3 (1-\alpha)]\overline{x} + [\lambda_1 (1-\alpha) + \lambda_2 \alpha]\overline{y} + [\lambda_2 (1-\alpha) + \lambda_3 \alpha]\overline{z} = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \text{ son l. i.} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \alpha + \lambda_3 (1-\alpha) = 0 \\ \lambda_1 (1-\alpha) + \lambda_2 \alpha = 0 \\ \lambda_2 (1-\alpha) + \lambda_3 \alpha = 0 \end{cases} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

De la primera ecuación obtenemos: $\lambda_1 = \dfrac{-\lambda_3 (1-\alpha)}{\alpha} \in \mathbb{R}$ para $\alpha \neq 0$.

Luego para resolver el sistema (1) vamos a considerar dos casos:

—$\alpha \neq 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\lambda_3 (1-\alpha)}{\alpha} \\ \lambda_2 \alpha - \dfrac{(1-\alpha)^2 \lambda_3}{\alpha} = 0 \\ \lambda_2 (1-\alpha) + \lambda_3 \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\lambda_3 (1-\alpha)}{\alpha} \\ \lambda_2 = \dfrac{\lambda_3 (1-\alpha)^2}{\alpha^2} \\ \dfrac{\lambda_3 (1-\alpha)^3}{\alpha^2} + \lambda_3 \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\lambda_3 (1-\alpha)}{\alpha} \\ \lambda_2 = \dfrac{\lambda_3 (1-\alpha)^2}{\alpha^2} \\ \lambda_3 \alpha^3 + \lambda_3 (1-\alpha)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\lambda_3 (1-\alpha)}{\alpha} \\ \lambda_2 = \dfrac{\lambda_3 (1-\alpha)^2}{\alpha^2} \\ \lambda_3 (3\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0 \end{cases}$$

En la última ecuación del sistema observamos que:

$$\lambda_3 (3\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \vee \\ 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \vee \\ \alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{6} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

Entonces:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\lambda_3 (1-\alpha)}{\alpha} \\ \lambda_2 = \dfrac{\lambda_3 (1-\alpha)^2}{\alpha^2} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Luego $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ son linealmente independientes.

—$\alpha = 0$:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Luego para $\alpha = 0$ los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ son linealmente independientes.

2.º)

$$\lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v} + \lambda_3 \bar{w} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \alpha + \lambda_3 (1-\alpha) = 0 \\ \lambda_1 (1-\alpha) + \lambda_2 \alpha = 0 \\ \lambda_2 (1-\alpha) + \lambda_3 \alpha = 0 \end{cases} \underset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-\lambda_3 (1-\alpha)}{\alpha} \\ \lambda_2 = \dfrac{(1-\alpha)^2 \lambda_3}{\alpha^2} \\ \lambda_3 (3\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0 \end{cases}$$

En la última ecuación del sistema observamos que:

$$\lambda_3 (3\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \vee \\ \alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}\, i}{6} \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Entonces, para $\alpha = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}\, i}{6}$ puede ser $\lambda_3 \neq 0$ con lo que los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ son linealmente dependientes para estos valores

Proposición 6.1

$$F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\} \text{ ligado } \Leftrightarrow \exists\, G \subset F \wedge G \neq F \mid L(G) = L(F)$$

Demostración

$\Rightarrow$) Supongamos que F ligado, entonces se cumple la expresión $\lambda_1 \bar{u}_1 + + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n = \bar{0}$ para $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ no todos nulos. Sea $\lambda_1 \neq 0$ (en caso contrario alteramos el orden de los sumandos y llamamos $\bar{u}_1$ al primer vector cuyo λ_i sea distinto de cero), entonces:

$$\bar{u}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar{u}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\bar{u}_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\bar{u}_n$$

Considerando $G = \{\bar{u}_2, \bar{u}_3, ..., \bar{u}_n\}$ se cumple que:
$G \subset F \wedge G \neq F \wedge L(G) = L(F)$ según la observación de la proposición 4.2.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\exists\, G \subset F \wedge G \neq F \mid L(G) = L(F)$
$G \subset F \wedge G \neq F \Leftrightarrow$ Hay vectores, por ejemplo $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m$ $(m < n) \mid$
$\mid \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m \in F \wedge \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m \notin G$, entonces:

$$G = \{\bar{u}_{m+1}, \bar{u}_{m+2}, ..., \bar{u}_n\} \subset F \mid L(G) = L(F)$$

$$\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m \in F \subset L(F) = L(G) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m \in L(G) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{u}_i = \alpha_{i\,m+1}\bar{u}_{m+1} + \alpha_{i\,m+2}\bar{u}_{m+2} + ... + \alpha_{i\,n}\bar{u}_n$$

para $\alpha_{im+1}, \alpha_{im+2}, ..., \alpha_{in} \in K$, $\forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}$ y por tanto sumando y reordenando términos:

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_m \bar{u}_m + \lambda_{m+1}\bar{u}_{m+1} + ... + \lambda_n \bar{u}_n = \bar{0}$$

para $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 1$, $\lambda_{m+1} = -(\alpha_{1\,m+1} + \alpha_{2\,m+1} + ... + \alpha_{m\,m+1})$, ..., $\lambda_n = -(\alpha_{1n} + \alpha_{2n} + ... + \alpha_{mn})$, con lo que F ligado

Proposición 6.2

$F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ ligado $\Leftrightarrow \exists\, \bar{u}_i \in F \mid \bar{u}_i$ es combinación lineal de los restantes vectores de F.

Demostración

Inmediata, teniendo en cuenta la proposición 6.1 anterior y la proposición 4.2.

Proposición 6.3

Sea $G = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\} \subset V$ un sistema libre, entonces: El sistema $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n, \bar{v}\} \subset V$ ligado $\Rightarrow$ el vector $\bar{v}$ es combinación lineal de los vectores de G.

Demostración

Por ser F ligado: $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n,\ \lambda \in K$ no todos nulos tales que

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n + \lambda \bar{v} = \bar{0}.$$

Veremos que tiene que ser $\lambda \neq 0$.

Si fuese $\lambda = 0$, tendríamos que: $\exists\, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in K$ no todos nulos tales que: $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n = \bar{0}$, lo cual es imposible por ser G un sistema libre. Luego será $\lambda \neq 0$.

Entonces:

$$\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n + \lambda \bar{v} = \bar{0} \overset{\lambda \neq 0}{\Rightarrow} \bar{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda} \bar{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} \bar{u}_2 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda} \bar{u}_n$$

es decir, $\bar{v}$ es combinación lineal de los vectores de G.

Proposición 6.4

Sea $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ un sistema de generadores del K-espacio vectorial V y $G = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m\}$ un sistema libre de vectores de V. Entonces se cumple que $m \leq n$ y además

$$V = L(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}) = L(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m, \bar{u}_{m+1}, ..., \bar{u}_n\})$$

Demostración

$G = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m\} \subset V$ y $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ un sistema de generadores de V, luego los vectores $\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_m$ son combinación lineal de los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n$.

— $\bar{v}_1 = \alpha_1 . \bar{u}_1 + \alpha_2 . \bar{u}_2 + ... + \alpha_n . \bar{u}_n / \alpha_i \in K$ (i = 1, 2, ..., n); donde los α_i no pueden ser todos nulos, pues si lo fuesen tendríamos que $\bar{v}_1 = \bar{0}$ y por tanto G no sería libre. De aquí, según la observación de la proposición 4.2 deducimos que:

$$V = L(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}) = L(\{\bar{v}_1, \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\})$$

Supongamos que $\alpha_1 \neq 0$, entonces:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\alpha_1} \bar{v}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \bar{u}_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \bar{u}_n$$

Con lo que según la observación de la proposición 4.2, obtenemos que:

$$V = L(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}) = L(\{\bar{v}_1, \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}) = L(\{\bar{v}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\})$$

— $\bar{v}_2 = \beta_1 . \bar{v}_1 + \beta_2 . \bar{u}_2 + \beta_3 . \bar{u}_3 + ... + \beta_n . \bar{u}_n / \beta_i \in K$ (i = 1, 2, ..., n); donde los β_i no pueden ser todos nulos, pues si lo fuesen tendríamos que $\bar{v}_2 = \bar{0}$ y por tanto G no sería libre. De aquí, según la observación de la proposición 4.2 deducimos que:

$$V = L(\{\bar{v}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, ..., \bar{u}_n\}) = L(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{u}_2, \bar{u}_3, ..., \bar{u}_n\})$$

Además en la expresión $\bar{v}_2 = \beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 + \beta_3 \bar{u}_3 + ... + \beta_n \bar{u}_n$ alguno de los escalares $\beta_2, \beta_3, ..., \beta_n$ tiene que ser distinto de cero, pues si fuesen todos iguales a cero tendríamos que $\bar{v}_2 = \beta_1 \bar{v}_1$ y el sistema $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ sería ligado, lo cual es imposible al ser un subconjunto de G que es libre.

Supongamos que $\beta_2 \neq 0$, entonces:

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\beta_2} \bar{v}_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \bar{v}_1 - \frac{\beta_3}{\beta_2} \bar{u}_3 - ... - \frac{\beta_n}{\beta_2} \bar{u}_n$$

Con lo que, según la observación de la proposición 4.2, obtenemos que:

$$V = L(\{\overline{v}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_n\}) = L(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{u}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_n\}) = L(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{u}_3, ..., \overline{u}_n\})$$

Repitiendo estas operaciones, vemos que los vectores $\overline{u}_i$ (i = 1, 2, ..., n) van siendo sustituidos por los vectores $\overline{v}_j$ (j = 1, 2, ..., m).

— Si $m < n$, se puede sustituir $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_m\}$ por $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m\}$ y se obtiene que el K-espacio vectorial V admite como sistema de generadores a $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m, \overline{u}_{m+1}, ..., \overline{u}_n\}$.

$$V = L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}) = L(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m, \overline{u}_{m+1}, ..., \overline{u}_n\})$$

— Si $m = n$, se puede sustituir $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ por $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ y se obtiene que el K-espacio vectorial V admite como sistema de generadores a $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m\}$.

$$V = L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}) = L(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m\})$$

— Si $m > n$, se puede sustituir $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ por $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$ y se obtiene que el K-espacio vectorial V admite como sistema de generadores a $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\}$, pero en este caso se tiene que en $G = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n, \overline{v}_{n+1}, ..., \overline{v}_m\}$ los vectores $\overline{v}_{n+1}, ..., \overline{v}_m$ son combinación lineal de los vectores $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ y por tanto G no sería libre, luego no puede ser $m > n$.

Entonces, si $F = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ es un sistema de generadores del K-espacio vectorial V y $G = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m\}$ es un sistema libre de vectores de V, se tiene que cumplir que $m \leq n$ y que:

$$V = L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}) = L(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m, \overline{u}_{m+1}, ..., \overline{u}_n\})$$

Con lo cual además se observa que:

Un sistema libre $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m\}$ de V es parte de un sistema $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_m, \overline{u}_{m+1}, ..., \overline{u}_n\}$ de generadores de V.

7. BASES Y DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

Sea un K-espacio vectorial V y consideremos un sistema de vectores $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\} \subset V$.

Definición 7.1

Se dice que el sistema B es una base de V si es un sistema libre de generadores del K-espacio vectorial V.

Ejercicio 15

1.º) Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, demostrar que $B = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

2.º) Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 en la variable x y con coeficientes en $\mathbb{R}$, demostrar que $B = \{1, x, x^2\}$ y $B' = \{1, x + 1, x^2 - 2\}$ son bases de $\mathcal{P}_2$.

Solución

1.º) Veremos que B es libre y que B es un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 = \bar{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 (1, 0, 0) + \lambda_2 (0, 1, 0) + \lambda_3 (0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

y por tanto B libre.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x_1 (1, 0, 0) + x_2 (0, 1, 0) + x_3 (0, 0, 1) / x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} =$$
$$= L(B) \Leftrightarrow B \text{ genera } \mathbb{R}^3.$$

$B = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ es la base más sencilla de $\mathbb{R}^3$ y se llama «base canónica de $\mathbb{R}^3$».

2.º) Veremos que $B = \{1, x, x^2\}$ es libre y que B es un sistema de generadores de $\mathcal{P}_2$.

$$\lambda_1 . 1 + \lambda_2 . x + \lambda_3 . x^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

y por tanto B libre.

$\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c / a, b, c \in \mathbb{R}\} = L(\{x^2, x, 1\}) = L(B) \Leftrightarrow$ B genera $\mathcal{P}_2$.

$B = \{1, x, x^2\}$ es la base más sencilla de $\mathcal{P}_2$ y se le llama base canónica de $\mathcal{P}_2$.

Veremos que $B' = \{1, x + 1, x^2 - 2\}$ es libre y que B' es un sistema de generadores de $\mathcal{P}_2$.

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 (x + 1) + \lambda_3 (x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

y por tanto B libre.

$$\forall\, ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 \quad \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} /$$

$$/\, ax^2 + bx + c = \alpha_1 (x^2 - 2) + \alpha_2 (x + 1) + \alpha_3 . 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b \\ \alpha_3 = c + 2a - b \end{cases}$$

Entonces:

$\mathcal{P}_2 = \{ax^2 + bx + c = a (x^2 - 2) + b (x + 1) + (c + 2a - b) . 1 / a, b, c \in \mathbb{R}\} =$
$= L(\{x^2 - 2, x + 1, 1\}) \Leftrightarrow$ B' genera $\mathcal{P}_2$.

Proposición 7.1

Sea un K-espacio vectorial V engendrado por un sistema finito de vectores. Entonces, existe al menos una base de V.

Demostración

Sea $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ un sistema de generadores de V. Si F es libre, entonces F es una base de V.

Si F no es libre, será ligado y por lo tanto, al menos uno de sus vectores es combinación lineal de los demás. Suponemos que es el $\bar{u}_1$, lo suprimimos y consideramos el sistema $\{\bar{u}_2, \bar{u}_3, ..., \bar{u}_n\}$ que según la observación de la proposición 4.2 cumple:

$$V = L(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}) = L(\{\bar{u}_2, \bar{u}_3, ..., \bar{u}_n\})$$

Si $\{\bar{u}_2, \bar{u}_3, ..., \bar{u}_n\}$ es libre, entonces es una base de V.

Si $\{\bar{u}_2, \bar{u}_3, ..., \bar{u}_n\}$ no es libre, será ligado y por lo tanto, al menos uno de sus vectores es combinación lineal de los demás. Suponemos que es el $\bar{u}_2$, lo suprimimos y consideramos el sistema $\{\bar{u}_3, \bar{u}_4, ..., \bar{u}_n\}$ que sabemos que cumple:

$$V = L(\{\bar{u}_2, \bar{u}_3, ..., \bar{u}_n\}) = L(\{\bar{u}_3, \bar{u}_4, ..., \bar{u}_n\})$$

Si $\{\bar{u}_3, \bar{u}_4, ..., \bar{u}_n\}$ es libre, entonces es una base de V.

Si $\{\bar{u}_3, \bar{u}_4, ..., \bar{u}_n\}$ no es libre, repetimos el proceso reduciendo el número de vectores del sistema finito de generadores hasta obtener un sistema libre que será una base de V y tendrá un número p de vectores tal que $1 \leq p \leq n$.

Proposición 7.2

En un K-espacio vectorial V engendrado por un sistema finito de vectores, todas las bases tienen el mismo número de vectores.

Demostración

Sean $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ y $B' = \{\bar{u}'_1, \bar{u}'_2, ..., \bar{u}'_m\}$ bases del K-espacio vectorial V.

$$\left.\begin{array}{l} \text{B libre y B' sistema generador de V} \overset{\text{P. 6.4}}{\Rightarrow} n \leq m \\ \text{B' libre y B sistema generador de V} \overset{\text{P. 6.4}}{\Rightarrow} m \leq n \end{array}\right\} \Rightarrow n = m$$

Definición 7.2

Se llama dimensión de un K-espacio vectorial V al número de vectores de una base de V. Lo notaremos por dim(V).

Consecuencias

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n, entonces se cumplen:

1.º) $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\} \subset V$ libre $\Rightarrow m \leq n$.
2.º) $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\} \subset V \,/\, m > n \Rightarrow$ F ligado.
3.º) $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\} \subset V$, entonces: F libre $\Leftrightarrow$ F sistema generador de V.

Demostración

1.º) Como dim(V) = n, $\exists$ B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ base de V, entonces:

F libre y B sistema generador de V $\overset{\text{P. 6.4}}{\Rightarrow}$ $m \leq n$

2.º) Como dim(V) = n, $\exists$ B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ base de V, entonces:
Si F fuese libre, sería $m \leq n$, pero la hipótesis dice que $m > n$, luego F tiene que ser ligado.

3.º) $\Rightarrow$) Si F libre, tiene que ser F sistema generador de V pues:
Si F no fuera sistema generador de V existirá al menos un vector $\bar{x} \in V$ / $\bar{x}$ no es combinación lineal de los vectores de F, con lo que el sistema de n + 1 vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n, \bar{x}\} \subset V$ sería libre (por la proposición 6.3), lo cual es imposible por ser dim(V) = n, entonces F tiene que ser sistema generador de V.

$\Leftarrow$) Si F sistema generador de V, tiene que ser F libre pues:
Si F ligado, habría una base de V con menos de n vectores, lo cual es imposible, luego F libre.

Observamos que esta tercera consecuencia dice que:
Si $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ es un sistema de vectores de un K-espacio vectorial de dimensión finita n, entonces:
Basta con que F libre o F sistema generador de V para que F sea base de V.

8. COORDENADAS DE UN VECTOR

Proposición 8.1

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n y sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ una base de V, entonces:

$$\forall\, \bar{x} \in V \;\; \exists\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \text{ únicos } / \; \bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + ... + \alpha_n \bar{e}_n \qquad (1)$$

Demostración

Como $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ es un sistema generador de V, tendremos que:

$$\forall\, \bar{x} \in V \;\; \exists\, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K \;\; / \; \bar{x} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + ... + \alpha_n \bar{e}_n$$

Veremos que los escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ son únicos.

Suponemos que también $\exists\, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in K \;\; / \; \bar{x} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + ... + \beta_n \bar{e}_n$.

Entonces:

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + ... + \alpha_n \bar{e}_n = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2 + ... + \beta_n \bar{e}_n \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (\alpha_1 - \beta_1) \bar{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \bar{e}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n) \bar{e}_n = \bar{0} \overset{\text{B libre}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\; \alpha_1 = \beta_1,\;\; \alpha_2 = \beta_2,\;\; ...,\; \alpha_n = \beta_n$$

Definición 8.1

A los n escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ de la expresión (1) se les llama coordenadas del vector $\bar{x}$ en la base B.

9. DIMENSION DE UN SUBESPACIO VECTORIAL

Sea un subespacio vectorial S de un K-espacio vectorial y consideremos un sistema de vectores $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r\} \subset S$.

Definición 9.1

Se dice que B es base de S si B es libre y sistema generador de S.

Definición 9.2

Se llama dimensión del subespacio vectorial S a la dimensión de S considerado como K-espacio vectorial, es decir, al número de vectores de una base de S.

Proposición 9.1

Sea un K-espacio vectorial V de dimensión finita n, entonces:

1.º) S subespacio vectorial de V $\Rightarrow$ dim(S) $\leq$ n.
2.º) dim S = n $\Rightarrow$ S = V.

Demostración

1.º) Sea dim S = m, entonces $\exists$ B = $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\}$ base de S.

B sistema libre de vectores de S $\overset{S \subset V}{\Rightarrow}$ B sistema libre de vectores de V $\overset{\dim V = n}{\Rightarrow}$ m = dım S $\leq$ n

2.º) dim S = dim V = n, entonces $\exists$ B = $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ base de S que por ser un sistema libre de V también será base de V, luego S = V = = L ($\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$).

Ejercicio 16

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ de los polinomios de grado menor o igual que 2 en la variable x y con coeficientes en $\mathbb{R}$.

1.º) Demostrar que S = $\{p(x) \in \mathcal{P}_2 / \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$.
2.º) Dados los polinomios: $r(x) = x^2 - x + 2$ y $t(x) = 3x^2 + x - 1$. Probar que $r(x) \notin S$ y que $t(x) \in S$.
3.º) Hallar la dimensión de S detallando una base B de S.
4.º) Hallar las coordenadas de $t(x) \in S$ en la base B de S.

Solución

1.º) S = $\{p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2 / \int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0\} \subset \mathcal{P}_2$.

$p_o(x) = 0$ cumple: $\int_{-1}^{1} p(x)\, dx = 0$, luego $p_o(x) \in S$ y $S \neq \varnothing$.

S subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2 \Leftrightarrow \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall p(x), q(x) \in S$

$$\alpha p(x) + \beta q(x) \in S$$

$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\forall p(x), q(x) \in S$ es:

$$\int_{-1}^{1} [\alpha p(x) + \beta q(x)]\, dx = \alpha \int_{-1}^{1} p(x)\, dx + \beta \int_{-1}^{1} q(x)\, dx = 0$$

Por tanto S subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2$.

2.º)

$$\int_{-1}^{1} r(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - x + 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{14}{3} \neq 0 \Rightarrow r(x) \notin S$$

$$\int_{-1}^{1} t(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (3x^2 + x - 1)\, dx = \left[x^3 + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow t(x) \in S$$

3.º) $S = \{p(x) = ax^2 + bx + c \,/\, \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c)\, dx = 0\} =$

$$= \left\{p(x) = ax^2 + bx + c \,/\, \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-1}^{1} = 0\right\} =$$

$$= \{p(x) = ax^2 + b + c \,/\, a = -3c\} =$$

$$= \{p(x) = -3cx^2 + bx + c = c\,(-3x^2 + 1) + bx \,/\, c, b \in \mathbb{R}\} =$$

$$= L\,(\{-3x^2 + 1, x\}).$$

Veremos que los polinomios $-3x^2 + 1$, x son linealmente independientes.

$$\lambda_1\,(-3x^2 + 1) + \lambda_2 \,.\, x = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Luego $B = \{-3x^2 + 1, x\}$ es una base de S y por tanto dim S = 2.

4.º) Las coordenadas de t(x) respecto de B serán los escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tales que:

$$t(x) = \alpha_1 (-3x^2 + 1) + \alpha_2 \cdot x \Leftrightarrow 3x^2 + x - 1 = \alpha_1 (-3x^2 + 1) + \alpha_2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3\alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = -1 \wedge \alpha_2 = 1$$

Proposición 9.2

Sean S y T dos subespacios vectoriales de dimensión finita de un K-espacio vectorial V. Entonces los subespacios vectoriales $S \cap T$ y $S + T$ son también de dimensión finita y se cumple que:

$$\dim (S + T) = \dim (S) + \dim (T) - \dim (S \cap T).$$

Demostración

Supongamos que $\dim (S) = m$, $\dim (T) = n$ y $\dim (S \cap T) = r$.

$S \cap T$ es un subespacio vectorial de S y de T y por tanto $r \leq m$ y $r \leq n$.

Sea $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r\}$ una base de $S \cap T$, construiremos a partir de ella una base de S y otra de T, por ejemplo:

$B_1 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r, \overline{u}_{r+1}, ..., \overline{u}_m\}$ base de S y

$B_2 = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r, \overline{w}_{r+1}, ..., \overline{w}_n\}$ base de T.

Consideremos el sistema de vectores $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r, \overline{u}_{r+1}, ..., \overline{u}_m, \overline{w}_{r+1}, ..., \overline{w}_n\}$ que tienen $m + n - r$ vectores. Veremos que B es base de $S + T$.

$$S = L(B_1) \wedge T = L(B_2) \Rightarrow S + T = L(B_1 \cup B_2) = L(B)$$

Luego B es un sistema de generadores de $S + T$.

Probaremos ahora que B es libre, para ello partimos de la expresión vectorial:

$$\alpha_1 \overline{v}_1 + \alpha_2 \overline{v}_2 + ... + \alpha_r \overline{v}_r + \beta_{r+1} \overline{u}_{r+1} + ... + \beta_m \overline{u}_m + \gamma_{r+1} \overline{w}_{r+1} + ... + \gamma_n \overline{w}_n = \overline{0} \quad (1)$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \beta_{r+1}, ..., \beta_m, \gamma_{r+1}, ..., \gamma_n \in K$

Llamemos $\bar{v} = \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + ... + \alpha_r \bar{v}_r + \beta_{r+1} \bar{u}_{r+1} + ... + \beta_m \bar{u}_m \in S$.
Por (1) tenemos que $\bar{v} = -\gamma_{r+1} \bar{w}_{r+1} - ... - \gamma_n \bar{w}_n \in T$.
Luego $\bar{v} \in S \cap T$ y como $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_r\}$ es base de $S \cap T$, será:

$$\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + ... + \lambda_r \bar{v}_r$$

Entonces:

$$\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + ... + \alpha_r \bar{v}_r + \beta_{r+1} \bar{u}_{r+1} + ... + \beta_m \bar{u}_m + \gamma_{r+1} \bar{w}_{r+1} + ... + \gamma_n \bar{w}_n = \bar{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{v} + \gamma_{r+1} \bar{w}_{r+1} + ... + \gamma_n \bar{w}_n = \bar{0} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + ... + \lambda_r \bar{v}_r + \gamma_{r+1} \bar{w}_{r+1} + ... + \gamma_n \bar{w}_n = \bar{0} \overset{B_2 \text{ base de T}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = \gamma_{r+1} = ... = \gamma_n = 0 \overset{\text{sustituyendo en (1)}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + ... + \alpha_r \bar{v}_r + \beta_{r+1} \bar{u}_{r+1} + ... + \beta_m \bar{u}_m = \bar{0} \overset{B_1 \text{ base de S}}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = \beta_{r+1} = ... = \beta_m = 0$$

y por tanto B es un sistema libre.

B libre y B sistema generador de $S + T \Leftrightarrow$ B base de $S + T$ y $\dim (S + T) = m + n - r = \dim S + \dim T - \dim (S \cap T)$.

Ejercicio 17

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ de los polinomios de grado menor o igual que dos en la variable x y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Consideremos los subespacios vectoriales de $\mathcal{P}_2$: $S_1 = \{p(x) \in \mathcal{P}_2 / p(1) + p'(1) = 0\}$ y $S_2 = L(\{x^2 - 1, 1\})$. Hallar la dimensión de los subespacios vectoriales S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ y $S_1 + S_2$. ¿Es $\mathcal{P}_2 = S_1 \oplus S_2$?

Solución

$$S_1 = \{p(x) = ax^2 + bx + c / a \,.\, 1^2 + b \,.\, 1 + c + 2a \,.\, 1 + b = 0\} =$$
$$= \{p(x) = ax^2 + bx + c / c = -3a - 2b\} =$$
$$= \{p(x) = ax^2 + bx + (-3a - 2b) = a\,(x^2 - 3) + b\,(x - 2) / a, b \in \mathbb{R}\} =$$
$$= L\,(\{x^2 - 3, x - 2\})$$

Además es inmediato que $x^2 - 3$ y $x - 2$ son linealmente independientes.

Luego $\{x^2 - 3, x - 2\}$ es base de S_1 y $\dim(S_1) = 2$.

$$S_2 = L(\{x^2 - 1, 1\})$$

Es inmediato probar que $x^2 - 1$ y 1 son linealmente independientes.
Luego $\{x^2 - 1, 1\}$ es base de S_2 y $\dim(S_2) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = L(\{x^2 - 3, x - 2\}) \\ S_2 = L(\{x^2 - 1, 1\}) \end{array}\right. \Rightarrow S_1 + S_2 = L(\{x^2 - 3, x - 2, x^2 - 1, 1\})$$

Pero $x^2 - 3 = 1 \,.\, (x^2 - 1) - 2 \,.\, (1)$ luego:

$$S_1 + S_2 = L(\{x^2 - 1, x - 2, 1\})$$

Además es inmediato probar que $x^2 - 1, x - 2, 1$ son linealmente independientes.

Luego $\{x^2 - 1, x - 2, 1\}$ es base de $S_1 + S_2$ y $\dim(S_1 + S_2) = 3$, y aplicando el Teorema anterior tenemos que:

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 + S_2) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Como $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$ será $S_1 \cap S_2 \neq \{0\}$ y $\mathcal{P}_2$ no es suma directa de $S_1 + S_2$ aunque $S_1 + S_2 = \mathcal{P}_2$.

10. RANGO DE UN SISTEMA DE VECTORES

Sea un K-espacio vectorial V y consideremos un sistema finito

$$F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\} \text{ de vectores de V.}$$

Definición 10.1

Se llama rango del sistema de vectores F y se representa por r(F) al número máximo de vectores linealmente independientes de F.

Observaciones

A partir de la definición es inmediato ver que:

$$1 \leq r(F) \leq n \qquad \text{y que} \qquad r(F) = \dim L(F)$$

Ejercicio 18

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{F}$ de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Consideremos el sistema $G = \{f_1, f_2, f_3\} \subset \mathcal{F}$ tal que:

$$f_1(x) = 1, \qquad f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x, \qquad f_3(x) = \cos 2x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1.º) Hallar $r(G)$.
2.º) Hallar una base y la dimensión de $L(G)$.
3.º) Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$ tales que: $g_1(x) = \cos^2 x$, $g_2(x) = \operatorname{sen} x \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Determinar si $g_1 \wedge g_2$ pertenecen a $L(G)$.

Solución

1.º) $f_3(x) = \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ luego:

$$f_3 = 1 \,.\, f_1 - 2f_2 \;\Rightarrow\; r(G) = r\,\{f_1, f_2\}$$

Veremos si $f_1 \wedge f_2$ son linealmente independientes.

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = f_o \;\Leftrightarrow\; \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = f_o(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \lambda_1 \,.\, 1 + \lambda_2 \operatorname{sen}^2 x = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tomando } x = 0: \;\; \lambda_1 = 0 \\ \text{Tomando } x = \dfrac{\pi}{2}: \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Luego $f_1 \wedge f_2$ son linealmente independientes y $r(G) = 2$.

2.º) $r(G) = \dim L(G) = 2$ y una base es $B = \{f_1, f_2\}$.

3.º) Es inmediato ver que:

$$g_1(x) = \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 \,.\, f_1(x) - 1.\, f_2(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; g_1 = 1 \,.\, f_1 - 1.\, f_2$$

Luego $g_1 \in L(\{f_1, f_2\}) = L(G)$

En cambio, $g_2(x) = \operatorname{sen} x$ no parece de inmediato una combinación lineal de $f_1 \wedge f_2$.

g_2 combinación lineal de $f_1 \wedge f_2 \;\Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \;/\; g_2 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \;/\; \operatorname{sen} x = \lambda_1 + \lambda_2 \operatorname{sen}^2 x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tomando } x = \dfrac{\pi}{2} : 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{Tomando } x = \dfrac{3\pi}{2} : -1 = \lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right\}$$

lo cual es absurdo, luego $\nexists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \forall\ x \in \mathbb{R}$ se cumpla:

$$\operatorname{sen} x = \lambda_1 + \lambda_2 \operatorname{sen}^2 x \qquad \text{y por tanto} \qquad g_2 \notin L(\{f_1, f_2\}) = L(G)$$

Ejercicio 19

Sea $\mathcal{C}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Consideremos el conjunto S de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = a + b \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c \cos 2x \qquad \forall\ x \in \mathbb{R} / a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que S subespacio vectorial de G y hallar una base y la dimensión de S.

Solución

$$S = \{f / f(x) = a + b \operatorname{sen} \frac{x}{2} + c \cos 2x \quad \forall\ x \in \mathbb{R} \wedge a, b, c \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{f = a f_1 + b f_2 + c f_3 / f_1(x) = 1, f_2(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}, f_3(x) = \cos 2x \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}\} =$$

$$= L(\{f_1, f_2, f_3\}) \subset \mathcal{C} \Rightarrow$$

el subconjunto S no vacío de $\mathcal{C}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}$ y $\{f_1, f_2, f_3\}$ es un sistema generador de S.

Además:

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = f_o \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \lambda_3 \cos 2x = 0 \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 : \quad \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ x = \pi : \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} : \ \lambda_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Luego $\{f_1, f_2, f_3\}$ es un sistema libre.

Entonces $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ donde $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$ y $f_3 = \cos 2x$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$ es una base de S y $\dim S = 3$.

Ejercicio 20

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y consideremos:

Los vectores: $\bar{u} = (a_1, a_2)$ y $\bar{v} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ y los subespacios vectoriales:

$$S_1 = \{(x_1, x_2) / \alpha x_1 + \beta x_2 = 0\}$$

y

$$S_2 = \{(x_1, x_2) / \alpha' x_1 + \beta' x_2 = 0\}$$

donde $\alpha, \beta, \alpha' \wedge \beta'$ son números reales distintos de cero.

1.º) Demostrar que: $\bar{u}, \bar{v}$ linealmente dependientes $\Leftrightarrow$ $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

2.º) Demostrar que: $\alpha \beta' - \beta \alpha' \neq 0 \Rightarrow \mathbb{R}^2 = S_1 \oplus S_2$.

Solución

1.º) $\bar{u}, \bar{v}$ linealmente dependientes $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \bar{v} = \lambda \bar{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / (b_1, b_2) = \lambda (a_1, a_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / b_1 = \lambda a_1 \wedge b_2 = \lambda a_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / a_2 b_1 = a_2 \lambda . a_1 \wedge a_1 b_2 = a_1 . \lambda a_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$

2.º) Veremos que $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0)\}$ y que $\mathbb{R}^2 = S_1 + S_2$.

$$(x_1, x_2) \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in S_1 \wedge (x_1, x_2) \in S_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ \wedge \\ \alpha' x_1 + \beta' x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha' \alpha x_1 + \alpha' \beta x_2 = 0 \\ \wedge \\ \alpha \alpha' x_1 + \alpha \beta' x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha \beta' - \alpha' \beta) x_2 = 0 \\ \wedge \\ \alpha' \alpha x_1 + \alpha' \beta x_2 = 0 \end{cases} \overset{\alpha \beta' - \alpha' \beta \neq 0}{\Leftrightarrow} x_2 = x_1 = 0$$

Luego $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0)\}$.

Además es inmediato que: $\dim (S_1) = \dim (S_2) = 1$ y como

$$\dim (S_1 + S_2) = \dim (S_1) + \dim (S_2) - \dim (S_1 \cap S_2)$$

tendremos que:

$$\dim (S_1 + S_2) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

Luego será $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 21

Sean E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial tridimensional y $B = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ una base de E.

Consideremos los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{u}, \bar{v} \in E$ definidos por:

$$\bar{e}_1 = \bar{i} - \bar{j}\,, \qquad \bar{e}_2 = \bar{i} + \bar{k}$$
$$\bar{u} = \bar{j} + \bar{k}\,, \qquad \bar{v} = \bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k}$$

1.º) Demostrar que el subespacio vectorial $S = L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ es de dimensión 2.

2.º) Demostrar que los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$ pertenecen al subespacio vectorial $S = L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ y hallar las coordenadas de $\bar{u}$ y $\bar{v}$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ del subespacio vectorial S.

3.º) Demostrar que $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es una base del subespacio vectorial S y hallar las coordenadas del vector $\bar{x} = -2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 \in S$ en la base $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ del subespacio vectorial S.

4.º) Sea el subespacio vectorial $T = L(\{\bar{j} - \bar{k}\})$ de E. Hallar $S + T$.

Solución

1.º) Como $S = L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ para demostrar que $\dim (S) = 2$ habrá que demostrar que $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ son linealmente independientes.

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda_1 (\bar{i} - \bar{j}) + \lambda_2 (\bar{i} + \bar{k}) = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_2)\bar{i} - \lambda_1 \bar{j} + \lambda_2 \bar{k} = \bar{0} \overset{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}}{\underset{\text{l. i.}}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Luego $\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2$ son linealmente independientes y como $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ es un sistema generador de S, tendremos que dim (S) = 2.

2.º)

$$\bar{u} \in S = L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}) \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \bar{u} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \bar{j} + \bar{k} = \lambda_1 (\bar{i} - \bar{j}) + \lambda_2 (\bar{i} + \bar{k}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 1$$

Luego $\exists\, \lambda_1 = -1 \wedge \lambda_2 = 1 / \bar{u} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ y por tanto $\bar{u} \in S$.

$$\bar{v} \in S = L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}) \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \bar{v} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \bar{i} - 3\bar{j} - 2\bar{k} = \lambda_1 (\bar{i} - \bar{j}) + \lambda_2 (\bar{i} + \bar{k}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -\lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = 3 \wedge \lambda_2 = -2$$

Luego $\exists\, \lambda_1 = 3 \wedge \lambda_2 = -2 / \bar{v} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ y por tanto $\bar{v} \in S$.

De que $\bar{u} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ deducimos que las coordenadas de $\bar{u}$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ son $-1 \wedge 1$.

De que $\bar{v} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ deducimos que las coordenadas de $\bar{v}$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ son $3 \wedge -2$.

3.º) Como dim S = 2, para probar que $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ es base de S bastará con ver que $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente independientes.

$$\lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda_1 (-\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + \lambda_2 (3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ +\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Luego $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente independientes.

$$\begin{cases} \bar{u} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \\ \bar{v} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{e}_1 = 2\bar{u} + \bar{v} \\ \bar{e}_2 = 3\bar{u} + \bar{v} \end{cases}$$

$$\bar{x} = -2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 = -2\,(2\bar{u} + \bar{v}) + 3\bar{u} + \bar{v} = -\bar{u} - \bar{v}$$

y por tanto las coordenadas de $\bar{x}$ en la base $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ son $-1 \wedge -1$.

4.º)

$$T = L(\{\bar{j} - \bar{k}\})$$
$$S = L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}) = L(\{\bar{i} - \bar{j},\ \bar{i} + \bar{k}\}) \Rightarrow S + T = L(\{\bar{i} - \bar{j},\ \bar{i} + \bar{k},\ \bar{j} - \bar{k}\})$$

Además:

$$\lambda_1(\bar{i} - \bar{j}) + \lambda_2(\bar{i} + \bar{k}) + \lambda_3(\bar{j} - \bar{k}) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Luego $\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{i} + \bar{k}$, $\bar{j} - \bar{k}$ son linealmente independientes, con lo que será: dim (S + T) = 3 = dim E y S + T subespacio vectorial de E, de donde deducimos que: S + T = E.

Ejercicio 22

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_3$ de los polinomios de grados menor o igual que 3 en la variable x y con coeficientes en $\mathbb{R}$. Consideremos el subespacio vectorial $S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \,/\, a + b = c + d = 0\}$ de $\mathcal{P}_3$.

1.º) Hallar una base B de S.

2.º) Completar el sistema libre B de $\mathcal{P}_3$ hasta obtener una base B' de $\mathcal{P}_3$.

3.º) Hallar un subespacio vectorial T de $\mathcal{P}_3$ tal que $\mathcal{P}_3 = S \oplus T$.

Solución

1.º)

$$S = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \,/\, a + b = c + d = 0\} =$$
$$= \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \,/\, b = -a \wedge d = -c\} =$$
$$= \{p(x) = ax^3 - ax^2 + cx - c = a\,(x^3 - x^2) + c\,(x - 1) \,/\, a, c \in \mathbb{R}\} =$$
$$= L(\{x^3 - x^2, x - 1\})$$

Además:

$$\lambda_1 (x^3 - x^2) + \lambda_2 (x - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

y por tanto $\{x^3 - x^2, x - 1\}$ es un sistema libre.

Entonces:

$$B = \{x^3 - x^2, x - 1\} \text{ es una base de } S$$

2.º) $\dim \mathcal{P}_3 = 4$, luego $B' = \{x^3 - x^2, x - 1, p(x), q(x)\}$ donde $x^3 - x^2$, $x - 1$, $p(x)$ y $q(x)$ tienen que ser linealmente independientes.

Sabemos que $\{x^3 - x^2, x - 1\}$ es un sistema libre y para que $\{x^3 - x^2, x - 1, p(x), q(x)\}$ sea también un sistema libre debe ser:

$$p(x) \neq \alpha (x^3 - x^2) + \beta (x - 1) = \alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \beta$$

Luego podemos tomar, por ejemplo, $p(x) = 2x^2 + 1$.

Además, para que $\{x^3 - x^2, x - 1, 2x^2 + 1, q(x)\}$ sea libre, debe ser:

$$q(x) \neq \alpha(x^3 - x^2) + \beta(x - 1) + \gamma(2x^2 + 1) = \alpha x^3 + (-\alpha + 2\gamma)x^2 + \beta x + (-\beta + \gamma)$$

Luego podemos tomar, por ejemplo, $q(x) = 1$.

Entonces:

$$B' = \{x^3 - x^2, x - 1, 2x^2 + 1, 1\} \text{ es una base de } \mathcal{P}_3$$

3.º)

$\mathcal{P}_3 = S \oplus T \Leftrightarrow S \cap T = \{0\} \wedge \mathcal{P}_3 = S + T$
$S = L(\{x^3 - x^2, x - 1\})$.

Según el apartado 2.º) es inmediato que puede ser:

$$T = L(\{2x^2 + 1, 1\}) \subset \mathcal{P}_3$$

el subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3$ que cumple:

$S + T = L(\{x^3 - x^2, x - 1, 2x^2 + 1, 1\} = \mathcal{P}_3$ y
$S \cap T = \{0\}$ (pues $\dim (S \cap T) = \dim (S) + \dim (T) - \dim (S + T) = 0$)

Ejercicio 23

En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideremos una base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ y un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$ cuyas coordenadas respecto de B son: 1, –1, 0, 1.

1.º) Demostrar que $U = \{\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4\}$ es un sistema libre.
2.º) Completar U hasta obtener una base B' de $\mathbb{R}^4$ tal que las coordenadas del vector $\bar{x}$ respecto de B' sean 1, 1, 1, 1.

Solución

1.º) $\lambda_1 (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + \lambda_2 (\bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4) = \bar{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 \bar{u}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \bar{u}_2 + \lambda_2 \bar{u}_3 + \lambda_2 \bar{u}_4 = \bar{0} \overset{\text{B base}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Luego U es libre.

2.º) Será $B' = \{\bar{u}_1 + \bar{u}_2, \bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4, \bar{v}, \bar{w}\}$ hallaremos $\bar{v}$, $\bar{w}$ de forma que B' sea libre y que:

$$\bar{x} = 1 \cdot \bar{u}_1 - 1 \cdot \bar{u}_2 + 0 \cdot \bar{u}_3 + 1 \cdot \bar{u}_4 =$$
$$= 1 \cdot (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + 1 \cdot (\bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4) + 1 \cdot \bar{v} + 1 \cdot \bar{w} \Leftrightarrow$$
$$\bar{x} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 + \bar{u}_4 = \bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4 + \bar{v} + \bar{w}$$

Luego puede ser: $\bar{v} = -3\bar{u}_2 \wedge \bar{w} = -\bar{u}_3$
Comprobaremos que B' es libre

$$\lambda_1 (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + \lambda_2 (\bar{u}_2 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4) + \lambda_3 (-3\bar{u}_2) + \lambda_4 (-\bar{u}_3) = \bar{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Luego B' es una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 24

En el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ consideremos el subespacio vectorial:

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$$

1.º) Hallar una base y la dimensión de S_1.
2.º) Hallar dos subespacios vectorial es S_2 y S_3 de $\mathbb{R}^4$ que sean distintos y tales que $\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2 = S_1 \oplus S_3$.

Solución

1.º)

$$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0\} =$$
$$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_1 = x_2 + x_3 + x_4\} =$$
$$= \{(x_2 + x_3 + x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2 (1, 1, 0, 0) + x_3 (1, 0, 1, 0) + x_4 (1, 0, 0, 1) /$$
$$/x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = L (\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), 1, 0, 0, 1)\})$$

Además:

$$\lambda_1 . (1, 1, 0, 0) + \lambda_2 (1, 0, 1, 0) + \lambda_3 (1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Luego B es un sistema libre.

Entonces $B = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ es una base de S_1 y $\dim (S_1) = 3$.

2.º)

$$\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_2 \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0, 0)\} \wedge \mathbb{R}^4 = S_1 + S_2$$
$$\mathbb{R}^4 = S_1 \oplus S_3 \Leftrightarrow S_1 \cap S_3 = \{(0, 0, 0, 0)\} \wedge \mathbb{R}^4 = S_1 + S_3$$

y por tanto: $\dim (S_1) + \dim (S_2) = \dim (S_1) + \dim (S_3) = 4$

Luego: $\dim (S_2) = \dim (S_3) = 1$ y $S_2 = L (\{\bar{u}\}) \wedge S_3 = L (\{\bar{v}\})$ con $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^4$ tales que:

$$\bar{u} \neq \alpha (1, 1, 0, 0) + \beta (1, 0, 1, 0) + \gamma (1, 0, 0, 1) = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma)$$
$$\bar{v} \neq \alpha (1, 1, 0, 0) + \beta (1, 0, 1, 0) + \gamma (1, 0, 0, 1) = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta, \gamma)$$

y además $\bar{u} \neq \lambda \bar{v}$ pues $S_2 \neq S_3$.

Entonces podemos tomar por ejemplo:

$$\bar{u} = (1, 0, 0, 0)$$
$$\bar{v} = (3, 0, 0, -1)$$

con lo que tendremos:

$$S_2 = L (\{(1, 0, 0, 0)\})$$
$$S_3 = L (\{(3, 0, 0, -1)\})$$

Tema II

Matrices

1. MATRICES

Consideremos un cuerpo conmutativo K.

Definición 1.1

Se denomina matriz de orden mxn a toda distribución de m . n elementos $a_{ij} \in K$ dispuestos en m filas y n columnas.

Si A es una matriz de orden $m \times n$, se denotará:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \qquad o \qquad A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Para cada elemento a_{ij}, el subíndice i (respectivamente el subíndice j) representa la fila (respectivamente la columna) en la que está situado dicho elemento.

Si $I = \{1, 2, ..., m\}$ y $J = \{1, 2, ..., n\}$, la matriz A de un orden $m \times n$ se puede interpretar como una aplicación $f: I \times J \to K$ definida por:

$$f(i, j) = a_{ij} \quad \forall (i, j) \in I \times J$$

Pasemos a definir algunas matrices especiales:

Se denomina matriz fila, (respectivamente matriz columna) a toda matriz de orden $1 \times n$ (respectivamente $m \times 1$).

$$[a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n}], \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Se denomina matriz nula, a toda matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ tal que $a_{ij} = 0$ $\forall$ (i, j) ϵ $I \times J$. A la matriz nula de orden $m \times n$ se la denota abreviadamente $[0]_{m \times n}$.

Se denomina matriz opuesta de una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ a la matriz denotada $-A$ y definida por $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$.

Se denomina matriz cuadrada de orden n, a toda matriz de orden $n \times n$. Llamaremos diagonal principal de una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ de orden n, a la sucesión de elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ de A.

Observemos que si A es una matriz cuadrada de orden n, el conjunto I de los indicadores de fila citado anteriormente viene dado por $I = J = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Se denomina matriz triangular superior (respectivamente matriz triangular inferior), a toda matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$ (respectivamente $a_{ij} = 0$ para $i < j$).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se denomina matriz diagonal, a toda matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tal que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Se denomina matriz escalar, a toda matriz diagonal tal que los elementos a_{ij} correspondientes a la diagonal principal son todos iguales a un escalar fijo $\lambda \in K$. En particular, si $\lambda = 1$ la matriz escalar se denomina matriz unidad.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Se denomina matriz simétrica (respectivamente matriz antisimétrica), a toda matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tal que $a_{ij} = a_{ji} \ \forall (i, j) \in J \times J$ (respectivamente $a_{ij} = -a_{ji} \ \forall (i, j) \in J \times J$). Observemos que si $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ es antisimétrica, entonces $a_{ii} = 0 \ \forall i \in J$.

Definición 1.2

Dos matrices $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ del mismo orden se dicen iguales, denotándose $A = B$, si $a_{ij} = b_{ij} \ \forall (i, j) \in I \times J$.

2. SUMA O ADICION DE MATRICES. PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Representemos por $M_{m \times n}(K)$ al conjunto de las matrices de orden $m \times n$ definidas sobre el cuerpo conmutativo K.

Definición 2.1

Se denomina suma de las matrices $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$, a la matriz $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \in M_{m \times n}(K)$.

Definición 2.2

Se denomina producto de un escalar $\lambda \in K$ por la matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$, a la matriz $\lambda \cdot A = [\lambda \cdot a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$.

Según estas definiciones tenemos definidas en $M_{m \times n}(K)$ una ley de composición interna (+) «suma o adición de matrices» y una ley de com-

posición externa (.) «producto de un escalar por una matriz» con dominio de operadores K.

Proposición 2.1

1.º) $M_{m \times n}(K)$ es un K-espacio vectorial respecto de las leyes de composición que acabamos de definir.
2.º) $\dim [M_{m \times n}(K)] = m \cdot n$

Demostración

1.º) Veamos que $M_{m \times n}(K)$ tiene estructura de grupo abeliano respecto de la ley de composición interna (+):

— La ley de composición interna (+) es asociativa en $M_{m \times n}(K)$:

$$\forall\ A = [a_{ij}]_{m \times n},\ B = [b_{ij}]_{m \times n},\ C = [c_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$$

$$\begin{aligned}(A + B) + C &= ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) + [c_{ij}]_{m \times n} = \\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} = \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} = \\ &= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n} = \\ &= [a_{ij}]_{m \times n} + ([b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n}) = A + (B + C)\end{aligned}$$

— Existe elemento neutro en $M_{m \times n}(K)$ respecto de la ley de composición interna (+):

$$\forall\ A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K) \quad \exists\ [0]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)\ /$$
$$[a_{ij}]_{m \times n} + [0]_{m \times n} = [0]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

— Cada elemento de $M_{m \times n}(K)$ tiene elemento simétrico en $M_{m \times n}(K)$ respecto de la ley de composición interna (+):

$$\forall\ A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K) \quad \exists\ -A = [-a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)\ /$$
$$[a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [-a_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = [0]_{m \times n}$$

—La ley de composición interna (+) es conmutativa en $M_{m\times n}(K)$:

$$\forall\ A = [a_{ij}]_{m\times n},\ B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$$

$$A + B = [a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m\times n} =$$
$$= [b_{ij}]_{m\times n} + [a_{ij}]_{m\times n} = B + A$$

De estas propiedades se sigue que $M_{m\times n}(K)$ tiene estructura de grupo abeliano respecto de la ley de composición interna (+).

Respecto de la ley de composición externa (.) se verifican las siguientes propiedades:

—$\forall\ \alpha, \beta \in K \quad \forall\ A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$

$$(\alpha + \beta)\ .\ A = (\alpha + \beta)\ .\ [a_{ij}]_{m\times n} = [(\alpha + \beta)\ .\ a_{ij}]_{m\times n} =$$
$$= [\alpha\ .\ a_{ij} + \beta\ .\ a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha\ .\ a_{ij}]_{m\times n} + [\beta\ .\ a_{ij}]_{m\times n} =$$
$$= \alpha\ .\ [a_{ij}]_{m\times n} + \beta\ .\ [a_{ij}]_{m\times n} = \alpha\ .\ A + \beta\ .\ A$$

—$\forall\ \alpha \in K \quad \forall\ A = [a_{ij}]_{m\times n},\ B = [b_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$

$$\alpha\ .\ (A + B) = \alpha\ .\ ([a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}) = \alpha\ .\ [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} =$$
$$= [\alpha\ .\ (a_{ij} + b_{ij})]_{m\times n} = [\alpha\ .\ a_{ij}]_{m\times n} + [\alpha\ .\ b_{ij}]_{m\times n} =$$
$$= \alpha\ .\ [a_{ij}]_{m\times n} + \alpha\ .\ [b_{ij}]_{m\times n} = \alpha\ .\ A + \alpha\ .\ B$$

—$\forall\ \alpha, \beta \in K \quad \forall\ A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$

$$\alpha\ .\ (\beta\ .\ A) = \alpha\ .\ (\beta\ .\ [a_{ij}]_{m\times n}) = \alpha\ .\ [\beta\ .\ a_{ij}]_{m\times n} =$$
$$= [\alpha\ .\ (\beta\ .\ a_{ij})]_{m\times n} = [(\alpha\ .\ \beta)\ .\ a_{ij}]_{m\times n} =$$
$$= (\alpha\ .\ \beta)\ .\ [a_{ij}]_{m\times n} = (\alpha\ .\ \beta)\ .\ A$$

—$\forall\ A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$

$$1\ .\ A = 1\ .\ [a_{ij}]_{m\times n} = [1\ .\ a_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n} = A$$

Finalmente, considerando todo lo expuesto concluimos que $M_{m\times n}(K)$ es un K-espacio vectorial.

2.º) Sea $B = \{E_{p\,q} / p \in \{1, 2, ..., m\} \wedge q \in \{1, 2, ..., n\}\}$ en donde:

$$E_{p\,q} = [e_{i\,j}]_{m \times n} \text{ t . q } \begin{cases} e_{p\,q} = 1 \\ e_{i\,j} = 0 \end{cases} \quad \forall\, i \in I - \{p\} \quad \forall\, j \in J - \{q\}$$

siendo $I = \{1, 2, ..., m\}$ y $J = \{1, 2, ..., n\}$

B es un sistema libre que engendra a $M_{m \times n}(K)$. En efecto:

$$-\sum_{\substack{p \in I \\ q \in J}} \lambda_{p\,q} \cdot E_{p\,q} = [0]_{m \times n} \Leftrightarrow \lambda_{p\,q} = 0 \quad \forall\, p \in I \quad \forall\, q \in J$$

$$-\forall\, A = [a_{p\,q}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K) \quad A = [a_{p\,q}]_{m \times n} = \sum_{\substack{p \in I \\ q \in J}} a_{p\,q} \cdot E_{p\,q}$$

Luego B es una base de $M_{m \times n}(K)$ y como el número de matrices de B es m . n, concluimos que $\dim [M_{m \times n}(K)] = m \cdot n$.

Por ejemplo,

$$B = \left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\right.$$

$$\left. E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base del K-espacio vectorial $M_{2 \times 3}(K)$ y $\dim [M_{2 \times 3}(K)] = 2 \cdot 3 = 6$.

A la base B de $M_{m \times n}(K)$ se la denomina base usual o canónica de $M_{m \times n}(K)$.

Ejercicio 1

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ y consideremos el subconjunto S de $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Demostrar que S es un subespacio vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ y hallar una base de S.

Solución

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Según esto, S es un subespacio vectorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un sistema libre. En efecto:

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de S y dim (S) = 2.

3. PRODUCTO DE MATRICES

Definición 3.1

Se denomina producto de la matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$ por la matriz $B = [b_{ij}]_{n\times p} \in M_{n\times p}(K)$, a la matriz $A \cdot B \in M_{m\times p}(K)$ definida por:

$$A \cdot B = \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot b_{hj} \right]_{m\times p}$$

Si denotamos A . B = C, el siguiente esquema nos ayuda a recordar cómo se determinan los elementos c_{ij} de la matriz producto C = A . B:

$$\text{fila } i \rightarrow \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots \quad c_{ij} \quad \dots \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow \text{fila } i$$

columna j (↓) columna j (↓)

$m \times n \qquad n \times p \qquad m \times p$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot b_{hj}$$

Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3.1+1.0 & 3.2+1.1 & 3.0+1.(-3) & 3.2+1.1 \\ 0.1+(-2).0 & 0.2+(-2).1 & 0.0+(-2).(-3) & 0.2+(-2).1 \\ 1.1+0.0 & 1.2+0.1 & 1.0+0.(-3) & 1.2+0.1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposición 3.1

1.º) $\forall A \in M_{m \times n}(K) \quad \forall B \in M_{n \times p}(K) \quad \forall C \in M_{p \times q}(K) \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$

2.º) $\forall A \in M_{m \times n}(K) \quad \forall B, C \in M_{n \times p}(K) \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$

3.º) $\forall A, B \in M_{m \times n}(K) \quad \forall C \in M_{n \times p}(K) \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$

Demostración

1.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n} \qquad B = [b_{ij}]_{n \times p} \qquad C = [c_{ij}]_{p \times q}$

$$A \cdot (B \cdot C) = [a_{ij}]_{m \times n} \cdot ([b_{ij}]_{n \times p} \cdot [c_{ij}]_{p \times q}) =$$

$$= [a_{ij}]_{m \times n} \cdot \left[\sum_{h=1}^{p} b_{ih} \cdot c_{hj} \right]_{n \times q} =$$

$$= \left[\sum_{e=1}^{n} a_{ie} \cdot \sum_{h=1}^{p} b_{eh} \cdot c_{hj} \right]_{m \times q} =$$

$$= \left[\sum_{e=1}^{n} \sum_{h=1}^{p} a_{ie} \cdot b_{eh} \cdot c_{hj} \right]_{m \times q} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{e=1}^{n} a_{ie} \cdot b_{eh} \right) \cdot c_{hj} \right]_{m \times q} =$$

$$= \left[\sum_{e=1}^{n} a_{ie} \cdot b_{ej} \right]_{m \times p} \cdot [c_{ij}]_{p \times q} =$$

$$= ([a_{ij}]_{m \times n} \cdot [b_{ij}]_{n \times p}) \cdot [c_{ij}]_{p \times q} = (A \cdot B) \cdot C$$

2.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n} \qquad B = [b_{ij}]_{n \times p} \qquad C = [c_{ij}]_{n \times p}$

$$A \cdot (B + C) = [a_{ij}]_{m \times n} \cdot ([b_{ij}]_{n \times p} + [c_{ij}]_{n \times p}) = [a_{ij}]_{m \times n} \cdot [b_{ij} + c_{ij}]_{n \times p} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot (b_{hj} + c_{hj}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} (a_{ih} \cdot b_{hj} + a_{ih} \cdot c_{hj}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot b_{hj} + \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot c_{hj} \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot b_{hj} \right]_{m \times p} + \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot c_{hj} \right]_{m \times p} =$$

$$= [a_{ij}]_{m \times n} \cdot [b_{ij}]_{n \times p} + [a_{ij}]_{m \times n} \cdot [c_{ij}]_{n \times p} = A \cdot B + A \cdot C$$

3.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n} \qquad B = [b_{ij}]_{m \times n} \qquad C = [c_{ij}]_{n \times p}$

$$(A + B) \cdot C = ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) \cdot [c_{ij}]_{n \times p} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \cdot [c_{ij}]_{n \times p} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} (a_{ih} + b_{ih}) \cdot c_{hj} \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} (a_{ih} \cdot c_{hj} + b_{ih} \cdot c_{hj}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot c_{hj} + \sum_{h=1}^{n} b_{ih} \cdot c_{hj} \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot c_{hj} \right]_{m \times p} + \left[\sum_{h=1}^{n} b_{ih} \cdot c_{hj} \right]_{m \times p} =$$

$$= [a_{ij}]_{m \times n} \cdot [c_{ij}]_{n \times p} + [b_{ij}]_{m \times n} \cdot [c_{ij}]_{n \times p} = A \cdot C + B \cdot C$$

Proposición 3.2

$M_{n \times n}(K)$ tiene estructura de anillo respecto de las leyes de composición interna (+) «suma o adición de matrices» y (.) «producto de matrices».

Solución

—$M_{n \times n}(K)$ tiene estructura de grupo abeliano respecto de la composición interna (+).

—La ley de composición interna (.) es asociativa en $M_{n \times n}(K)$, pues según el apartado 1.º) de la proposición 3.1 se tiene que:

$$\forall A, B, C \in M_{n \times n}(K) \qquad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

—La ley de composición interna (.) es distributiva en $M_{n \times n}(K)$ respecto de la ley de composición interna (+), pues según los apartados 2.º) y 3.º) de la proposición 3.1 se tiene que:

$$\forall A, B, C \in M_{n \times n}(K) \qquad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$\forall A, B, C \in M_{n \times n}(K) \qquad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

De todo esto se deduce que $M_{n \times n}(K)$ tiene estructura de anillo respecto de las leyes de composición interna (+) y (.).

Además:

— La matriz unidad $I_n \in M_{n \times n}(K)$ es el elemento neutro de $M_{n \times n}(K)$ respecto de la ley de composición interna $(.)$:

$$\forall\, A \in M_{n \times n}(K) \qquad A \,.\, I_n = I_n \,.\, A = A$$

Es frecuente representar I_n por I.

— La ley de composición interna $(.)$ no es conmutativa en $M_{n \times n}(K)$, pues por ejemplo para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$A \,.\, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B \,.\, A = [0]_{n \times n}$$

De donde:

$$A \,.\, B \neq B \,.\, A$$

— El anillo $(M_{n \times n}(K), +, .)$ no es un cuerpo, pues dicho anillo tiene divisores de cero. Así por ejemplo, para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$A \,.\, B = [0]_{n \times n}$$

De donde se deduce que A y B son divisores de cero del anillo $(M_{n \times n}(K), +, .)$.

Ejercicio 2

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar todas las matrices $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que conmutan con A.

Solución

Consideremos una matriz cualquiera $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Entonces:

$$A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2z & y-2u \\ -3x+4z & -3y+4u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-3y & -2x+4y \\ z-3u & -2z+4u \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-2z = x-3y \\ y-2u = -2x+4y \\ -3x+4z = z-3u \\ -3y+4u = -2z+4u \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3y-2z = 0 \\ 2x-3y-2u = 0 \\ -x+z+u = 0 \\ -3y+2z = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \dfrac{3}{2}\beta \\ u = \alpha - \dfrac{3}{2}\beta \end{cases} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Luego las matrices de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que conmutan con A son la de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \dfrac{3}{2}\beta & \alpha - \dfrac{3}{2}\beta \end{pmatrix}$$

en donde α y β son parámetros que toman valores reales.

4. POTENCIAS NATURALES O POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO POSITIVO DE MATRICES CUADRADAS

Sea el conjunto $M_{n \times n}(K)$ de las matrices cuadradas de orden n definidas sobre K.

Definición 4.1

Se denomina potencia de base $A \in M_{n \times n}(K)$ y exponente $p \in N$ (o $p \in Z^+$), a la matriz $A^p \in M_{n \times n}(K)$ definida por:

$$A^p = A \,.\, A \,.\, \overset{p}{\ldots} \,.\, A$$

Se conviene en definir $A^o = I$, en donde $I \in M_{n \times n}(K)$ es la matriz unidad.

Proposición 4.1

1.º) $\forall\, A \in M_{n \times n}(K) \quad \forall\, p, q \in N \quad A^p \,.\, A^q = A^{p+q}$
2.º) $\forall\, A \in M_{n \times n}(K) \quad \forall\, p, q \in N \quad (A^p)^q = A^{p \cdot q}$

Demostración

Inmediata.

Pasemos a definir algunas matrices especiales en cuya definición interviene el concepto de potencia de exponente natural (o entero positivo):

Se denomina matriz periódica, a toda matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que existe $p \in N$ verificando que $A^{p+1} = A$. Además, si p es el menor número natural tal que $A^{p+1} = A$, entonces se dice que la matriz periódica A es de período p.

Se denomina matriz idempotente, a toda matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A^2 = A$. Es decir, se denomina matriz idempotente a toda matriz periódica de período $p = 1$.

Se denomina matriz nilpotente, a toda matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que existe $p \in N$ verificando que $A^p = [0]_{n \times n}$. Además, si p es el menor número tal que $A^p = [0]_{n \times n}$, entonces se dice que la matriz nilpotente A es de índice p.

Se denomina matriz involutiva, a toda matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A^2 = I$, en donde $I \in M_{n \times n}(K)$ es la matriz unidad. Observemos, que si A es una matriz involutiva, entonces A es una matriz periódica de período $p = 2$, pues de $A^2 = I$ se sigue que $A^3 = A$.

Ejercicio 3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar A^n en donde $n \in Z^+$.

Solución

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

Observemos que:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & -2^0 & 0 \\ -2^0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & -2^1 & 0 \\ -2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & -2^2 & 0 \\ -2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ldots$$

Razonemos por inducción. Es decir, supongamos que:

$A^p = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & -2^{p-1} & 0 \\ -2^{p-1} & 2^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y demostremos que $A^{p+1} = \begin{pmatrix} 2^p & -2^p & 0 \\ -2^p & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{p+1} = A^p \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{p-1} & -2^{p-1} & 0 \\ -2^{p-1} & 2^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{p-1} + 2^{p-1} & -2^{p-1} - 2^{p-1} & 0 \\ -2^{p-1} - 2^{p-1} & 2^{p-1} + 2^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^p & -2^p & 0 \\ -2^p & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego podemos afirmar que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} & 0 \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, n \in Z^+$$

Ejercicio 4

Demostrar que si dos matrices cuadradas A y B conmutan, entonces sus potencias de exponente entero positivo también conmutan.

Solución

En principio veamos que:

$$A \cdot B^n = B^n \cdot A \qquad \forall\, n \in Z^+$$

En efecto, considerando que $A \cdot B = B \cdot A$ y que la ley de composición interna $(.)$ es asociativa, tenemos que:

$$\begin{aligned} A \cdot B^n &= A \cdot B \cdot B^{n-1} = B \cdot A \cdot B^{n-1} = \ldots = B^p \cdot A \cdot B^{n-p} = \\ &= B^p \cdot A \cdot B \cdot B^{n-p-1} = B^p \cdot B \cdot A \cdot B^{n-p-1} = \\ &= B^{p+1} \cdot A \cdot B^{n-p-1} = \ldots = B^n \cdot A \cdot B^o = B^n \cdot A \cdot I = B^n \cdot A \end{aligned}$$

Finalmente, considerando que $A \cdot B^n = B^n \cdot A \;\; \forall\, n \in Z^+$ y que la ley de composición interna $(.)$ es asociativa, demostramos que:

$$A^m \cdot B^n = B^n \cdot A^m \qquad \forall\, m, n \in Z^+$$

En efecto:

$$\begin{aligned} A^m \cdot B^n &= A^{m-1} \cdot A \cdot B^n = A^{m-1} \cdot B^n \cdot A = \ldots = A^{m-p} \cdot B^n \cdot A^p = \\ &= A^{m-p-1} \cdot A \cdot B^n \cdot A^p = A^{m-p-1} \cdot B^n \cdot A \cdot A^p = \\ &= A^{m-p-1} \cdot B^n \cdot A^{p+1} = \ldots = A^{m-m} \cdot B^n \cdot A^m = A^o \cdot B^n \cdot A^m = \\ &= I \cdot B^n \cdot A^m = B^n \cdot A^m \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Sea una matriz cuadrada $A \in M_{q \times q}(\mathbb{R})$ y consideremos la matriz $B = I + A$ siendo $I \in M_{q \times q}(\mathbb{R})$ la matriz unidad.

1.º) Demostrar que si A es idempotente, resulta que:

$$B^n = I + (2^n - 1) \cdot A \qquad \forall\, n \in Z^+$$

2.º) Demostrar que si A es nilpotente de índice p, resulta que:

$$B^n = I + n \cdot A + \binom{n}{2} \cdot A^2 + \ldots + \binom{n}{p-1} \cdot A^{p-1} \qquad \forall\, n \in Z^+ / n \geq p$$

Solución

1.º) En principio, como A es idempotente ($A^2 = A$) resulta que $A^m = A \;\forall\, m \in Z^+$. En efecto:

$$A^1 = A$$
$$A^2 = A$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Razonemos por inducción. Es decir, supongamos que $A^h = A$ y demostremos que $A^{h+1} = A$:

$$A^{h+1} = A^h \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$

Luego podemos afirmar que $A^m = A \;\forall\, m \in Z^+$

Por otro lado, como A e I conmutan, también conmutan las distintas potencias naturales de A e I y en consecuencia se puede utilizar la fórmula del binomio de Newton para desarrollar $(I + A)^n$:

$$B^n = (I+A)^n = \binom{n}{0} \cdot I^n + \binom{n}{1} \cdot I^{n-1} \cdot A + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot I \cdot A^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot A^n$$

Ahora bien, considerando que $A^m = A \ \forall\, m \in Z^+$ y en particular $I^m = I$ $\forall\, m \in Z^+$ pues la matriz unidad I es idempotente, tenemos que:

$$B^n = (I + A)^n = \binom{n}{0} . I + \binom{n}{1} . I . A + ... + \binom{n}{n-1} . I . A + \binom{n}{n} . A$$

Finalmente, recordando que $I . A = A$ y operando, resulta que:

$$B^n = (I + A)^n = \binom{n}{0} . I + \binom{n}{1} . A + ... + \binom{n}{n-1} . A + \binom{n}{n} . A =$$

$$= \binom{n}{0} . I + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] . A =$$

$$= \binom{n}{0} . I + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} - \binom{n}{0} \right] . A =$$

$$= 1 . I + [(1 + 1)^n - 1] . A = I + (2^n - 1) . A$$

2.º) En principio, como A es nilpotente de índice $p(A^p = [0]_{q \times q})$ se demuestra de inmediato que $A^m = [0]_{q \times q} \ \forall\, m \in Z^+ / m \geq p$.

Por otro lado, para $n \geq p$ tenemos que:

$$B^n = (I + A)^n = \binom{n}{0} . I^n + \binom{n}{1} . I^{n-1} . A + ... + \binom{n}{p-1} . I^{n-p+1} . A^{p-1} +$$

$$+ \binom{n}{p} . I^{n-p} . A^p + ... + \binom{n}{n} . A^n$$

Ahora bien, considerando que $A^m = [0]_{q \times q} \ \forall\, m \in Z^+ / m \geq p$ e $I^m = I$ $\forall\, m \in Z^+$, resulta que:

$$B^n = (I + A)^n = \binom{n}{0} . I + \binom{n}{1} . I . A + ... + \binom{n}{p-1} . I . A^{p-1} +$$

$$+ \binom{n}{p} . I . [0]_{q \times q} + ... + \binom{n}{n} . [0]_{q \times q}$$

Finalmente, recordando que $I \cdot M = M$, $M \cdot [0]_{q\times q} = [0]_{q\times q}$, $\lambda \cdot [0]_{q\times q} = [0]_{q\times q}$, $M + [0]_{q\times q} = M$ y operando, concluimos que:

$$B^n = (I + A)^n = \binom{n}{0} \cdot I + \binom{n}{1} \cdot A + \ldots + \binom{n}{p-1} \cdot A^{p-1} + [0]_{q\times q} + \ldots +$$

$$+ \ldots + [0]_{q\times q} = I + \binom{n}{1} \cdot A + \ldots + \binom{n}{p-1} \cdot A^{p-1}$$

5. TRASPOSICION DE MATRICES. MATRIZ TRASPUESTA

Definición 5.1

Se denomina matriz traspuesta de una matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$ a la matriz $A^T = [a^T_{ij}]_{n\times m} = [a_{ji}]_{n\times m} \in M_{n\times m}(K)$.

Proposición 5.1

1.°) $\forall A \in M_{m\times n}(K)$ $\quad (A^T)^T = A$

2.°) $\forall A, B \in M_{m\times n}(K)$ $\quad (A + B)^T = A^T + B^T$

3.°) $\forall \lambda \in K \quad \forall A \in M_{m\times n}(K)$ $\quad (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

4.°) $\forall \lambda, \mu \in K \quad \forall A, B \in M_{m\times n}(K)$ $\quad (\lambda \cdot A + \mu \cdot B)^T = \lambda \cdot A^T + \mu \cdot B^T$

5.°) $\forall A \in M_{m\times n}(K) \quad \forall B \in M_{n\times p}(K)$ $\quad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Demostración

1.°) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$

$$(A^T)^T = (([a_{ij}]_{m\times n})^T)^T = ([a_{ji}]_{n\times m})^T = [a_{ij}]_{m\times n} = A$$

2.°) $A = [a_{ij}]_{m\times n} \qquad B = [b_{ij}]_{m\times n}$

$$(A + B)^T = ([a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n})^T = ([a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n})^T = [a_{ji} + b_{ji}]_{n\times m} =$$

$$= [a_{ji}]_{n\times m} + [b_{ji}]_{n\times m} = ([a_{ij}]_{m\times n})^T + ([b_{ij}]_{m\times n})^T = A^T + B^T$$

3.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$(\lambda \,.\, A)^T = (\lambda \,.\, [a_{ij}]_{m \times n})^T = ([\lambda \,.\, a_{ij}]_{m \times n})^T = [\lambda \,.\, a_{ji}]_{n \times m} =$$
$$= \lambda \,.\, [a_{ji}]_{n \times m} = \lambda \,.\, ([a_{ij}]_{m \times n})^T = \lambda \,.\, A^T$$

4.º) Considerando los apartados 2.º) y 3.º) tenemos que:

$$(\lambda \,.\, A + \mu \,.\, B)^T = (\lambda \,.\, A)^T + (\mu \,.\, B)^T = \lambda \,.\, A^T + \mu \,.\, B^T$$

5.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n} \qquad B = [b_{ij}]_{n \times p} \qquad A^T = [a^T_{ij}]_{n \times m} \qquad B^T = [b^T_{ij}]_{p \times n}$

$$(A \,.\, B)^T = ([a_{ij}]_{m \times n} \,.\, [b_{ij}]_{n \times p})^T = \left(\left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \,.\, b_{hj} \right]_{m \times p} \right)^T =$$
$$= \left[\sum_{h=1}^{n} a_{jh} \,.\, b_{hi} \right]_{p \times m} = \left[\sum_{h=1}^{n} a^T_{hj} \,.\, b^T_{ih} \right]_{p \times m} =$$
$$= \left[\sum_{h=1}^{n} b^T_{ih} \,.\, a^T_{hj} \right]_{p \times m} = [b^T_{ij}]_{p \times n} \,.\, [a^T_{ij}]_{n \times m} = B^T \,.\, A^T$$

Observación

Considerando el concepto de matriz traspuesta podemos enunciar las definiciones de matriz simétrica y antisimétrica en la siguiente forma:

Se denomina matriz simétrica, a toda matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A^T = A$.

Se denomina matriz antisimétrica, a toda matriz cuadrada $A \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A^T = -A$.

Ejercicio 6

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Consideremos los subconjuntos $\hat{S}$ y $\hat{A}$ de $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ constituidos respectivamente por las matrices simétricas y antisimétricas.

1.º) Demostrar que $\hat{S}$ y $\hat{A}$ son subespacios vectoriales de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
2.º) Probar que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es suma directa de $\hat{S}$ y $\hat{A}$.

Solución

$$\hat{S} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) / A^T = A\}$$
$$\hat{A} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) / A^T = -A\}$$

1.º) En principio, $\hat{S} \neq \varnothing$ pues al menos $[0]_{n\times n} \in \hat{S}$ dado que $([0]_{n\times n})^T = [0]_{n\times n}$.

Por otro lado, si tomamos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos matrices cualesquiera $A, B \in \hat{S}$, tenemos que:

$$(\alpha . A + \beta . B)^T = \alpha . A^T + \beta . B^T = \alpha . A + \beta . B \Rightarrow \alpha . A + \beta . B \in \hat{S}$$

Es decir:

$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall A, B \in \hat{S} \quad \alpha . A + \beta . B \in \hat{S}$$

Luego $\hat{S}$ es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Análogamente probaríamos que $\hat{A}$ es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

2.º) Tomemos una matriz cualquiera $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y veamos si es posible encontrar una matriz $A \in \hat{S}$ y otra matriz $B \in \hat{A}$ tal que $M = A + B$:

$$M = A + B \Leftrightarrow \begin{cases} M = A + B \\ M^T = (A + B)^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = A + B \\ M^T = A^T + B^T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = A + B \\ M^T = A - B \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} M + M^T = 2 . A \\ M^T = A - B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \tfrac{1}{2} . (M + M^T) \\ B = \tfrac{1}{2} . (M - M^T), \end{cases}$$

Luego, cada matriz $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ se escribe en la forma:

$$M = \tfrac{1}{2} . (M + M^T) + \tfrac{1}{2} . (M - M^T)$$

en donde $\tfrac{1}{2} . (M + M^T) \in \hat{S}$ y $\tfrac{1}{2} . (M - M^T) \in \hat{A}$.

Según esto, cada matriz $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ se expresa de forma única como suma de una matriz de $\hat{S}$ y otra matriz de $\hat{A}$. Por tanto, $M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es suma directa de $\hat{S}$ y $\hat{A}$.

6. CONJUGACION DE UNA MATRIZ COMPLEJA. MATRIZ CONJUGADA

Definición 6.1

Se denomina matriz conjugada de una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ a la matriz $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

Proposición 6.1

1.º) $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ $\quad \overline{\overline{A}} = A$

2.º) $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ $\quad \overline{(A + B)} = \overline{A} + \overline{B}$

3.º) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ $\quad \overline{(\lambda \cdot A)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{A}$

4.º) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ $\quad \overline{(\lambda \cdot A + \mu \cdot B)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{A} + \overline{\mu} \cdot \overline{B}$

5.º) $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{C}) \quad \forall B \in M_{n \times p}(\mathbb{C})$ $\quad \overline{(A \cdot B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

6.º) $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ $\quad (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$

Demostración

1.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{[a_{ij}]}}_{m \times n} = [\overline{\overline{a}_{ij}}]_{m \times n} = [\overline{\overline{a}}_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A$$

2.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}$

$$\overline{(A + B)} = \overline{([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n})} = \overline{[a_{ij} + b_{ij}]}_{m \times n} = [\overline{a_{ij} + b_{ij}}]_{m \times n} =$$
$$= [\overline{a}_{ij} + \overline{b}_{ij}]_{m \times n} = [\overline{a}_{ij}]_{m \times n} + [\overline{b}_{ij}]_{m \times n} = \overline{[a_{ij}]}_{m \times n} + \overline{[b_{ij}]}_{m \times n} = \overline{A} + \overline{B}$$

3.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$\overline{(\lambda \cdot A)} = \overline{(\lambda \cdot [a_{ij}]_{m \times n})} = \overline{[\lambda \cdot a_{ij}]}_{m \times n} = [\overline{\lambda \cdot a_{ij}}]_{m \times n} = [\overline{\lambda} \cdot \overline{a}_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= \overline{\lambda} \cdot [\overline{a}_{ij}]_{m \times n} = \overline{\lambda} \cdot \overline{[a_{ij}]}_{m \times n} = \overline{\lambda} \cdot \overline{A}$$

4.º) Considerando los apartados 2.º) y 3.º) tenemos que:

$$\overline{(\lambda \cdot A + \mu \cdot B)} = \overline{(\lambda \cdot A)} + \overline{(\mu \cdot B)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{A} + \overline{\mu} \cdot \overline{B}$$

5.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad B = [b_{ij}]_{n \times p}$

$$\overline{(A \cdot B)} = \overline{([a_{ij}]_{m \times n} \cdot [b_{ij}]_{n \times p})} = \overline{\left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot b_{hj}\right]_{m \times p}} =$$

$$= \left[\sum_{h=1}^{n} \overline{a_{ih} \cdot b_{hj}}\right]_{m \times p} = \left[\sum_{h=1}^{n} \overline{a}_{ih} \cdot \overline{b}_{hj}\right]_{m \times p} =$$

$$= \overline{[a_{ij}]}_{m \times n} \cdot \overline{[b_{ij}]}_{n \times p} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

6.º) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$(\overline{A})^T = (\overline{[a_{ij}]}_{m \times n})^T = ([\overline{a}_{ij}]_{m \times n})^T = [\overline{a}_{ji}]_{n \times m} = \overline{[a_{ji}]}_{n \times m} = \overline{([a_{ij}]_{m \times n})^T} = \overline{(A^T)}$$

7. CONJUGACION-TRASPOSICION DE UNA MATRIZ COMPLEJA. MATRIZ ASOCIADA

Definición 7.1

Se denomina matriz asociada de una matriz $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ a la matriz

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$$

Proposición 7.1

1.º) $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ $(A^*)^* = A$

2.º) $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ $(A + B)^* = A^* + B^*$

3.º) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ $(\lambda . A)^* = \overline{\lambda} . A^*$

4.º) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ $(\lambda . A + \mu . B)^* = \overline{\lambda}. A^* + \overline{\mu} . B^*$

5.º) $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{C}) \quad \forall B \in M_{n\times p}(\mathbb{C})$ $(A . B)^* = B^* . A^*$

6.º) $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ $(A^*)^T = (A^T)^*$

Demostración

1.º)
$$(A^*)^* = (\overline{A}^*)^T = [\overline{\overline{(A^T)}}]^T = (A^T)^T = A$$

2.º)
$$(A + B)^* = [\overline{(A + B)}]^T = (\overline{A} + \overline{B})^T = (\overline{A})^T + (\overline{B})^T = A^* + B^*$$

3.º)
$$(\lambda . A)^* = [\overline{(\lambda . A)}]^T = (\overline{\lambda} . \overline{A})^T = \overline{\lambda} . (\overline{A})^T = \overline{\lambda} . A^*$$

4.º)
$$(\lambda . A + \mu . B)^* = (\lambda . A)^* + (\mu . B)^* = \overline{\lambda} . A^* + \overline{\mu} . B^*$$

5.º)
$$(A . B)^* = [\overline{(A . B)}]^T = (\overline{A} . \overline{B})^T = (\overline{B})^T . (\overline{A})^T = B^* . A^*$$

6.º)
$$(A^*)^T = [(\overline{A})^T]^T = [\overline{(A^T)}]^T = (A^T)^*$$

Observemos que $(A^*)^T = (A^T)^* = \overline{A}$

Considerando el concepto matriz asociada, definimos las siguientes matrices complejas especiales:

Se denomina matriz hermítica, a toda matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^* = A$.

Se denomina matriz antihermítica, a toda matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A^* = -A$.

Ejercicio 7

Sean dos matrices cuadradas $A, B \in M_{p \times p}(\mathbb{C})$:

1.º) Demostrar que las matrices $A \cdot A^*$ y $A^* \cdot A$ son hermíticas.
2.º) Sean A y B hermíticas y n un número entero positivo cualquiera. Demostrar que la matriz $(A + B)^n$ es hermítica.
3.º) Sean A y B antihermíticas y n un número entero positivo cualquiera. Demostrar que:
$(A + B)^n$ es antihermítica si n es impar.
$(A + B)^n$ es hermítica si n es par.
4.º) Sean A y B hermíticas. Demostrar que la matriz $A \cdot B$ es hermítica si y sólo si A y B conmutan.
5.º) Sean A y B antihermíticas. Demostrar que la matriz $A \cdot B$ es hermítica si y sólo si A y B conmutan.

Solución

1.º)

$$(A \cdot A^*)^* = (A^*)^* \cdot A^* = A \cdot A^* \Rightarrow A \cdot A^* \text{ hermítica}$$
$$(A^* \cdot A)^* = A^* \cdot (A^*)^* = A^* \cdot A \Rightarrow A^* \cdot A \text{ hermítica}$$

2.º)

$$[(A + B)^n]^* = [(A + B) \cdot (A + B) \overset{n}{\ldots} (A + B)]^* = [(A + B)^*]^n =$$
$$= (A^* + B^*)^n = (A + B)^n$$

Como $[(A + B)^n]^* = (A + B)^n$ concluimos que la matriz $(A + B)^n$ es hermítica.

3.º)

$$[(A + B)^n]^* = [(A + B)^*]^n = (A^* + B^*)^n = [-A - B]^n =$$
$$= [(-1) \cdot (A + B)]^n = (-1)^n \cdot (A + B)^n$$

Luego:

Si n es impar tenemos que $[(A + B)^n]^* = -(A + B)^n$ y en consecuencia la matriz $(A + B)^n$ es antihermítica.

Si n es par tenemos que $[(A + B)^n]^* = (A + B)^n$ y en consecuencia la matriz $(A + B)^n$ es hermítica.

4.º) Demostremos que:

$$A \cdot B \quad \text{hermítica} \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

$$A \cdot B \text{ hermítica} \Rightarrow (A \cdot B)^* = A \cdot B \Rightarrow B^* \cdot A^* = A \cdot B \Rightarrow B \cdot A = A \cdot B$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow (A \cdot B)^* = (B \cdot A)^* \Rightarrow (A \cdot B)^* = A^* \cdot B^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A \cdot B)^* = A \cdot B \Rightarrow A \cdot B \text{ hermítica}$$

5.º) Demostremos que:

$$A \cdot B \quad \text{hermítica} \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$$

$$A \cdot B \text{ hermítica} \Rightarrow (A \cdot B)^* = A \cdot B \Rightarrow B^* \cdot A^* = (-B) \cdot (-A) = A \cdot B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (-1)^2 \cdot B \cdot A = A \cdot B \Rightarrow B \cdot A = A \cdot B$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow (A \cdot B)^* = (B \cdot A)^* \Rightarrow (A \cdot B)^* = A^* \cdot B^* \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A \cdot B)^* = (-A) \cdot (-B) \Rightarrow (A \cdot B)^* = (-1)^2 \cdot A \cdot B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A \cdot B)^* = A \cdot B \Rightarrow A \cdot B \text{ hermítica}$$

Tema III

Determinantes

1. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Definición 1.1

Sea una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in M_{n \times n}(K)$.

Se llama determinante de una matriz A al escalar representado por $|A|$ o Det (A) o

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = \sum_{(j_1 j_2 \dots j_n) \in P_n} \text{sig}(j_1 j_2 \dots j_n)\ a_{1j_1}\ a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

donde P_n es el conjunto de las n! permutaciones $(j_1 j_2 \dots j_n)$ de los elementos del conjunto $I = \{1, 2, \dots, n\}$ y $\text{sig}(j_1 j_2 \dots j_n)$ es la signatura de la permutación $(j_1 j_2 \dots j_n)$.

Considerando las filas de A como los vectores de K^n:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ \bar{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{a}_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \end{aligned}$$

Podremos representar por $\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n)$ al Det (A), es decir:

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n) = \text{Det}\,(A) = \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\ a_{1j_1}\ a_{2j_2} \,...\, a_{nj_n}$$

Determinantes de la matriz nula y la matriz unidad de orden n.

—$\text{Det}\,[0]_{n \times n} = \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\ a_{1j_1}\ a_{2j_2} \,...\, a_{nj_n} = 0$ pues:

$$a_{i\,j} = 0 \qquad \forall\, i = 1, 2, ..., n \wedge \forall\, j = 1, 2, ..., n$$

—Para la matriz unidad $I = [\delta_{i\,j}]_{n \times n}$ es:

$$\delta_{i\,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

entonces:

$$\text{Det}\,(I) = \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\ \delta_{1j_1}\ \delta_{2j_2} \,...\, \delta_{nj_n} = 1$$

pues todos los sumandos son nulos salvo el sumando

$$\text{sig}\,(1\ 2 \,...\, n)\ \delta_{11}\ \delta_{22} \,...\, \delta_{nn} = 1 \,.\, 1 \,.\, ... \,.\, 1 = 1$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden 2.

Sea $A = [a_{i\,j}]_{2 \times 2} \in M_{2 \times 2}\,(K)$

$$\text{Det}\,(A) = \sum_{(j_1\, j_2) \in P_2} \text{sig}\,(j_1\, j_2)\ a_{1j_1}\ a_{2j_2} =$$

$$= \text{sig}\,(1\ 2)\, a_{11}\, a_{22} + \text{sig}\,(2\ 1)\, a_{12}\, a_{21} =$$

$$= 1 \,.\, a_{11}\, a_{22} - 1 \,.\, a_{12}\, a_{21} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

Determinante de una matriz cuadrada de orden 3. Regla de Sarrus.
Sea $A = [a_{ij}]_{3\times 3} \in M_{3\times 3}(K)$

$$\text{Det}(A) = \sum_{(j_1 j_2 j_3)\in P_3} \text{sig}(j_1 j_2 j_3)\ a_{1j_1}\ a_{2j_2}\ a_{3j_3} =$$

$$= \text{sig}(1\ 2\ 3)\ a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + \text{sig}(1\ 3\ 2)\ a_{11}\ a_{23}\ a_{32} +$$
$$+ \text{sig}(2\ 1\ 3)\ a_{12}\ a_{21}\ a_{33} + \text{sig}(2\ 3\ 1)\ a_{12}\ a_{23}\ a_{31} +$$
$$+ \text{sig}(3\ 1\ 2)\ a_{13}\ a_{21}\ a_{32} + \text{sig}(3\ 2\ 1)\ a_{13}\ a_{22}\ a_{31} =$$
$$= 1 \cdot a_{11}\ a_{22} \cdot a_{33} + (-1) \cdot a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + (-1)\ a_{12}\ a_{21}\ a_{33} +$$
$$+ 1 \cdot a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + 1 \cdot a_{13}\ a_{21}\ a_{32} + (-1)\ a_{13}\ a_{22}\ a_{31} =$$
$$= a_{11}\ a_{22} \cdot a_{33} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{12}\ a_{21}\ a_{33} - a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$$

2. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS DETERMINANTES

Proposición 2.1

1.º) $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T) \quad \forall\ A = [a_{ij}]_{n\times n} \in M_{n\times n}(K)$
Considerando las columnas de A como los vectores de K^n.

$$\bar{a}'_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \qquad \forall\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Según esta propiedad tendremos que:

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T) = \text{Dct}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n) = \text{Det}(\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \ldots, \bar{a}'_n)$$

y las propiedades relativas a las filas de A serán también válidas para las columnas de A.

2.º) $\text{Det}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_k, \ldots, \bar{a}_n) = -\text{Det}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n)$.

3.º) $\bar{a}_i = \bar{a}_j \Rightarrow \text{Det}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_j, \ldots, \bar{a}_n) = 0$.

4.º) $\text{Det}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i + \bar{b}_i, \ldots, \bar{a}_n) = \text{Det}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_i, \ldots, \bar{a}_n) +$
$+ \text{Det}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{b}_i, \ldots, \bar{a}_n)$.

5.º) $\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \lambda\,\bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) = \lambda\,\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n)$.

6.º) $\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \lambda\,\bar{a}_i + \mu\,\bar{b}_i, ..., \bar{a}_n) = \lambda\,\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) + \mu\,\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{b}_i, ..., \bar{a}_n)$.

7.º) $\bar{a}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k\,\bar{a}_k \Rightarrow \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) = 0$.

8.º) $\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) = \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k\,\bar{a}_k, ..., \bar{a}_n)$.

9.º) $\text{Det}\,(A \cdot B) = \text{Det}\,(A) \cdot \text{Det}\,(B) \quad \forall\, A = [a_{ij}]_{n \times n},\ B = [b_{ij}]_{n \times n} \in M_{n \times n}(K)$.

10.º) $\text{Det}\,(A^*) = \overline{\text{Det}\,(A)}$

Demostración

1.º) Sea $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, entonces: $A^T = [a^T_{ij}]_{n \times n} / a^T_{ij} = a_{ji}$.

$$\text{Det}\,(A^T) = \sum_{(j_1 j_2 ... j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1 j_2 ... j_n)\ a^T_{1j_1}\ a^T_{2j_2} ... a^T_{nj_n} =$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 ... j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1 j_2 ... j_n)\ a_{j_1 1}\ a_{j_2 2} ... a_{j_n n} =$$

(reordenando los factores de cada sumando, haciendo que sus subíndices fila estén en orden creciente).

$$= \sum_{(j_1 j_2 ... j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1 j_2 ... j_n)\ a_{1i_1}\ a_{2i_2} ... a_{ni_n}$$

Como según la teoría de permutaciones se cumple que $(i_1\ i_2\ ...\ i_n) = (j_1 j_2 ... j_n)^{-1}$ y que $\text{sig}\,(i_1 i_2 ... i_n) = \text{sig}\,(j_1 j_2 ... j_n)$, será

$$\text{Det}\,(A^T) = \sum_{(i_1 i_2 ... i_n) \in P_n} \text{sig}\,(i_1 i_2 ... i_n)\ a_{1i_1}\ a_{2i_2} ... a_{ni_n} = \text{Det}\,(A)$$

2.º)

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_k, ..., \bar{a}_n) =$$

$$= \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_i \,...\, j_k \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, a_{ij_i} \,...\, a_{kj_k} \,...\, a_{nj_n} =$$

intercambiando j_i con j_k se tiene una trasposición

$$= \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} -\text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_k \,...\, j_i \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, a_{kj_k} \,...\, a_{ij_i} \,...\, a_{nj_n} =$$

$$= -\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n)$$

3.º)

$$\bar{a}_i = \bar{a}_j \Rightarrow \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_j, ..., \bar{a}_n) \overset{\text{2.º)}}{=}$$

$$\overset{\text{intercambiando } \bar{a}_i \wedge \bar{a}_j}{=} -\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_j, ..., \bar{a}_n)$$

$$\Rightarrow 2\,\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_j, ..., \bar{a}_n) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_j, ..., \bar{a}_n) = 0$$

4.º)

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i + \bar{b}_i, ..., \bar{a}_n) =$$

$$= \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, (a_{ij_i} + b_{ij_i}) \,...\, a_{nj_n} = \begin{matrix}\text{distributiva del (.)}\\ \text{respecto de la (+)}\end{matrix}$$

$$= \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} [\text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, a_{ij_i} \,...\, a_{nj_n} +$$

$$+ \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, b_{ij_i} \,...\, a_{nj_n}] =$$

$$= \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, a_{ij_i} \,...\, a_{nj_n} +$$

$$+ \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, b_{ij_i} \,...\, a_{nj_n} =$$

$$= \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) + \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{b}_i, ..., \bar{a}_n)$$

5.º)

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \lambda\,\bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) =$$

$$= \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, \lambda\, a_{ij_i} \,...\, a_{nj_n} = \begin{matrix}\text{distributiva del (.)}\\ \text{respecto de la (+)}\end{matrix}$$

$$= \lambda \sum_{(j_1\, j_2 \,...\, j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \,...\, j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \,...\, a_{ij_i} \,...\, a_{nj_n} =$$

$$= \lambda\, \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n)$$

6.º)

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \lambda\,\bar{a}_i + \mu\,\bar{b}_i, ..., \bar{a}_n) \overset{4.^\circ}{=}$$

$$= \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \lambda\,\bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) + \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \mu\,\bar{b}_i, ..., \bar{a}_n) \overset{5.^\circ}{=}$$

$$= \lambda\, \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) + \mu\, \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{b}_i, ..., \bar{a}_n)$$

7.º) $\bar{a}_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k\, \bar{a}_k \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) = \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k\, \bar{a}_k, ..., \bar{a}_n) \overset{6.^\circ}{=}$$

$$= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k\, \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_k, ..., \bar{a}_n) = 0$$

ya que todos los sumandos son nulos al ser determinantes con dos filas iguales.

8.º)

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k\, \bar{a}_k, ..., \bar{a}_n) =$$

$$= \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) + \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \lambda_k\, \bar{a}_k, ..., \bar{a}_n) \overset{7.^\circ}{=}$$

$$= \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) + 0 = \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n)$$

9.º) Sean las matrices $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ y consideremos la matriz producto $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ donde $c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in}\, b_{nj}$ $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$; $\forall\, j = 1, 2, \ldots, n$.

Si $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$ son los vectores fila de la matriz B y $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$ son los vectores fila de la matriz C, tenemos que:

$$\bar{c}_1 = \sum_{i_1 = 1}^{n} a_{1i_1}\, \bar{b}_{i_1} \;, \quad \bar{c}_2 = \sum_{i_2 = 1}^{n} a_{2i_2}\, \bar{b}_{i_2} \;, \ldots, \; \bar{c}_n = \sum_{i_n = 1}^{n} a_{ni_n}\, \bar{b}_{i_n}$$

Entonces:

$$\text{Det}\,(C) = \text{Det}\left(\sum_{i_1 = 1}^{n} a_{1i_1}\, \bar{b}_{i_1}, \sum_{i_2 = 1}^{n} a_{2i_2}\, \bar{b}_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n = 1}^{n} a_{ni_n}\, \bar{b}_{i_n} \right) \overset{6.^\circ}{=}$$

$$= \sum_{i_1 = 1}^{n} \sum_{i_2 = 1}^{n} \ldots \sum_{i_n = 1}^{n} a_{1i_1}\, a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}\; \text{Det}\,(\bar{b}_{i_1}, \bar{b}_{i_2}, \ldots, \bar{b}_{i_n}) \overset{3.^\circ}{=}$$

$$= \sum_{(i_1\, i_2 \ldots i_n) \in P_n} a_{1i_1}\, a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}\; \text{Det}\,(\bar{b}_{i_1}, \bar{b}_{i_2}, \ldots, \bar{b}_{i_n}) \overset{2.^\circ}{=}$$

$$= \sum_{(i_1\, i_2 \ldots i_n) \in P_n} a_{1i_1}\, a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}\; \text{sig}\,(i_1\, i_2 \ldots i_n)\; \text{Det}\,(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n) =$$

$$= \text{Det}\,(A)\;\; \text{Det}\,(B)$$

10º)

$$\text{Det}\,(A^*) = \text{Det}\,[\overline{(A^T)}] = \text{Det}\,(\bar{A}) =$$

$$= \sum_{(j_1\, j_2 \ldots j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \ldots j_n)\;\; \bar{a}_{1j_1}\;\; \bar{a}_{2j_2} \ldots \bar{a}_{nj_n} \overset{(\overline{xy} = \bar{x}\,\bar{y})}{=}$$

$$= \sum_{(j_1\, j_2 \ldots j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \ldots j_n)\;\; \overline{a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}} \;\; =$$

$$= \overline{\sum_{(j_1\, j_2 \ldots j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \ldots j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}} \overset{(\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y})}{=}$$

$$= \overline{\sum_{(j_1\, j_2 \ldots j_n) \in P_n} \text{sig}\,(j_1\, j_2 \ldots j_n)\;\; a_{1j_1}\;\; a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}} \;\; = \overline{\text{Det}\,(A)}$$

3. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Sea $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in M_{n \times n}(K)$.

Definición 3.1

Se llama menor complementario de un elemento $a_{ij} \in A$ y se representa por M_{ij} al determinante de la submatriz cuadrada de A que resulta al suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima de A.

Definición 3.2

Se llama adjunto de un elemento $a_{ij} \in A$ al escalar $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Proposición 3.1

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} \; ; \; |A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

Es decir: $|A|$ es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por sus adjuntos correspondientes.

Demostración

$$|A| = \det(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n) = \sum_{(j_1 j_2 ... j_n) \in P_n} \text{sig}(j_1 j_2 ... j_n) \; a_{1j_1} \; a_{2j_2} ... a_{nj_n}$$

— Sustituyendo $\bar{a}_1$ por $\bar{e}_1 = (1, 0, ..., 0) \in K^n$ obtenemos que:

$$\text{Det}(\bar{e}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 ... j_n) \in P_n} \text{sig}(1 \, j_2 ... j_n) \; 1 \; a_{2j_2} ... a_{nj_n} =$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 ... j_n) \in P_n} \text{sig}(j_2 ... j_n) \; a_{2j_2} ... a_{nj_n} =$$

$$= M_{11} = (-1)^2 M_{11} = A_{11} \qquad (1)$$

— Sustituyendo $\bar{a}_1$ por $\bar{e}_k = (0, 0, ..., 0, \overset{(k}{1}, 0, ..., 0) \in K^n$ obtenemos que:

$$\text{Det}\,(\bar{e}_k, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n) = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{Traspo-} \\ \text{niendo con} \\ \text{todas las} \\ \text{anteriores} \\ \text{la columna} \\ \text{de lugar k} \end{matrix} =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2k} & a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk} & a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk-1} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k-1} M_{1k} = (-1)^{k+1} M_{1k} = A_{1k} \qquad (2)$$

— Sustituyendo $\bar{a}_i$ por $\bar{e}_k$ obtenemos que:

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_{i-1}, \bar{e}_k, \bar{a}_{i+1}, ..., \bar{a}_n) =$$

$$= (-1)^{i-1} \text{Det}\,(\bar{e}_k, \bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_{i+1}, ..., \bar{a}_n) \overset{(2)}{=}$$

$$= (-1)^{i-1} (-1)^{k+1} M_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} = A_{ik} \qquad (3)$$

Entonces:

$$\text{Det}\,(A) = \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_n) = \text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\bar{e}_k, ..., \bar{a}_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{e}_k, ..., \bar{a}_n) \overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,A_{ik}$$

La demostración en el caso del desarrollo por los elementos de una columna es análoga.

Proposición 3.2

$$i \neq h \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\, A_{h\,k} = 0 \;;\; j \neq h \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{k\,j}\, A_{k\,h} = 0$$

Es decir, la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de una paralela es cero.

Demostración

Hemos visto que:

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_h, ..., \bar{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\, A_{i\,k}$$

Si en esta expresión sustituimos $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ por $\bar{a}_h = (a_{h1}, a_{h2}, ..., a_{hn})$ resulta que:

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_h, ..., \bar{a}_h, ..., \bar{a}_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{h\,k}\, A_{i\,k} \qquad (1)$$

Por otra parte, según la 3.ª propiedad de los determinantes tenemos que:

$$\text{Det}\,(\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_h, ..., \bar{a}_h, ..., \bar{a}_n) = 0 \qquad (2)$$

De (1) y (2) deducimos que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i\,k}\, A_{h\,k} = 0$$

La demostración, en el caso del desarrollo de la suma de los productos de los elementos de una columna por los adjuntos de otra distinta, es análoga.

Ejercicio 1

Demostrar que el determinante de una matriz triangular superior (respectivamente triangular inferior) es el producto de los elementos de su diagonal principal.

Solución

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ triangular superior.

$$|A| \overset{(1)}{=} a_{11}(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \dots =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{n-2\, n-2}(-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a_{n-1\, n-1} & a_{n-1\, n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{n-1\, n-1}\, a_{nn}$$

(1) Desarrollando por los elementos de la primera columna.

Análogamente se demuestra para una matriz triangular inferior desarrollando su determinante por los elementos de la 1.ª fila.

Ejercicio 2

Sea $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar det (A).

Solución

$$\text{Det}(A) \overset{F_4-F_2}{\underset{F_5-F_2}{=}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{F_2-2F_1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$$

Ejercicio 3

Sea $A \in M_{4\times 4}(K)$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{pmatrix}$$

Hallar det (A) y generalizar el resultado.

Solución

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 & y^3-x^3 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 & z^3-x^3 \\ 0 & u-x & u^2-x^2 & u^3-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 & y^3-x^3 \\ z-x & z^2-x^2 & z^3-x^3 \\ u-x & u^2-x^2 & u^3-x^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y-x & (y+x)(y-x) & (y-x)(y^2+xy+x^2) \\ z-x & (z+x)(z-x) & (z-x)(z^2+xz+x^2) \\ u-x & (u+x)(u-x) & (u-x)(u^2+xu+x^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & y+x & y^2+xy+x^2 \\ 1 & z+x & z^2+xz+x^2 \\ 1 & u+x & u^2+xu+x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} 1 & y+x & y^2+xy+x^2 \\ 0 & z-y & z^2+xz-y^2-xy \\ 0 & u-y & u^2+xu-y^2-xy \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)\, 1.\, (-1)^2 \begin{vmatrix} z-y & (z^2-y^2)+x(z-y) \\ u-y & (u^2-y^2)+x(u-y) \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x) \begin{vmatrix} z-y & (z-y)(z+y+x) \\ u-y & (u-y)(u+y+x) \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y) \begin{vmatrix} 1 & z+y+x \\ 1 & u+y+x \end{vmatrix} =$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y)(u+y+x-z-y-x) =$$

$$= (y-x)(z-x)(u-x)(z-y)(u-y)(u-z)$$

Generalizamos el resultado para cualquier cualquier determinante de esta forma:

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ definida por:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|A| = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_1)(a_3 - a_2) \dots (a_n - a_2) \dots (a_n - a_{n-1})$$

Ejercicio 4

Consideremos la siguiente matriz cuadrada de orden 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Demostrar que:

$$\text{Det}(A) = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

Solución

Consideremos la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \end{pmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la última fila obtenemos:

$$\text{Det}(B) = 1 \cdot B_{51} + x \cdot B_{52} + x^2 \cdot B_{53} + x^3 \cdot B_{54} + x^4 \cdot B_{55}$$

Además, según la expresión de un determinante de Vandermonde, tenemos que:

$$\text{Det}(B) = (b-a)(c-a)(d-a)(x-a)(c-b)(d-b)(x-b)(d-c)(x-c)(x-d)$$

Luego:

$$B_{51} + B_{52}\, x + B_{53}\, x^2 + B_{54}\, x^3 + B_{55}\, x^4 =$$
$$= (b - a)\,(c - a)\,(d - a)\,(x - a)\,(c - b)\,(d - b)\,(x - b)\,(d - c)\,(x - c)\,(x - d)$$

y por ser los dos miembros de esta igualdad polinomios de grado menor o igual que 4 en la variable x y con coeficientes en $\mathbb{R}$ tendremos que:

$$B_{54} = (-1)^9 \det(A) = (b - a)\,(c - a)\,(d - a)\,(c - b)\,(d - b)\,(d - c)\,(-a - b - c - d)$$

(ambos coeficientes de x^3).

Luego:

$$\det(A) = (b - a)\,(c - d)\,(d - a)\,(c - b)\,(d - b)\,(d - c)\,(a + b + c + d).$$

Ejercicio 5

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & a & a & \dots & a \\ 2a & 1+2a & 2a & \dots & 2a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na & na & na & \dots & 1+na \end{pmatrix}$$

Hallar $\det(A)$.

Solución

$$\text{Det}(A) \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a \\ 0 & 1 & \dots & 2a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & 1+na \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & a \\ 0 & 1 & \dots & 2a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1+na+a+2a+\dots+(n-1)a \end{vmatrix} =$$

$$= 1^{n-1}\,(1 + a + 2a + 3a + \dots + na) = 1 + \frac{(a + na)}{2}\, n$$

(1) Restando a todas las columnas la última.
(2) Sumando a la última fila todas las demás.

4. MENORES DE UNA MATRIZ. RANGO O CARACTERISTICA DE UNA MATRIZ

Sea $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$.

Definición 4.1

Se llama menor de A a cualquiera de los determinantes de las submatrices cuadradas de A.

Si tomamos p filas: $i_1, i_2, ..., i_p$ y p columnas: $j_1, j_2, ..., j_p$ de la matriz A, donde $p \leq \min\{m, n\}$ obtenemos la submatriz cuadrada de A siguiente:

$$A_p = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_p} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_p j_1} & a_{i_p j_2} & \cdots & a_{i_p j_p} \end{pmatrix}$$

Esta submatriz está formada por los elementos $a_{i_k j_k}$ que ocupan los lugares de cruce de las p filas y las p columnas elegidas en A.

El determinante de dicha submatriz cuadrada A_p es un menor de orden p de A y se representa por M_p.

Si M_p es un menor de A de orden p se llama menor orlado de M_p al menor M_{p+1} de orden p + 1 de A formado por las p filas y las p columnas de M_p y otra fila y otra columna cualesquiera de las restantes filas y columnas de A.

Definición 4.2

Se llama rango o característica de A y se representa por r (A) al mayor de los órdenes de los menores no nulos de A.

Si r (A) = h, a todos los menores de orden h no nulos de A se les llama menores principales de A.

Proposición 4.1

Sea $A \in M_{m \times n}(K)$, entonces:

1.º $r(A) = m \Leftrightarrow r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\}) = m$

2.º $r(A) = r\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\} = r\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\}$

donde las filas y columnas de A han sido interpretadas como vectores de los K-espacios vectoriales K^n y K^m respectivamente, denotándolos por:

$$\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \in K^n, \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., m\}$$
$$\bar{a}'_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}) \in K^m, \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\}$$

Demostración

1.º) $\Rightarrow$) Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\}) < m$, entonces existe un vector fila de A que es combinación lineal de los restantes vectores fila de A y esta misma relación de dependencia lineal existirá entre los vectores fila de cualquiera de las submatrices correspondientes a los $\binom{m}{n}$ menores de orden m que se pueden formar con los elementos de A. Luego todos ellos serán nulos y por tanto $r(A) < m$, en contra de la hipótesis $r(A) = m$. En consecuencia $r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\}) = m$.

$\Leftarrow$) Si $r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\}) = m$ se puede completar una base B de K^n añadiendo a los m vectores fila de A otros $n - m$ vectores $\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, ..., \bar{e}_{j_{n-m}}$ de la base canónica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ de K^n.

Sea H la matriz cuyos vectores fila son $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m, \bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, ..., \bar{e}_{j_{n-m}}$ y observemos que su determinante coincide, salvo el signo, con un menor de orden m de A construido a partir de las m filas de A y n columnas de A elegidas adecuadamente. Por tanto bastará probar que $\text{Det}(H) \neq 0$ para concluir que $r(A) = m$.

Como $B = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m, \bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, ..., \bar{e}_{j_{n-m}}\}$ es una base de K^n, mediante combinaciones lineales adecuadas de los vectores fila de H podemos obtener cada uno de los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ de la base canónica de K^n. Las expresiones vectoriales obtenidas se traducen en la existencia de una matriz G tal que $G \cdot H = I$. En consecuencia $\text{Det}(G) \cdot \text{Det}(H) = 1$ y $\text{Det}(H) \neq 0$.

2.º) Supongamos que r (A) = r, entonces existe al menos un menor M_r de orden r de A distinto de cero y los vectores fila de A correspondientes a M_r serán linealmente independientes. Luego $r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\}) \geq r = r(A)$.

Por otro lado, si consideramos $r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\}) = p$ existirán p vectores fila de A linealmente independientes y por tanto para la submatriz A formada por estas p filas existirá al menos un menor de orden p no nulo. Luego $r(A) \geq p = r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\})$.

De las dos desigualdades demostradas se deduce que $r(A) = r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\})$.

Además, como $r(A) = a(A^T)$, se concluye también que $r(A) = r\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\}$.

Observación

Para hallar el rango de una matriz A consideraremos los resultados siguientes:

1) Si a la matriz A se le añade o suprime una fila (respectivamente columna) que sea combinación lineal de otras filas (respectivamente columnas) de A obtenemos una matriz B con el mismo rango que A.
2) Si al orlar un menor no nulo M_p de orden p de A con una fila fija i de A y cada una de las restantes columnas de A, sucede que son nulos todos los menores orlados obtenidos, entonces la fila i de A es combinación lineal de las restantes filas de A que forman parte del menor no nulo.

Proposición 4.2

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ una base de V. Consideremos el sistema $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\}$ de vectores de V, entonces:

$$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\} \text{ libre } \Leftrightarrow r(A) = m$$

siendo $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ la matriz cuyas filas son las coordenadas de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m$ en la base B, es decir:

$$\bar{u}_i = a_{i1}\bar{e}_1 + a_{i2}\bar{e}_2 + ... + a_{in}\bar{e}_n \qquad \forall i \in \{1, 2, ..., m\}$$

Según la proposición 4.1 la demostración es inmediata. El resultado de esta Proposición se conoce como criterio general de independencia lineal.

Ejercicio 6

Sea la matriz $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha+\beta & \alpha & 0 & 2\beta \end{pmatrix}$$

Hallar el rango de A según los distintos valores de los parámetros α y β. Interpretar vectorialmente los resultados obtenidos.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ es inmediato que $2 \leq r(A) \leq 3$.

$$r(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ \alpha+\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 2\beta \end{vmatrix} = 0$$

$$r(A) = 3 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ \alpha+\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \vee \begin{vmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 2\beta \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ \alpha+\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} = \alpha - \alpha - \beta + \alpha^2\beta = \beta(\alpha^2 - 1) = \beta(\alpha+1)(\alpha-1)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 2\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta + \alpha^2\beta - 2\beta = \beta(\alpha^2 + \alpha - 2) = \beta(\alpha-1)(\alpha+2)$$

Entonces se pueden dar los siguientes casos:

$$1.^{o})\ \beta = 0 \wedge \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ \alpha+\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 2\beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r\,(A) = 2$$

$$2.^{o})\ \alpha = 1 \wedge \forall\, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ \alpha+\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 2\beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow r\,(A) = 2$$

$$3.^{o})\ \forall\, \beta \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge \forall\, \alpha \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \beta & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha \\ \alpha+\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \vee$$

$$\vee \begin{vmatrix} 0 & 1 & \beta \\ 1 & -\alpha & \beta \\ \alpha & 0 & 2\beta \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow r\,(A) = 3$$

Interpretemos vectorialmente estos resultados:
Consideremos los vectores:

$$\bar{a}_1 = (\beta, 0, 1, \beta) \in \mathbb{R}^4$$
$$\bar{a}_2 = (1, 1, -\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$$
$$\bar{a}_3 = (\alpha + \beta, \alpha, 0, 2\beta) \in \mathbb{R}^4$$

y

$$\bar{a}'_1 = (\beta, 1, \alpha + \beta) \in \mathbb{R}^3$$
$$\bar{a}'_2 = (0, 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3$$
$$\bar{a}'_3 = (1, -\alpha, 0) \in \mathbb{R}^3$$
$$\bar{a}'_4 = (\beta, \beta, 2\beta) \in \mathbb{R}^3$$

Entonces, según lo obtenido anteriormente tenemos que:

$$1.^{o})\ \beta = 0 \wedge \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow r\,(A) = r\,(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}) = r\,(\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \bar{a}'_3, \bar{a}'_4\}) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \text{ ligado} \wedge \{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \bar{a}'_3, \bar{a}'_4\} \text{ ligado}$$

$$2.^{o})\ \alpha = 1 \wedge \forall\, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow r\,(A) = r\,(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}) = r\,(\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \bar{a}'_3, \bar{a}'_4\}) = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \text{ ligado} \wedge \{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \bar{a}'_3, \bar{a}'_4\} \text{ ligado}$$

3.º) $\forall \beta \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow$

$\Rightarrow r(A) = r(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}) = r(\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \bar{a}'_3, \bar{a}'_4\}) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ libre $\wedge$ $\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \bar{a}'_3, \bar{a}'_4\}$ ligado

5. MATRICES EQUIVALENTES POR FILAS

Definición 5.1

Sea $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$. Se llaman operaciones elementales de filas efectuadas sobre la matriz A a cualquiera de las operaciones siguientes:

1.º) Intercambiar la fila i de A con otra fila j de A.
2.º) Multiplicar todos los elementos de una fila i de A por un escalar $\lambda \in K - \{0\}$.
3.º) Sumar a los elementos de una fila i de A los elementos de otra fila j de A multiplicados por un escalar fijo λ.

Definición 5.2

Se dice que dos matrices $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ son equivalentes por filas, cuando la matriz B se obtiene a partir de la matriz A mediante un número finito de operaciones elementales de fila.

Que A y B son equivalentes por filas se representa por $A \sim B$.

Proposición 5.1

Si $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ son equivalentes por filas, entonces:

$$L(\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_i, ..., \bar{a}_m\}) = L(\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_i, ..., \bar{b}_m\})$$

siendo:

$\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \wedge \bar{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, ..., b_{in}) \in K^n$ para i = 1, 2, ..., m

Demostración

Como $A \wedge B$ son equivalentes por filas resulta que existen p operaciones elementales de fila $0'_F, 0''_F, ..., 0^{(p}_F$ que aplicadas sucesivamente a A nos originarán las matrices $C', C'', ..., C^{(p-1}$, B equivalentes a A.

$$A \overset{0'_F}{\sim} C' \overset{0''_F}{\sim} C'' \sim ... \overset{0^{(p-1}_F}{\sim} C^{(p-1} \overset{0^{(p}_F}{\sim} B,$$

siendo:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n};\ C' = [c'_{ij}]_{m\times n};\ C'' = [c''_{ij}]_{m\times n};\ ...;\ C^{(p-1} = [c^{(p-1}_{ij}]_{m\times n};\ B = [b_{ij}]_{m\times n}$$

Consideremos en principio las matrices equivalentes por filas A y C' y demostraremos que $L(\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m\}) \overset{?}{=} L(\{\overline{c}'_1, \overline{c}'_2, ..., \overline{c}'_m\})$ donde:

$$\overline{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \qquad \overline{c}'_i = (c'_{i1}, c'_{i2}, ..., c'_{in}) \qquad \text{para } i = 1, 2, ..., m$$

En efecto, cada vector fila $\overline{c}'_i$ de la matriz C' coincide con $\overline{a}_i$ o $\overline{a}_j$ o $\lambda\overline{a}_i$ o $\overline{a}_i + \lambda\overline{a}_j$, es decir, cada vector fila $\overline{c}'_i$ de C' es un vector fila de A o es una combinación lineal de vectores fila de A, y también cada vector fila $\overline{a}_i$ de A es un vector fila de C' o es una combinación lineal de vectores fila de C' con lo que según la proposición 4.2 del tema I tendremos que:

$$L(\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m\}) = L(\{\overline{c}'_1, \overline{c}'_2, ..., \overline{c}'_m\}) \tag{1}$$

Considerando las equivalencias por filas $C' \sim C''$, $C'' \sim C'''$, ..., $C^{(p-1} \sim B$ se demuestra de la misma forma que:

$$L(\{\overline{c}'_1, \overline{c}'_2, ..., \overline{c}'_m\}) = L(\{\overline{c}''_1, \overline{c}''_2, ..., \overline{c}''_m\}) \tag{2}$$
$$L(\{\overline{c}''_1, \overline{c}''_2, ..., \overline{c}''_m\}) = L(\{\overline{c}'''_1, \overline{c}'''_2, ..., \overline{c}'''_m\}) \tag{3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L(\{\overline{c}_1^{(p-1}, \overline{c}_2^{(p-1}, ..., \overline{c}_m^{(p-1}\}) = L(\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_m\}) \tag{p}$$

y de (1), (2), ..., (p) concluimos que:

$$L(\{\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_m\}) = L(\{\overline{b}_1, \overline{b}_2, ..., \overline{b}_m\})$$

Consecuencia

Si $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ y $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ son equivalentes por filas, entonces: r (A) = r (B).

Demostración

Sabemos que:

$$\dim [L (\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\})] = r \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\} = r (A)$$

y

$$\dim [L (\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m\})] = r \{\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m\} = r (B)$$

entonces:

$$A \sim B \overset{\text{p. 5.1}}{\Rightarrow} L (\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\}) = L (\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m\}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \dim [L (\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_m\})] = \dim [L (\{\bar{b}_1, \bar{b}_2, ..., \bar{b}_m\})] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r (A) = r (B)$$

Ejercicio 7

Sean las matrices $A, B \in M_{5\times 4} (\mathbb{R})$ definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.º) Probar que A y B son equivalentes por filas.
2.º) Hallar el rango de A según los valores del parámetro α.

Solución

1.º)

$$A \overset{\substack{F_2 + \alpha F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \\ F_5 - F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \overset{F_3 + F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \overset{F_4 + F_3}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \overset{F_5 + F_4}{\sim} B$$

2.º) Como $A \sim B$ será $1 \leq r(A) = r(B) \leq 4$.
Además:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{vmatrix} = (1+\alpha)^3$$

Entonces:
— Para $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ es:

$$r(A) = r(B) = 4$$

— Para $\alpha = -1$ es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto $r(A) = r(B) = 1$

Ejercicio 8

1.º) Sean los determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |V| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

Consideremos los polinomios:

$$\phi_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \qquad \text{con} \qquad 1 \leq i \leq 4$$

Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son cuatro escalares dados, calcular el valor de:

$$|B| = \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_3(x_1) & \phi_4(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_3(x_2) & \phi_4(x_2) \\ \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) & \phi_3(x_3) & \phi_4(x_3) \\ \phi_1(x_4) & \phi_2(x_4) & \phi_3(x_4) & \phi_4(x_4) \end{vmatrix}$$

en función de los determinantes $|V|$ y $|A|$.

2.º) Hallar el valor de:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2x_1+3 & 3x_1^2+4x_1 & 4x_1^3+5x_1^2 \\ 1 & 2x_2+3 & 3x_2^2+4x_2 & 4x_2^3+5x_2^2 \\ 1 & 2x_3+3 & 3x_3^2+4x_3 & 4x_3^3+5x_3^2 \\ 1 & 2x_4+3 & 3x_4^2+4x_4 & 4x_4^3+5x_4^2 \end{vmatrix}$$

Solución

1.º) Teniendo en cuenta que:

$$\phi_i(x_j) = a_i + b_i x_j + c_i x_j^2 + d_i x_j^3 \qquad \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

podremos poner:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} = V \cdot A$$

Luego:

$$|B| = |V \cdot A| = |V| \cdot |A| =$$
$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)\,|A|$$

2.º)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2x_1+3 & 3x_1^2+4x_1 & 4x_1^3+5x_1^2 \\ 1 & 2x_2+3 & 3x_2^2+4x_2 & 4x_2^3+5x_2^2 \\ 1 & 2x_3+3 & 3x_3^2+4x_3 & 4x_3^3+5x_3^2 \\ 1 & 2x_4+3 & 3x_4^2+4x_4 & 4x_4^3+5x_4^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |C| = |V| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24\,|V|$$

Ejercicio 9

Sean las matrices $A_n, B_n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definidas por:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & n & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Hallar: Det (A_n) y Det (B_n).

Solución

$$|A_n| \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & -n & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (1-n)+(n-1) \end{vmatrix} = (-n)^{n-1} \cdot 0 = 0$$

(1) Restando a todas las filas la última.
(2) Sumando a la última columna todas las demás.

$$|B_n| = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n \end{vmatrix}_{(n-1)} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & n \end{vmatrix}_{(n-1)} =$$

$$= n^{n-1} + |B_{n-1}| = n^{n-1} + n^{n-2} + |B_{n-2}| = \dots =$$

$$= \dots = n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + |B_2| =$$

$$= n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & n \end{vmatrix} = n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n^2 + n + 1 = \frac{n^n - 1}{n-1}$$

Ejercicio 10

Sea la matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \alpha & \alpha & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar r (A) según los distintos valores del parámetro real α.

Solución

$$A_n \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 2-\alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2-\alpha & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2\,(2-\alpha)^{n-1}$$

(1) Restando a cada fila la siguiente

Para $\alpha \in \mathbb{R} - \{2\}$: $|A| = 2\,(2-\alpha)^{n-1} \neq 0$ y r (A) = n.
Para $\alpha = 2$; $A = [a_{ij}]_{n \times n} / a_{ij} = 2 \quad \forall\, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ y r (A) = 1

Ejercicio 11

Sea la matriz $A \in M_{(n+1)\times n}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & x \\ -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallar r (A) según los distintos valores de x.

Solución

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x+1 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & x+1 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times n} = B$$

Luego $r(A) = r(B) \leq n$.

$$r(A) = r(B) = n \Leftrightarrow (x+1)^{n-1} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$$
$$r(A) = r(B) < n \Leftrightarrow (x+1)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Además, como para $x = -1$ es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times n} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} = 2^{n-2} \neq 0$$

con lo que:

$$r(A) = r(B) = n - 1 \Leftrightarrow x = -1$$

Tema IV

Matrices inversibles

1. MATRICES SINGULARES. MATRICES REGULARES

Sea una matriz $A \in M_{n \times n}(K)$.

Definición 1.1

Se dice que $A \in M_{n \times n}(K)$ es regular si cumple que $\text{Det}(A) \neq 0$.

Definición 1.2

Se dice que $A \in M_{n \times n}(K)$ es singular si cumple que $\text{Det}(A) = 0$.

2. MATRICES INVERSIBLES

Sea I la matriz unidad de orden n y $A \in M_{n \times n}(K)$.

Definición 2.1

Se dice que $A \in M_{n \times n}(K)$ es inversible si existe $B \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$.

Proposición 2.1

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$. Entonces:

$$A \text{ inversible} \Rightarrow A \text{ regular}$$

Demostración

$$A \text{ inversible } \Rightarrow A \,.\, B = I \Rightarrow \text{Det}(A) \,.\, \text{Det}(B) = \text{Det}(I) = 1 \Rightarrow$$

$$\underset{K \text{ cuerpo}}{\Rightarrow} \quad \text{Det}(A) \neq 0 \Rightarrow A \text{ regular}$$

Proposición 2.2

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ una matriz inversible. Entonces existe una única matriz $B \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A \,.\, B = B \,.\, A = I$.

Demostración

Supongamos que además de B, tenemos otra matriz $C \in M_{n \times n}(K)$ tal que $A \,.\, C = C \,.\, A = I$. Entonces:

$$A \,.\, C = I \Rightarrow B \,.\, A \,.\, C = B \,.\, I \underset{B \,.\, A = I}{\Rightarrow} C = B$$

y de aquí concluimos la unicidad.

Definición 2.2

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ una matriz inversible. Entonces la única matriz $B \in M_{n \times n}(K)$ que cumple $A \,.\, B = B \,.\, A = I$ se denomina matriz inversa de A.

A la matriz inversa de A se le representa por A^{-1}.

3. MATRIZ ADJUNTA

Sea $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in M_{n \times n}(K)$.

Definición 3.1

Se denomina matriz adjunta de $A \in M_{n \times n}(K)$ a la matriz $(A')^T$ donde $A' = [A_{ij}]_{n \times n} \in M_{n \times n}(K)$ es la matriz cuadrada que se obtiene al sustituir los elementos de A por sus adjuntos. La matriz adjunta de A se representará por $\tilde{A}$.

Nota: Para facilitar la demostración siguiente representaremos $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{n\times n}$ donde $\tilde{a}_{ij} = A_{ji}$.

Proposición 3.1

Sea I la matriz unidad de orden n. Entonces:

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \text{Det}(A) \cdot I, \qquad \forall A \in M_{n\times n}(K)$$

Demostración

a)

$$A \cdot \tilde{A} = [a_{ij}]_{n\times n} \cdot [\tilde{a}_{ij}]_{n\times n} = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\,\tilde{a}_{lj}\right]_{n\times n} = \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\,A_{jl}\right]_{n\times n} =$$

$$= [\text{Det}(A) \cdot \delta_{ij}]_{n\times n} = \text{Det}(A) \cdot I$$

En este desarrollo $\delta_{ij} = 1$ si $i = j \wedge \delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
Nótese que $I = [\delta_{ij}]_{n\times n}$.

b)

$$\tilde{A} \cdot A = [\tilde{a}_{ij}]_{n\times n} \cdot [a_{ij}]_{n\times n} = \left[\sum_{l=1}^{n} \tilde{a}_{il}\,a_{lj}\right]_{n\times n} = \left[\sum_{l=1}^{n} A_{li}\,a_{lj}\right]_{n\times n} =$$

$$= [\text{Det}(A) \cdot \delta_{ij}]_{n\times n} = \text{Det}(A) \cdot I$$

Conclusión: $A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \text{Det}(A) \cdot I$

Proposición 3.2

Si $A \in M_{n\times n}(K)$ es regular, es inversible y además:

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \tilde{A}$$

Demostración

A regular $\Rightarrow$ Det (A) $\neq 0$ y tenemos:

$$A \cdot \tilde{A} = \tilde{A} \cdot A = \text{Det}(A) \cdot I \underset{\text{Det}(A) \neq 0}{\Rightarrow} A \cdot \left(\frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \tilde{A} \right) = \left(\frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \tilde{A} \right) \cdot A = I$$

Conclusión: A es inversible y $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \tilde{A}$

Proposición 3.3

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$. Entonces:

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow A \text{ regular}$$

Demostración

$\Rightarrow$) Ya demostrado en la proposición 2.1.
$\Leftarrow$) Ya demostrado en la proposición 3.2.

Proposición 3.4

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$. Entonces:

$$[\exists\, B / A \cdot B = I \vee B \cdot A = I] \Rightarrow A \text{ regular} \wedge A^{-1} = B$$

Demostración

$$[A \cdot B = I \vee B \cdot A = I] \Rightarrow \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B) = 1 \underset{\text{K cuerpo}}{\Rightarrow} \text{Det}(A) \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A \text{ regular}$$

Por tanto A es inversible y $\exists\, A^{-1} \in M_{n \times n}(K)$. Entonces:

$$A \cdot B = I \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$$
$$B \cdot A = I \Rightarrow B \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$$

Nótese que la fórmula obtenida en la proposición 3.2 para hallar la inversa de una matriz regular es aplicable en una mínima parte de los casos que se presentan en la práctica. Por este motivo se han desarrollado otros métodos, algunos de los cuales presentaremos en los ejercicios siguientes.

Ejercicio 1

Sea la matriz regular A de orden n definida sobre $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha \neq 1$$

Aplicando la teoría de operaciones elementales de fila hallar la matriz A^{-1}.

Solución

Es fácilmente verificable que toda matriz regular de orden n definida sobre un cuerpo conmutativo K puede ser transformada mediante operaciones elementales de filas en la matriz unidad $I \in M_{n \times n}(K)$.

Además, cada operación elemental 0_i de filas sobre una matriz $A \in M_{n \times n}(K)$ puede ser implementada premultiplicando A por la matriz elemental $0_i \in M_{n \times n}(K)$ que se obtiene aplicando dicha operación elemental a la matriz $I \in M_{n \times n}(K)$.

Según esto tenemos, considerando que las operaciones elementales $0_1, 0_2, \dots, 0_m$ transforman A en $I \in M_{n \times n}(K)$:

$$A \overset{0_1}{\sim} A_1 \overset{0_2}{\sim} A_2 \overset{0_3}{\sim} \dots \overset{0_m}{\sim} I \Rightarrow 0_m \cdot 0_{m-1} \cdot \dots \cdot 0_1 \cdot A = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0_m \cdot 0_{m-1} \cdot \dots \cdot 0_1 \cdot I = A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I \overset{0_1}{\sim} 0_1 \overset{0_2}{\sim} B_2 \overset{0_3}{\sim} \dots \overset{0_m}{\sim} A^{-1}$$

De acuerdo con este esquema, obtendremos la matriz $A^{-1} \in M_{n \times n}(K)$ aplicando a $I \in M_{n \times n}(K)$ y en el mismo orden las operaciones elementales de fila que transforman $A \in M_{n \times n}(K)$ en $I \in M_{n \times n}(K)$.

Considerando ahora nuestro ejercicio tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} 0_1 = F_2 - F_1 \\ 0_2 = F_3 - F_1 \\ \sim \\ \dots \\ 0_{n-1} = F_n - F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0_n = \frac{1}{\alpha-1} F_2 \\ 0_{n+1} = \frac{1}{\alpha-1} F_3 \\ \sim \\ \dots \\ 0_{2n-2} = \frac{1}{\alpha-1} F_n \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0_{2n-1} = F_1 - F_2 \\ 0_{2n} = F_1 - F_3 \\ \sim \\ \dots \\ 0_{3n-3} = F_1 - F_n \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

Aplicando ahora las $3n - 3$ operaciones elementales de filas realizadas a la matriz $I \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ obtenemos $A^{-1} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \overset{0_1, 0_2, \dots, 0_{n-1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \overset{0_n, 0_{n+1}, \dots, 0_{2n-2}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\alpha-1} & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} \overset{0_{2n-1}, 0_{2n}, \dots, 0_{3n-3}}{\sim}$$

$$\sim A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{n-1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & -\frac{1}{\alpha-1} & \dots & -\frac{1}{\alpha-1} \\ -\frac{1}{\alpha-1} & \frac{1}{\alpha-1} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\alpha-1} & 0 & \frac{1}{\alpha-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{\alpha-1} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\alpha-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\alpha-1} \begin{pmatrix} \alpha+n-2 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que todo lo dicho es perfectamente trasladable, con los cambios mínimos oportunos, a la teoría análoga de operaciones elementales de columnas que serían, en tal caso, implementadas postmultiplicando la matriz que se transforma por la matriz elemental correspondiente.

Ejercicio 2

Sea la matriz cuadrada A de orden n definida sobre $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que A es regular y hallar A^{-1}.

Solución

$$\text{Det}(A) \overset{F_1' = F_1 + F_2 + \dots + F_n}{=} \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = n \neq 0$$

Conclusión: A es una matriz regular cualquiera que sea su orden.

Considerando ahora la igualdad matricial $Y = A \cdot X$ donde

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

y premultiplicando ambos miembros de la igualdad por A^{-1}, que existe por ser A regular, tenemos:

$$A^{-1} \cdot Y = A^{-1} \cdot A \cdot X \Leftrightarrow A^{-1} \cdot Y = X$$

Por tanto nos bastará poner la matriz X en función de la Y para obtener la matriz A^{-1} buscada. Entonces:

$$Y = A \cdot X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_n \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 + x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = x_1 + x_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow E'_1 = E_1 + E_2 + \dots + E_n$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = nx_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = x_1 + x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = x_1 + x_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{n}\,(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{n}\,(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) \\ x_3 = y_3 - \frac{1}{n}\,(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = y_n - \frac{1}{n}\,(y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{n}\,y_1 + \frac{1}{n}\,y_2 + \frac{1}{n}\,y_3 + \ldots + \frac{1}{n}\,y_n \\ x_2 = -\frac{1}{n}\,y_1 + \frac{n-1}{n}\,y_2 - \frac{1}{n}\,y_3 - \ldots - \frac{1}{n}\,y_n \\ x_3 = -\frac{1}{n}\,y_1 - \frac{1}{n}\,y_2 + \frac{n-1}{n}\,y_3 - \ldots - \frac{1}{n}\,y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = -\frac{1}{n}\,y_1 - \frac{1}{n}\,y_2 - \frac{1}{n}\,y_3 - \ldots + \frac{n-1}{n}\,y_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Conclusión:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \ldots & -\frac{1}{n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \ldots & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3

Sea $A \in M_{n \times n}(K)$ una matriz nilpotente de índice p:

a) Considerando la suma $M = I + A + A^2 + ... + A^{p-1}$ demostrar que $I - A$ es regular y hallar $(I - A)^{-1}$.

b) Utilizando el resultado a) calcular la inversa de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

a) $(I - A) \cdot M = (I - A) \cdot (I + A + A^2 + ... + A^{p-1}) =$

$$= (I + A + A^2 + ... + A^{p-1}) - (A + A^2 + A^3 + ... + A^p) = I$$

$$\uparrow$$

$$A^p = [0]_{n \times n}$$

Conclusión: $I - A$ es regular y $(I - A)^{-1} = M$.

b) Es evidente la siguiente descomposición de la matriz B:

$$B = I - A \quad \text{siendo} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, si la matriz A es nilpotente la aplicación del apartado a) es inmediata. Veamos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = [0]_{4 \times 4}$$

Por tanto A es nilpotente de índice 4. Entonces:

$$B^{-1} = I + A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. PROPIEDADES RELATIVAS A LAS MATRICES INVERSIBLES O REGULARES

Representaremos por $R_{n\times n}(K)$ el conjunto de las matrices regulares o inversibles de orden n definidas sobre el cuerpo conmutativo K.

Proposición 4.1

1) $\forall A \in R_{n\times n}(K)$: $\text{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\text{Det}(A)}$

2) $\forall A \in R_{n\times n}(K)$: $A^{-1} \in R_{n\times n}(K) \wedge (A^{-1})^{-1} = A$

3) $\forall A \in R_{n\times n}(K)$: $A^T \in R_{n\times n}(K) \wedge (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4) $\forall A, B \in R_{n\times n}(K)$: $A \cdot B \in R_{n\times n}(K) \wedge (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

5) $\forall A \in R_{n\times n}(K)\ \forall m \in Z^+$: $A^m \in R_{n\times n}(K) \wedge (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

6) $\forall A \in R_{n\times n}(K)\ \forall \lambda \in K - \{0\}$: $\lambda \cdot A \in R_{n\times n}(K) \wedge (\lambda \cdot A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$

Demostración

1) $A \in R_{n\times n}(K) \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(A^{-1}) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$$

2) $A \in R_{n\times n}(K) \Rightarrow A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow A^{-1} \in R_{n\times n}(K) \wedge (A^{-1})^{-1} = A$

3) $A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I \Rightarrow A^T \in R_{n\times n}(K) \wedge (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4) $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cdot B \in R_{n\times n}(K) \wedge (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

5) $A^m \cdot (A^{-1})^m = A \cdot A \cdot \overset{m}{\ldots} \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \overset{m}{\ldots} \cdot A^{-1} = A \cdot A \cdot \overset{m-1}{\ldots} \cdot A \cdot I \cdot$
$\cdot A^{-1} \cdot \overset{m-1}{\ldots} \cdot A^{-1} = \ldots = I \Rightarrow A^m \in R_{n\times n}(K) \wedge (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

6) $(\lambda \cdot A) \cdot (\lambda^{-1} \cdot A^{-1}) = (\lambda \cdot \lambda^{-1}) \cdot (A \cdot A^{-1}) = I \Rightarrow \lambda \cdot A \in R_{n\times n}(K) \wedge$
$\wedge (\lambda \cdot A)^{-1} = \lambda^{-1} \cdot A^{-1}$

5. POTENCIAS DE EXPONENTE ENTERO DE MATRICES REGULARES

Definición 5.1

Sea una matriz regular $A \in R_{n\times n}(K)$ definida sobre un cuerpo conmutativo K. Entonces por definición:

$$A^{-m} = (A^{-1})^m = (A^m)^{-1} \quad , \qquad \forall\, m \in Z^+$$

Proposición 5.1

1) $\forall\, A \in R_{n\times n}(K) \quad \forall\, p, q \in Z: \; A^p \cdot A^q = A^{p+q}$
2) $\forall\, A \in R_{n\times n}(K) \quad \forall\, p, q \in Z: \; (A^p)^q = A^{p\cdot q}$

Demostración

1) Existen tres casos posibles:

a) $p \geq 0 \wedge q \geq 0$: Este caso está demostrado en el Tema 2 para $A \in M_{n\times n}(K)$. Por tanto, es evidente que se cumple para $A \in R_{n\times n}(K)$.

b) Uno de los exponentes es negativo y el otro no. Demostraremos el caso en que $p \geq 0 \wedge q < 0$. El caso $p < 0 \wedge q \geq 0$ es análogo.

$$A^p \cdot A^q = A \cdot A \cdot \overset{p}{\ldots} \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \overset{|q|}{\ldots} \cdot A^{-1}$$

$$\text{Si } p - |q| \geq 0: \; A^p \cdot A^q = A^{p-|q|} \underset{\substack{\uparrow \\ q<0}}{=} A^{p+q}$$

$$\text{Si } p - |q| < 0: \; A^p \cdot A^q = (A^{-1})^{|q|-p} \underset{\substack{\uparrow \\ |q|-p \in Z^+}}{=} A^{p-|q|} \underset{\substack{\uparrow \\ q<0}}{=} A^{p+q}$$

c) $p < 0 \wedge q < 0$, entonces:

$$A^p \cdot A^q = A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \overset{|p|}{\ldots} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot \overset{|q|}{\ldots} \cdot A^{-1} = (A^{-1})^{|p|+|q|} =$$

$$\uparrow \quad |p|+|q| \in Z^+ \qquad p<0 \wedge q<0$$

$$= A^{-(|p|+|q|)} = A^{-(-p-q)} = A^{p+q}$$

Conclusión:

$$\forall\, A \in R_{n\times n}(K) \wedge \forall\, p, q \in Z:\ A^p \cdot A^q = A^{p+q}$$

2) Existen cuatro casos posibles:

a) $p \geq 0 \wedge q \geq 0$: Este caso está demostrado en el Tema 2 para $A \in M_{n\times n}(K)$. Por tanto, es evidente que se cumple para $A \in R_{n\times n}(K)$.

b) $p \geq 0 \wedge q < 0$:

$$(A^p)^q = ((A^p)^{-1})^{|q|} = ((A^{-1})^p)^{|q|} = (A^{-1})^{p|q|} = A^{-p|q|} = A^{p\cdot q}$$

$$\uparrow \quad p\geq 0 \ \wedge\ |q|\geq 0 \qquad \uparrow \qquad \uparrow \quad q<0$$

c) $p < 0 \wedge q > 0$:

$$(A^p)^q = ((A^{-1})^{|p|})^q = (A^{-1})^{|p|q} = A^{-|p|q} = A^{p\cdot q}$$

$$\uparrow \quad |p|\geq 0 \ \wedge\ q\geq 0 \qquad \uparrow \qquad \uparrow \quad p<0$$

d) $p < 0 \wedge q < 0$:

$$(A^p)^q = ([(A^{-1})^{|p|}]^{-1})^{|q|} = ([(A^{-1})^{-1}]^{|p|})^{|q|} = A^{|p|\cdot|q|} = A^{p\cdot q}$$

$$\uparrow \quad |p|\geq 0 \wedge |q|\geq 0 \quad p<0 \wedge q<0 \qquad \uparrow$$

Conclusión:

$$\forall\, A \in R_{n\times n}(K) \wedge \forall\, p, q \in Z:\ (A^p)^q = A^{p\cdot q}$$

Ejercicio 4

Sea una matriz cuadrada $A \in M_{p \times p}(K)$ tal que:

$$(A - I)^2 = [0]_{p \times p}$$

Se pide:

a) Determinar A^n, $\forall\, n \in Z$.
b) Hallar A^n para:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

a) Por definición $A^o = I$.
Para $n \in Z^+$ tenemos: $A^1 = A$

$$(A - I)^2 = [0]_{p \times p} \Rightarrow A^2 - 2A + I = [0]_{p \times p} \Rightarrow A^2 = 2A - I$$

$$A^3 = A \,.\, A^2 = A \,.\, (2A - I) = 2A^2 - A = 2\,(2A - I) - A = 3A - 2I$$

Parece existir una ley de formación de las potencias positivas de A.
Esta ley de formación es $A^n = n \,.\, A - (n - 1) \,.\, I$. Comprobémosla por el método de inducción completa:
Para $n = 1$, $A^1 = 1 \,.\, A - 0 \,.\, I = A$ la fórmula es válida.
Supongamos que $A^{n_o} = n_o \,.\, A - (n_o - 1) \,.\, I$. Entonces:

$$A^{n_o + 1} = A \,.\, A^{n_o} = A\,[n_o \,.\, A - (n_o - 1) \,.\, I] = n_o \,.\, A^2 - (n_o - 1) \,.\, A =$$
$$= n_o\,(2A - I) - (n_o - 1) \,.\, A = (n_o + 1) \,.\, A - n_o \,.\, I$$

Por tanto, $A^n = n \,.\, A - (n - 1) \,.\, I$, $\forall\, n \in Z^+$.
Para $n \in Z^-$ tenemos:

$$(A - I)^2 = [0]_{p \times p} \Rightarrow A^2 - 2A + I = [0]_{p \times p} \Rightarrow A^2 - 2A = -I \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A\,(2I - A) = I \Rightarrow A^{-1} = 2I - A$$

$$A^{-2} = (A^{-1})^2 = (2I - A)^2 = 4I - 4A + (2A - I) = 3I - 2A$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = A^{-1} \,.\, (A^{-1})^2 = (2I - A)\,(3I - 2A) = 6I - 4A - 3A + 2A^2 =$$
$$= 6I - 7A + 2\,(2A - I) = 4I - 3A$$

Parece existir una ley de formación de las potencias negativas de A.

Esta ley de formación es $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I$. Comprobémoslo por el método de inducción completa:

Para $n = -1 \Rightarrow A^{-1} = -1 \cdot A - (-1-1) \cdot I = -A + 2I$ la fórmula es válida.

Supongamos que $A^{n_o} = n_o \cdot A - (n_o - 1) \cdot I$. Entonces:

$$\begin{aligned} A^{n_o - 1} &= A^{-1} \cdot A^{n_o} = (2I - A)\,[n_o \cdot A - (n_o - 1) \cdot I] = \\ &= 2n_o \cdot A - 2(n_o - 1) \cdot I - n_o \cdot A^2 + (n_o - 1) \cdot A = \\ &= (3n_o - 1) \cdot A - n_o (2A - I) - 2(n_o - 1) \cdot I = \\ &= (n_o - 1) \cdot A - (n_o - 2) \cdot I \end{aligned}$$

Por tanto, $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I$, $\forall\, n \in Z^-$.

Conclusión: $A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I$, $\forall\, n \in Z$.

b) Es inmediato que A cumple la condición $(A - I)^2 = [0]_{3 \times 3}$.

Por tanto podemos aplicar el resultado obtenido en el apartado a).

$$A^n = n \cdot A - (n-1) \cdot I = n \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (n-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -na & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall\, n \in Z$$

6. MATRICES ORTOGONALES. PROPIEDADES RELATIVAS A LAS MATRICES ORTOGONALES

Definición 6.1

Sea una matriz regular $A \in R_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es una matriz ortogonal si cumple que $A^T = A^{-1}$.

De esta definición se deduce que $A \in R_{n \times n}(\mathbb{R})$ es ortogonal si y sólo si $A \cdot A^T = I$.

Proposición 6.1

Representaremos por $0_{n\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices ortogonales de orden n definidas sobre el cuerpo conmutativo $\mathbb{R}$.

Entonces:

1) $\forall\ A \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}) :\ \text{Det}(A) = 1 \vee \text{Det}(A) = -1.$
2) $\forall\ A, B \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}) :\ A \,.\, B \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}).$
3) $\forall\ A \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}) :\ A^T \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}).$
4) $\forall\ A \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}) :\ A^{-1} \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}).$

Demostración

1) $A \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A \,.\, A^T = I \Rightarrow \text{Det}(A) \,.\, \text{Det}(A^T) = 1 \Rightarrow$

$\uparrow$ $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)$

$$\Rightarrow [\text{Det}(A)]^2 = 1 \Rightarrow \text{Det}(A) = 1 \vee \text{Det}(A) = -1.$$

2) $(A \,.\, B) \,.\, (A \,.\, B)^T = A \,.\, B \,.\, B^T \,.\, A^T \underset{\uparrow}{=} A \,.\, B \,.\, B^{-1} \,.\, A^{-1} = A \,.\, A^{-1} = I \Rightarrow$

$A, B \in 0_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow (A \,.\, B)^{-1} = (A \,.\, B)^T \Rightarrow A \,.\, B \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

3) $A^T \,.\, (A^T)^T = A^T \,.\, A \underset{\uparrow}{=} A^{-1} \,.\, A = I \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^T)^T \Rightarrow A^T \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}).$

$A \in 0_{n\times n}(\mathbb{R})$

4) $A \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}) \underset{\uparrow}{\Rightarrow} A^T = A^{-1} \wedge A^T \in 0_{n\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^{-1} \in 0_{n\times n}(\mathbb{R})$

3)

Ejercicio 5

Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar una matriz $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ triangular superior tal que $C = A \,.\, B$ sea ortogonal.

Solución

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ triangular superior. Entonces:

$$C = A \,.\, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$C \in O_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow C^T = C^{-1} \Leftrightarrow C \,.\, C^T = I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+c \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a \\ b+c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a^2 + (b+c)^2 = 1 \\ a^2 + b\,(b+c) = 0 \\ a^2 + b\,(b+c) = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -b\,(b+c) + (b+c)^2 = 1 \\ a^2 = -b\,(b+c) \\ -b\,(b+c) + b^2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c\,(b+c) = 1 \\ a^2 = -b^2 + 1 \\ -bc = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} c^2 = 2 \\ a^2 = 1 - b^2 \\ b = -\dfrac{1}{c} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \left(c = \sqrt{2} \wedge b = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \wedge a^2 = \dfrac{1}{2}\right) \vee \\ \vee \left(c = -\sqrt{2} \wedge b = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \wedge a^2 = \dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(c = \sqrt{2} \wedge b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge a = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee$$

$$\vee \left(c = \sqrt{2} \wedge b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge a = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee$$

$$\vee \left(c = -\sqrt{2} \wedge b = \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge a = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee$$

$$\vee \left(c = -\sqrt{2} \wedge b = \frac{1}{\sqrt{2}} \wedge a = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Conclusión:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vee \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vee$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \vee \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

Sea una matriz regular $A \in R_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A = I + B$ en donde B es una matriz antisimétrica. Demostrar que $C = A^{-1} \cdot A^T$ es una matriz ortogonal.

Solución

$$C \cdot C^T = (A^{-1} \cdot A^T) \cdot (A^{-1} \cdot A^T)^T = A^{-1} \cdot A^T \cdot A \cdot (A^{-1})^T = \quad \overset{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}{\downarrow}$$

$$= A^{-1} \cdot A^T \cdot A \cdot (A^T)^{-1} = \quad \overset{\uparrow}{}$$

$$\text{B antisimétrica} \Rightarrow B^T = -B$$

$$= (I + B)^{-1} \cdot (I - B) \cdot (I + B) \cdot (I - B)^{-1} =$$

$$= (I + B)^{-1} \cdot (I - B^2) \cdot (I - B)^{-1} =$$

$$= (I + B)^{-1} \cdot (I + B) \cdot (I - B) \cdot (I - B)^{-1} = I \Rightarrow C^T = C^{-1}$$

Conclusión: C es ortogonal.

7. MATRICES UNITARIAS. PROPIEDADES RELATIVAS A LAS MATRICES UNITARIAS

Definición 7.1

Sea $A \in R_{n \times n}(\mathbb{C})$ definida sobre el cuerpo conmutativo $\mathbb{C}$. Se dice que A es una matriz unitaria si cumple que $A^* = A^{-1}$.

De esta definición se deduce que A es unitaria si y sólo si $A \cdot A^* = I$.

Proposición 7.1

Representaremos por $U_{n\times n}(\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices unitarias de orden n. Entonces:

1) $\forall\, A \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$: $|\text{Det}(A)| = 1$ donde $|\text{Det}(A)|$ significa módulo del número complejo Det (A).
2) $\forall\, A, B \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$: $A \,.\, B \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$.
3) $\forall\, A \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$: $A^T \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$.
4) $\forall\, A \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$: $A^* \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$.
5) $\forall\, A \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$: $A^{-1} \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Demostración

1) $A \in U_{n\times n}(\mathbb{C}) \Rightarrow A \,.\, A^* = I \Rightarrow \text{Det}(A) \,.\, \text{Det}(A^*) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \text{Det}(A) \,.\, \overline{\text{Det}(A)} = 1 \Rightarrow |\text{Det}(A)| = 1.$

2) $(A \,.\, B) \,.\, (A \,.\, B)^* = A \,.\, B \,.\, B^* \,.\, A^* = \underset{\uparrow}{A \,.\, B \,.\, B^{-1} \,.\, A^{-1}} = A \,.\, A^{-1} = I \Rightarrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A, B \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$
$\Rightarrow (A \,.\, B)^{-1} = (A \,.\, B)^* \Rightarrow A \,.\, B \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$.

3) $A^T \,.\, (A^T)^* = A^T \,.\, (A^*)^T = \underset{\uparrow}{(A^* \,.\, A)^T} = I^T = I \Rightarrow (A^T)^{-1} = (A^T)^* \Rightarrow$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$
$\Rightarrow A^T \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$.

4) $A^* \,.\, (A^*)^* = A^* \,.\, \underset{\uparrow}{A} = I \Rightarrow (A^*)^{-1} = (A^*)^* \Rightarrow A^* \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad A \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$

5) $A \in U_{n\times n}(\mathbb{C}) \Rightarrow A^* = A^{-1} \wedge A^* \in U_{n\times n}(\mathbb{C}) \Rightarrow A^{-1} \in U_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Ejercicio 7

Sea una matriz $B \in R_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B^{-1} = 2 \,.\, B^T$. Demostrar que $A = B - i \,.\, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ es una matriz unitaria.

Solución

$$A \cdot A^* = (B - i \cdot B) \cdot (B - i \cdot B)^* = (B - i \cdot B) \cdot (B + i \cdot B)^T =$$
$$= (B - i \cdot B) \cdot (B^T + i \cdot B^T) = B \cdot B^T + i \cdot B \cdot B^T - i \cdot B \cdot B^T + B \cdot B^T =$$
$$= B \cdot (2B^T) = B \cdot B^{-1} = I$$

Conclusión: $A \in U_{n \times n}(\mathbb{C})$.

8. APLICACION DEL CALCULO MATRICIAL A LOS CAMBIOS DE BASE EN UN ESPACIO VECTORIAL

Proposición 8.1

Sea un K-espacio vectorial V de dimensión finita n y dos bases $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ y $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n\}$ de V. Entonces se cumple que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad \text{con } A = [a_{ij}]_{n \times n} \in R_{n \times n}(K) \qquad (1)$$

en donde la n-tupla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ representa las coordenadas de un vector genérico $\bar{x} \in V$ en la base B, la n-tupla $(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ las coordenadas de $\bar{x} \in V$ en la base B' y las n-tuplas $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$, las coordenadas de los vectores $\bar{e}'_i \in B'$ en la base B, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demostración

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot \bar{e}'_j \overset{\bar{e}'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot \bar{e}_i}{=} \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot \bar{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot a_{ji} \right) \cdot \bar{e}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot a_{ji} \right) \cdot \bar{e}_i \overset{\text{B es una base de V}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow x_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j \cdot a_{ji}, \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}\, x'_1 + a_{21}\, x'_2 + \ldots + a_{n1}\, x'_n \\ x_2 = a_{12}\, x'_1 + a_{22}\, x'_2 + \ldots + a_{n2}\, x'_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{1n}\, x'_1 + a_{2n}\, x'_2 + \ldots + a_{nn}\, x'_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

siendo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(K)$

Además $r(A) = r\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \ldots, \bar{e}'_n\} = n \Rightarrow A \in R_{n \times n}(K)$.

Definición 8.1

En la expresión matricial (1) de la anterior proposición la matriz A^T se denomina matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base B'.

Ejercicio 8

Consideremos la base $B = \{p_1(x) = 2x + 1,\ p_2(x) = 2x^2 + 1,\ p_3(x) = 3\}$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ de los polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales.

a) Determinar la matriz de cambio de coordenadas P_{BB_c} de la base B a la canónica.
b) Determinar la matriz de cambio de coordenadas P_{B_cB} de la base canónica a la base B.
c) Comprobar que son inversas la una de la otra.

Solución

Consideremos la base canónica $B_c = \{x^2, x, 1\}$ de $\mathcal{P}_2$.

Entonces las coordenadas de los vectores de la base canónica B_c en la base B son:

$$x^2 = \alpha_1 (2x + 1) + \alpha_2 (2x^2 + 1) + \alpha_3 . 3 \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1/2 \\ \alpha_3 = -1/6 \end{cases}$$

$$x = \beta_1 (2x + 1) + \beta_2 (2x^2 + 1) + \beta_3 . 3 \iff \begin{cases} \beta_1 = 1/2 \\ \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = -1/6 \end{cases}$$

$$1 = \gamma_1 (2x + 1) + \gamma_2 (2x^2 + 1) + \gamma_3 . 3 \iff \begin{cases} \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 = 0 \\ \gamma_3 = 1/3 \end{cases}$$

Por tanto la matriz de cambio de coordenadas de la base B a la base canónica B_c es:

$$P_{BB_c} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) Las coordenadas de los vectores de la base B en la base canónica B_c son inmediatas:

$$p_1 (x) = 0 . x^2 + 2 . x + 1.1$$
$$p_2 (x) = 2 . x^2 + 0 . x + 1.1$$
$$p_3 (x) = 0 . x^2 + 0 . x + 3.1$$

Por tanto, la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica B_c a la base B es:

$$\mathbf{P}_{B_cB} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = I_3$$

Por tanto: $(P_{BB_c})^{-1} = P_{B_cB}$.

Ejercicio 9

Demostrar que la matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ es regular y hallar su inversa, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

Solución

$|A| = 1$, $\forall n \in Z^+ \Rightarrow$ A regular, $\forall n \in Z^+$. Entonces:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 - ax_2 \\ y_2 = x_2 - ax_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1} = x_{n-1} - ax_n \\ y_n = x_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + ay_2 + \ldots + a^{n-2}\, y_{n-1} + a^{n-1}\, y_n \\ x_2 = y_2 + ay_3 + \ldots + a^{n-2}\, y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = y_{n-1} + ay_n \\ x_n = y_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ldots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

Conclusión:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-2} & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ldots & a^{n-3} & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & a^{n-4} & a^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10

Sea una matriz idempotente $A \in M_{n \times n}(K)$. Demostrar que la matriz $I + A$ es inversible y su inversa $I - \frac{1}{2} \cdot A$.

Utilizando el resultado anterior hallar la matriz inversa de $I + B^p$ donde $B \in M_{n \times n}(K)$ es una matriz periódica de período $p \in Z^+$.

Solución

a)

$$(I + A) \cdot \left(I - \frac{1}{2} \cdot A\right) = I - \frac{1}{2} \cdot A + A - \frac{1}{2} \cdot A^2 \overset{\text{A idempotente}}{\downarrow} = I - \frac{1}{2} \cdot A + A - \frac{1}{2} \cdot A = I$$

y de aquí la conclusión:

$$(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{2} \cdot A$$

b) Veamos en primer lugar que $B^p \in M_{n \times n}(K)$ es una matriz idempotente:

$$(B^p)^2 = B^{2p} = B^{p-1} \cdot B^{p+1} \overset{\text{B periódica (p)}}{\downarrow} = B^{p-1} \cdot B = B^p \Rightarrow B^p \text{ idempotente.}$$

Aplicando ahora el resultado anterior:

$$(I + B^p)^{-1} = I - \frac{1}{2} \cdot B^p$$

Ejercicio 11

Hállese la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Solución

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \\ y_2 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \\ E'_n = E_n - E_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ E'_2 = E_2 - E_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} y_1 & = x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n \\ y_2 - y_1 & = \quad x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n \\ y_3 - y_2 & = \qquad + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n - y_{n-1} & = \qquad\qquad\qquad\qquad x_n \end{array}\right\} \begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ E'_1 = E_1 - E_2 \\ E'_2 = E_2 - E_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ E'_{n-1} = E_{n-1} - E_n \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{rl} x_1 & = 2y_1 - y_2 \\ x_2 & = -y_1 + 2y_2 - y_3 \\ x_3 & = \quad -y_2 + 2y_3 - y_4 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} & = \qquad\qquad - y_{n-2} + 2y_{n-1} - y_n \\ x_n & = \qquad\qquad\qquad -y_{n-1} + y_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

y de aquí concluimos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

Ejercicio 12

Demostrar que las matrices de la forma:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}\left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi}\right)$$

donde $\alpha \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi}$ son ortogonales y probar que forman un grupo con el producto matricial.

Solución

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, \alpha \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi}$$

Por tanto $A_\alpha \in 0_{2\times 2}\left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi}\right)$, $\forall\, \alpha \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi}$

Veremos ahora que forman grupo:

i)

$$A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & \text{sen}\,\beta \\ -\text{sen}\,\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta & \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta \\ -\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \text{sen}\,\beta & -\text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta + \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \text{sen}\,(\alpha+\beta) \\ -\text{sen}\,(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = A_{\alpha+\beta}$$

Por tanto, la operación resulta interna en este conjunto de matrices.

ii) Según lo visto en i) tenemos:

$$(A_\alpha \cdot A_\beta) \cdot A_\gamma = A_{\alpha+\beta} \cdot A_\gamma = A_{(\alpha+\beta)+\gamma} = A_{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$A_\alpha \cdot (A_\beta \cdot A_\gamma) = A_\alpha \cdot A_{\beta+\gamma} = A_{\alpha+(\beta+\gamma)} = A_{\alpha+\beta+\gamma}$$

Y por tanto la operación es asociativa.

iii)

$$A_\alpha = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ -\text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \cos\alpha = 1 \\ \text{sen}\,\alpha = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = 0$$

Por tanto tenemos que I, elemento neutro del producto matricial corresponde a A_o, es decir, para $\alpha = 0$.

Conclusión: Existe elemento neutro ($\alpha = 0$).

iv)

$$\left.\begin{array}{l} A_\alpha \cdot A_\beta = A_o \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha \\ \text{Además } A_\beta \cdot A_\alpha = A_{\beta+\alpha} = A_o \text{ si } \beta = -\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow A_\alpha \cdot A_{-\alpha} = A_{-\alpha} \cdot A_\alpha = A_o$$

Y de aquí concluimos que para todo A_α, existe elemento simétrico $A_{-\alpha}$.

Por tanto queda demostrado que las $A_\alpha \in M_{2\times 2}\left(\frac{\mathbb{R}}{2\pi}\right)$ son un grupo para el producto matricial.

Tema V

Sistemas lineales

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sea un cuerpo conmutativo K.

Definición 1.1

Se denomina sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un sistema de la forma:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

en donde los elementos $a_{ij} \in K$ se denominan coeficientes de las incógnitas, los $b_i \in K$ términos independientes y las variables x_j incógnitas del sistema.

Atendiendo a la teoría desarrollada en las lecciones anteriores, el sistema (1) se puede expresar en las siguientes formas:

a) *Expresión vectorial*

Considerando los siguientes vectores de K^m:

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1' &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}) \\
\bar{a}_2' &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{a}_n' &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}) \\
\bar{b} &= (b_1, b_2, \ldots, b_m)
\end{aligned}$$

el sistema (1) se escribe en la forma:

$$x_1 \cdot \bar{a}_1' + x_2 \cdot \bar{a}_2' + \ldots + x_n \cdot \bar{a}_n' = \bar{b} \qquad (2)$$

b) *Expresión matricial*

Considerando las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

el sistema (1) se escribe en la forma:

$$A \cdot X = B \qquad (3)$$

Definición 1.2

Se dice que n escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ constituyen una solución del sistema (1) si considerando $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ... y $x_n = \alpha_n$ se satisfacen las m ecuaciones del sistema.

No obstante, la forma de representar las soluciones de un sistema depende de la forma de caracterizar a dicho sistema. Así:

a) Si utilizamos notación vectorial, resolver el sistema (1) consiste en hallar las n-tuplas $(x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ que verifican la expresión vectorial (2); es decir, aquellas n-tuplas que nos permiten expresar $\overline{b} \in K^m$ como combinación lineal de $\overline{a}'_1, \overline{a}'_2, ..., \overline{a}'_n \in K^m$.
b) Si utilizamos notación matricial, resolver el sistema (1) consiste en hallar las matrices columna $X \in M_{n \times 1}(K)$ que verifican la expresión matricial (3).

Definición 1.3

Se denomina sistema homogéneo de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un sistema de la forma:

$$(4) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

en donde $a_{ij} \in K$ y $0 \in K$ representa al elemento nulo del cuerpo conmutativo K.

Todo sistema homogéneo admite al menos la solución $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ a la que se denomina solución trivial o impropia.

Caractericemos el sistema (4) por su expresión vectorial:

$$x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{0}$$

siendo $\overline{0}$ el vector nulo del K-espacio vectorial K^m y $\overline{a}'_j = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj}) \in K^m$ para j = 1, 2, ..., n.

Proposición 1.1

El conjunto S_h de soluciones del sistema homogéneo (4) es un subespacio vectorial del K-espacio vectorial K^n.

Demostración

En principio $S_h \neq \varnothing$ pues $\overline{0} = (0, 0, \overset{n}{\ldots}, 0) \in S_h$. Por otro lado, si tomamos dos escalares $\alpha, \beta \in K$ y dos n-tuplas $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_h$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}(x_1, x_2, ..., x_n) \in S_h \Rightarrow x_1 \cdot \overline{a}'_1 + x_2 \cdot \overline{a}'_2 + ... + x_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{0} \\ (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_h \Rightarrow y_1 \cdot \overline{a}'_1 + y_2 \cdot \overline{a}'_2 + ... + y_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{0}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha x_1 \cdot \overline{a}'_1 + \alpha x_2 \cdot \overline{a}'_2 + ... + \alpha x_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{0} \\ \beta y_1 \cdot \overline{a}'_1 + \beta y_2 \cdot \overline{a}'_2 + ... + \beta y_n \cdot \overline{a}'_n = \overline{0}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha x_1 + \beta y_1) \cdot \overline{a}'_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2) \cdot \overline{a}'_2 + ... + (\alpha x_n + \beta y_n) \cdot \overline{a}'_n = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, ..., \alpha x_n + \beta y_n) \in S_h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) + \beta \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_h$$

Es decir:

$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_h$$

se tiene que:

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) + \beta \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_h$$

Por tanto S_h es un subespacio vectorial del K-espacio vectorial K^n.

Proposición 1.2

Si la n-tupla $\overline{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in K^n$ es una solución del sistema (1), entonces el conjunto S de soluciones del sistema viene definido por:

$$S = \{\overline{x}_0 + \overline{z} \,/\, \overline{z} \in S_h\}$$

siendo S_h el conjunto de soluciones del sistema homogéneo obtenido al considerar en (1) la condición $b_i = 0$ para i = 1, 2, ..., m.

Demostración

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S \Leftrightarrow x_1 \cdot \bar{a}_1' + x_2 \cdot \bar{a}_2' + ... + x_n \cdot \bar{a}_n' = \bar{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot \bar{a}_1' + x_2 \cdot \bar{a}_2' + ... + x_n \cdot \bar{a}_n' = x_{10} \cdot \bar{a}_1' + x_{20} \cdot \bar{a}_2' + ... + x_{n0} \cdot \bar{a}_n' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_{10}) \cdot \bar{a}_1' + (x_2 - x_{20}) \cdot \bar{a}_2' + ... + (x_n - x_{n0}) \cdot \bar{a}_n' = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20}, ..., x_n - x_{n0}) \in S_h \Leftrightarrow \bar{x} - \bar{x}_0 \in S_h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, \bar{z} \in S_h / \bar{x} - \bar{x}_o = \bar{z} \Leftrightarrow \exists\, \bar{z} \in S_h / \bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{z}$$

Luego:

$$S = \{\bar{x}_0 + \bar{z} / \bar{z} \in S_h\}$$

Definición 1.4

El sistema (1) se denomina incompatible si no tiene soluciones.

El sistema (1) se denomina compatible si tiene al menos una solución. distinguiéndose los sistemas compatibles determinados que tienen una única solución y los compatibles indeterminados que tienen más de una solución.

2. SISTEMAS EQUIVALENTES. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA EQUIVALENCIA

Definición 2.1

Dos sistemas de ecuaciones lineales se dicen equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Si convenimos en denotar $e_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - b_i$ para $i = 1, 2, ..., m$, entonces el sistema (1) se expresa abreviadamente en la forma:

$$\begin{cases} e_1(x) = 0 \\ e_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_m(x) = 0 \end{cases}$$

Proposición 2.1

Sean los sistemas de ecuaciones lineales:

$$(5)\quad \begin{cases} e_1(x) = 0 \\ e_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_{i-1}(x) = 0 \\ e_i(x) = 0 \\ e_{i+1}(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_m(x) = 0 \end{cases} \qquad (6)\quad \begin{cases} e_1(x) = 0 \\ e_2(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_{i-1}(x) = 0 \\ \sum_{p=1}^{m} \lambda_p e_p(x) = 0 \\ e_{i+1}(x) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ e_m(x) = 0 \end{cases}$$

en donde el sistema (6) se obtiene del sistema (5) sustituyendo la ecuación $e_i(x) = 0$ por la ecuación $\sum_{p=1}^{m} \lambda_p e_p(x) = 0$, siendo $\lambda_p \in K$ para $p = 1, 2, ..., m$ y $\lambda i \neq 0$. Entonces los sistemas (5) y (6) son equivalentes.

Demostración

Inmediata pues toda solución de (5) es solución de (6) y recíprocamente.

El resultado de la proposición 2.1 se conoce como Teorema fundamental de la equivalencia. Además, considerando dicho teorema y la equivalencia por filas de matrices se sigue el siguiente resultado de interés:

Proposición 2.2

Sean dos sistemas de ecuaciones lineales:

$$(7)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n = d_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + ... + c_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

en donde a_{ij}, b_i, c_{ij}, $d_i \in K$ y consideremos las matrices:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} & d_m \end{pmatrix}$$

Entonces, si las matrices B y D son equivalentes por filas resulta que los sistemas (7) y (8) son equivalentes.

Definición 2.2

Sea el sistema (1) y consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La matriz $A \in M_{m \times n}(K)$ se denomina matriz de los coeficientes de las incógnitas y la matriz $B \in M_{m \times (n+1)}(K)$ recibe la denominación de matriz ampliada de A con los términos independientes.

Luego, si las matrices ampliadas de dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes por filas, resulta que dichos sistemas son equivalentes.

Observación

En lo sucesivo denotaremos por rango (M) o abreviadamente r(M) al rango o característica de una matriz M.

3. TEOREMA DE ROUCHE-FROBENIUS

Sea un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$(9) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

y consideremos la matriz A de los coeficientes de las incógnitas y la matriz B ampliada de A con los términos independientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Entonces, siempre se cumple que rango (A) ≤ rango (B). Pues bien:

Proposición 3.1

1.º El sistema (9) es compatible si y sólo si rango (A) = rango (B). Además:

2.º Si rango (A) = rango (B) = n el sistema (9) es compatible determinado.

3.º Si rango (A) = rango (B) < n el sistema (9) es compatible indeterminado.

Demostración

1.º Considerando la notación vetorial del sistema (9) se tiene que:

$$\begin{aligned} (9) \text{ compatible} &\Leftrightarrow \exists\, (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n \,/\, x_1 \cdot \bar{a}_1' + x_2 \cdot \bar{a}_2' + ... + x_n \cdot \bar{a}_n' = \bar{b} \\ &\Leftrightarrow L(\{\bar{a}_1', \bar{a}_2', ..., \bar{a}_n'\}) = L(\{\bar{a}_1', \bar{a}_2', ..., \bar{a}_n', \bar{b}\}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dim(L(\{\bar{a}_1', \bar{a}_2', ..., \bar{a}_n'\})) = \dim(L(\{\bar{a}_1', \bar{a}_2', ..., \bar{a}_n', \bar{b}\})) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{rango (A)} = \text{rango (B)} \end{aligned}$$

Supongamos que el sistema (9) es compatible, es decir rango (A) = = rango (B). Entonces existe el menos una solución $\bar{x}_0 \in K^n$ del sistema (9) y el conjunto S de soluciones de (9) viene definido por:

$$S = \{\bar{x}_0 + \bar{z} \,/\, \bar{z} \in S_h\}$$

siendo S_h el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado al sistema (9).

Ahora bien:

2.º Si r(A) = r(B) = n entonces como r(A) = n se tiene que:

$$\begin{aligned} r(A) = n &\Rightarrow \{\bar{a}_1', \bar{a}_2', ..., \bar{a}_n'\} \text{ sistema libre} \Rightarrow S_h = \{\bar{0}\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow S = \{\bar{x}_0 + \bar{0}\} = \{\bar{x}_0\} \end{aligned}$$

Es decir, el sistema es compatible determinado pues tiene solución única.

3.º Si $r(A) = r(B) < n$ entonces, como $r(A) < n$, se tiene que:

$$r(A) < n \Rightarrow \{\bar{a}_1', \bar{a}_2', ..., \bar{a}_n'\} \text{ sistema ligado } \Rightarrow \{\bar{0}\} \underset{\text{(inclusión estricta)}}{\subset} S_h \Rightarrow \{\bar{x}_o\} \subset S$$

Es decir, el sistema es compatible indeterminado pues tiene más de una solución.

El resultado de la proposición 3.1 se conoce como Teorema de Rouche-Frobenius.

Ejercicio 1

Sean los vectores $\bar{a}_1' = (1, -1, 1, -1)$, $\bar{a}_2' = (1, \alpha, 1, \alpha)$, $\bar{a}_3' = (1, -1, \alpha, -1)$, $\bar{b} = (1, -1, 1, \alpha + 1) \in \mathbb{R}^4$. Clasificar el sistema de ecuaciones lineales expresado vectorialmente por:

$$x_1\bar{a}_1' + x_2\bar{a}_2' + x_3\bar{a}_3' = \bar{b}$$

según los distintos valores del parámetro real α.

Solución

$$x_1\bar{a}_1' + x_2\bar{a}_2' + x_3\bar{a}_3' = \bar{b} \Leftrightarrow x_1(1, -1, 1, -1) + x_2(1, \alpha, 1, \alpha) + x_3(1, -1, \alpha, -1) = (1, -1, 1, \alpha, + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + \alpha x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 1 \\ -x_1 + \alpha x_2 - x_3 = \alpha + 1 \end{array}\right\}$$

La matriz A de los coeficientes de las incógnitas y la matriz ampliada B vienen definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ -1 & \alpha & -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Además:

$$|B| = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)(\alpha - 1)(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ ó } \alpha = 1 \text{ ó } \alpha = -2$$

Estudiando todos los casos posibles se tiene que:

$\alpha \neq -1 \wedge \alpha \neq 1 \wedge \alpha \neq -2 \Rightarrow r(B) = 4 \neq r(A) \leq 3 \Rightarrow$ Sistema incompatible
$\alpha = 1 \Rightarrow r(B) = 3 \neq 2 = r(A) \Rightarrow$ Sistema incompatible
$\alpha = -1 \Rightarrow r(B) = 3 \neq 2 = r(A) \Rightarrow$ Sistema incompatible
$\alpha = -2 \Rightarrow r(B) = 3 = r(A) =$ n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Resumiendo:

$\alpha \neq -2 \Rightarrow$ Sistema incompatible
$\alpha = -2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

La proposición 3.1 nos permite clasificar el sistema (9) pero no nos precisa ningún criterio para resolver el sistema en caso de ser compatible.

Pues bien, si el sistema (9) es compatible, es decir si rango (A) = rango (B) = $r \leq n$, para hallar las soluciones del sistema (9) seguiremos los siguientes pasos:

Tomamos un menor principal $M_r \neq 0$ de la matriz A de los coeficientes de las incógnitas. Las incógnitas cuyos coeficientes forman parte del menor M_r se denominan incógnitas principales y las ecuaciones de (9) correspondientes a las filas del menor se denominan ecuaciones principales.

Para hallar las soluciones del sistema compatible (9), resolveremos el sistema constituido por las r ecuaciones principales considerando como incógnitas a las r incógnitas principales. De este modo se obtienen esas r incógnitas en función de las otras n-r incógnitas.

Según lo expuesto, la resolución de un sistema compatible se reduce a la resolución de un sistema de r ecuaciones lineales con r incógnitas, siendo la matriz M_r de los coeficientes de las incógnitas una matriz inversible. Pasemos pues a precisar algunos métodos de resolución para este tipo de sistemas.

4. SISTEMAS DE CRAMER

Definición 4.1

Se denomina sistema de Cramer a todo sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

tal que la matriz de los coeficientes de las incógnitas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sea regular o inversible

Proposición 4.1

Todo sistema de Cramer es compatible determinado y su única solución viene definida por:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Demostración

Del teorema de Rouche-Frobenius se sigue de inmediato que todo sistema de Cramer es compatible determinado y su única solución se expresa matricialmente en la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1}}{|A|} \\ x_2 = \dfrac{b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2}}{|A|} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn}}{|A|} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \dots + b_nA_{ni}}{|A|} \quad i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ejercicio 2

Discutir y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales definido sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \alpha + 1 \\ \alpha x_1 + x_2 + (\alpha - 1)x_3 = \alpha \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

según los distintos valores del parámetro real α.

Solución

La matriz A de los coeficientes de las incógnitas y la matriz ampliada B vienen definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \alpha + 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha - 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1$$

Estudiando todos los casos posible tenemos que:

$\alpha \neq 1 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow$ r(A) = 3 = r(B) = n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

$\alpha = 1 \Rightarrow$ r(A) = 2 ≠ 3 = r(B) $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Consideremos un valor genérico $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$ y hallemos la única solución del sistema de Cramer correspondiente:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha+1 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha-1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}}{\alpha - 1} = \frac{-\alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 1}{\alpha - 1}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha & \alpha & \alpha-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\alpha - 1} = \frac{-\alpha}{\alpha - 1} \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha+1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{vmatrix}}{\alpha - 1} = \alpha(\alpha + 1)$$

Ejercicio 3

Sea el sistema de ecuaciones lineales definido sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \alpha \end{cases}$$

Hallar α de forma que el sistema sea compatible y resolverlo.

Solución

La matriz A de los coeficientes de las incógnitas y la matriz ampliada B vienen definidas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & -4 & 11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \alpha \end{pmatrix}$$

Es inmediato probar que:

$$r(A) = 2 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\alpha = 7 \Rightarrow r(B) = 2$$
$$\alpha \neq 7 \Rightarrow r(B) = 3$$

Luego:

$\alpha = 7 \Rightarrow r(A) = r(B) = 2 < 4 =$ n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$\alpha \neq 7 \Rightarrow r(A) = 2 < 3 = r(B) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Resolvamos el sistema para $\alpha = 7$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 7 \end{cases}$$

Consideramos el menor principal $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Entonces las incógnitas principales son las incógnitas x_1 y x_2, y las ecuaciones 1.ª y 2.ª son las ecuaciones principales.

Resolvemos el sistema constituido por las ecuaciones principales respecto de las dos incógnitas principales:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 = 3 + x_3 - 4x_4 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 - x_3 - x_4 & -1 \\ 3 + x_3 - 4x_4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{7 - x_3 - 6x_4}{5}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 - x_3 - x_4 \\ 1 & 3 + x_3 - 4x_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4 + 3x_3 - 7x_4}{5}$$

Luego las soluciones del sistema para $\alpha = 7$ vienen definidas por:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{5} - \beta - 6\gamma \\ x_2 = \dfrac{4}{5} + 3\beta - 7\gamma \quad \forall\, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \\ x_3 = 5\beta \\ x_4 = 5\gamma \end{cases}$$

Ejercicio 4

Consideremos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales definido sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \beta x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + (\alpha - \beta)x_3 = 0 \end{cases}$$

Clasificar y resolver el sistema según los distintos valores de los parámetros α y β.

Solución

Para los sistemas lineales homogéneos siempre se cumple que el rango de la matriz ampliada B es igual al rango de la matriz A de los coeficientes de las incógnitas. Luego en la discusión de un sistema lineal homogéneo sólo debemos atender a la determinación del rango de A.

Sea la matriz A de los coeficientes de las incógnitas del sistema lineal homogéneo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & \alpha - \beta \end{pmatrix}$$

Hallemos el rango de A según los distintos valores de los parámetros α y β:

En principio como $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ independientemente de α y β, se tiene que $2 \leq r(A) \leq 3 \; \forall \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Construimos todos los menores orlados del menor no nulo M_2 con la 3.ª fila de A y cada una de las restantes columnas de A (columna 3.ª de A):

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 5\alpha - 4\beta$$

Construimos todos los menores orlados del menor no nulo M_2 con la 4.ª fila de A y cada una de las las restantes columnas de A (columna 3.ª):

$$M_3' = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 2 & 1 & \beta \\ 3 & -2 & \alpha - \beta \end{vmatrix} = -4\alpha - 4\beta$$

Según esto:

$$r(A) = 2 \Leftrightarrow M_3 = 0 \wedge M_3' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 5\alpha - 4\beta = 0 \\ -4\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\alpha - 4\beta = -3 \\ 4\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{3} \wedge \beta = \frac{1}{3}$$

Luego:

$\alpha = -\frac{1}{3} \wedge \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow r(A) = 2 < 3 =$ n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$\alpha \neq -\frac{1}{3} \vee \beta \neq \frac{1}{3} \Rightarrow$ r(A) = 3 = n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Resolvamos el sistema homogéneo para $\alpha = -\frac{1}{3} \wedge \beta = \frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \end{cases}$$

Tomamos el menor principal $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Entonces las ecuaciones principales son las ecuaciones 1.ª y 2.ª, y las incógnitas x_1 y x_2 son las incógnitas principales. Pues bien, resolviendo las ecuaciones principales respecto de las incógnitas principales hallaremos las siguientes soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = 3\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Para el caso $\alpha \neq -\frac{1}{3} \vee \beta \neq \frac{1}{3}$ el sistema homogéneo admite únicamente la solución trivial $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

5. METODO DE GAUSS

Sea un sistema de Cramer de n ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$(S.1) \quad \begin{cases} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} x_n = b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}^{(1)} x_1 + a_{n2}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)} x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

denotado matricialmente por:

$$A^{(1)} \cdot X = B^{(1)}$$

en donde:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

Si $A^{(1)}$ es una matriz triangular superior (es decir, si $a_{ij} = 0$ para $i > j$), entonces considerando que $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ pues $|A^{(1)}| = a_{11} \cdot a_{22} \ldots a_{nn} \neq 0$, se obtiene de inmediato la única solución del sistema mediante sustitución regresiva:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(1)}}{a_{nn}^{(1)}} \\ x_p = \dfrac{1}{a_{pp}^{(1)}} \left(b_p^{(1)} - \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} a_{pk}^{(1)} x_k \right) \quad p = n-1, \ldots, 1 \end{cases}$$

De forma análoga razonaríamos si A^{1} fuese una matriz triangular inferior.

El método de Gauss donominado también método de reducción o eliminación nos permite dado un sistema de Cramer obtener otro sistema triangular equivalente. Veamos dicho método:

Supongamos sin perder generalidad que $a_{11}^{1} \neq 0$ (si $a_{11}^{1} = 0$ cambiamos el orden de las ecuaciones de tal forma que el nuevo a_{11}^{1} sea no nulo, lo cual siempre es posible pues en caso contrario $|A^{1}| = 0$). Sumamos a la i-ésima ecuación del sistema (S.1) la primera ecuación multiplicada por $p_{i1} = -\dfrac{a_{i1}^{1}}{a_{11}^{1}}$, para i = 2, 3, ..., n obteniendo de esta manera el siguiente sistema (S.2) equivalente al sistema (S.1):

$$(S.2) \qquad \begin{cases} a_{11}^{1}x_1 + a_{12}^{1}x_2 + \ldots + a_{1n}^{1}x_n = b_1^{1} \\ \qquad\qquad a_{22}^{2}x_2 + \ldots + a_{2n}^{2}x_n = b_2^{2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad a_{n2}^{2}x_2 + \ldots + a_{nn}^{2}x_n = b_n^{2} \end{cases}$$

Matricialmente:

$$A^{2} \cdot X = B^{2} \qquad A^{2} = \begin{pmatrix} a_{11}^{1} & a_{12}^{1} & \ldots & a_{1n}^{1} \\ 0 & a_{22}^{2} & \ldots & a_{2n}^{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2}^{2} & \ldots & a_{nn}^{2} \end{pmatrix} \qquad B^{2} = \begin{pmatrix} b_1^{1} \\ b_2^{2} \\ \vdots \\ b_n^{2} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$\begin{cases} a_{ij}^{2} = a_{ij}^{1} + p_{i1}a_{ij}^{1} & i \geq 2, j \leq n \\ b_i^{2} = b_i^{1} + p_{i1}b_1^{1} & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Además las matrices $A^{(2)}$ y $B^{(2)}$ se pueden escribir en la forma:

$$\begin{cases} A^{(2)} = P^{(1)} A^{(1)} \\ B^{(2)} = P^{(1)} B^{(1)} \end{cases} \qquad P^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Supongamos sin perder generalidad que $a_{22}^{(2)} \neq 0$ y sumamos a la i-ésima ecuación del sistema (S.2) la segunda ecuación multiplicada por $p_{i2} = -\dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$, para i = 3, 4, ..., n, obteniendo el siguiente sistema (S.3) equivalente al sistema (S.1):

$$\text{(S.3)} \qquad \begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ a_{33}^{(3)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n3}^{(3)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)} \end{cases}$$

Matricialmente:

$$A^{(3)} \cdot X = B^{(3)}; \qquad A^{(3)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \qquad B^{(3)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(3)} \\ \vdots \\ b_n^{(3)} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$\begin{cases} a_{ij}^{3} = a_{ij}^{2} + p_{i2}a_{2j}^{2} & i \geq 3,\ j \leq n \\ b_{i}^{3} = b_{i}^{2} + p_{i2}b_{2}^{2} & 3 \leq i \leq n \end{cases}$$

Además las matrices A^{3} y B^{3} se pueden escribir en la forma:

$$\begin{cases} A^{3} = P^{2} \cdot A^{2} \\ B^{3} = P^{2} \cdot B^{2} \end{cases} \qquad P^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

En general, en el paso k-ésimo partiremos del sistema (S.k) equivalente al sistema (S.1):

$$(S.k) \quad \begin{cases} a_{11}^{1}x_1 + a_{12}^{1}x_2 + \dots + a_{1n}^{1}x_n = b_1^{1} \\ a_{22}^{2}x_2 + \dots + a_{2n}^{1}x_n = b_2^{2} \\ \dots \\ a_{kk}^{k}x_k + \dots + a_{kn}^{k}x_n = b_k^{k} \\ \dots \\ a_{nk}^{k}x_k + \dots + a_{nn}^{k}x_n = b_n^{k} \end{cases}$$

$$A^{k} \cdot X = B^{k} \qquad A^{k} = \begin{pmatrix} a_{11}^{1} & a_{12}^{1} & \dots & a_{1n}^{1} \\ 0 & a_{22}^{2} & \dots & a_{2n}^{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{k} \ \dots \ a_{kn}^{k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nk}^{k} \ \dots \ a_{nn}^{k} \end{pmatrix} \qquad B^{k} = \begin{pmatrix} b_1^{1} \\ b_2^{2} \\ \vdots \\ b_k^{k} \\ \vdots \\ b_n^{k} \end{pmatrix}$$

Para llegar al siguiente sistema (S.k + 1) equivalente al sistema (S.1):

$$(S.k+1)\quad \begin{cases} a_{11}^{\underset{\sim}{1}}x_1 + a_{12}^{\underset{\sim}{1}}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}^{\underset{\sim}{1}}x_n = b_1^{\underset{\sim}{1}} \\ \qquad a_{22}^{\underset{\sim}{2}}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}^{\underset{\sim}{2}}x_n = b_2^{\underset{\sim}{2}} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{kk}^{\underset{\sim}{k}}x_k + a_{k,k+1}^{\underset{\sim}{k}}x_{k+1} + \ldots\ldots + a_{kn}^{\underset{\sim}{k}}x_n = b_k^{\underset{\sim}{k}} \\ \qquad\qquad a_{k+1,k+1}^{\underset{\sim}{k+1}}x_{k+1} + \ldots + a_{k+1,n}^{\underset{\sim}{k+1}}x_n = b_{k+1}^{\underset{\sim}{k+1}} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{n,k+1}^{\underset{\sim}{k+1}}x_{k+1} + \ldots\ldots + a_{n,n}^{\underset{\sim}{k+1}}x_n = b_n^{\underset{\sim}{k+1}} \end{cases}$$

Matricialmente:

$$A^{\underset{\sim}{k+1}} \cdot X = B^{\underset{\sim}{k+1}}$$

$$A^{\underset{\sim}{k+1}} = \begin{pmatrix} a_{11}^{\underset{\sim}{1}} & a_{12}^{\underset{\sim}{1}} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{1n}^{\underset{\sim}{1}} \\ 0 & a_{22}^{\underset{\sim}{2}} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2n}^{\underset{\sim}{2}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \ \ldots & a_{kk}^{\underset{\sim}{k}} \quad a_{k,k+1}^{\underset{\sim}{k}} \ \ldots & a_{kn}^{\underset{\sim}{k}} \\ 0 & 0 \ \ldots & 0 \quad a_{k+1,k+1}^{\underset{\sim}{k+1}} \ \ldots & a_{k+1,n}^{\underset{\sim}{k+1}} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 \ \ldots & 0 \quad a_{n,k+1}^{\underset{\sim}{k+1}} \ \ldots & a_{nn}^{\underset{\sim}{k+1}} \end{pmatrix} \quad B^{\underset{\sim}{k+1}} = \begin{pmatrix} b_1^{\underset{\sim}{1}} \\ b_2^{\underset{\sim}{2}} \\ \vdots \\ b_k^{\underset{\sim}{k}} \\ b_{k+1}^{\underset{\sim}{k+1}} \\ \vdots \\ b_n^{\underset{\sim}{k+1}} \end{pmatrix}$$

en donde:

$$\begin{cases} a_{ij}^{\underset{\sim}{k+1}} = a_{ij}^{\underset{\sim}{k}} + p_{ik}a_{kj}^{\underset{\sim}{k}} & i \geq k+1,\ j \leq n \\ b_i^{\underset{\sim}{k+1}} = b_i^{\underset{\sim}{k}} + p_{ik}b_k^{\underset{\sim}{k}} & k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Además:

$$\begin{cases} A^{\underbrace{k+1}} = P^{\underbrace{k}} \cdot A^{\underbrace{k}} \\ B^{\underbrace{k+1}} = P^{\underbrace{k}} \cdot A^{\underbrace{k}} \end{cases} \qquad P^{\underbrace{k}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & 1 & & (0) \\ (0) & & p_{k+1,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & p_{n,k} & (0) & 1 \end{pmatrix}$$

siendo nulos todos los elementos de $P^{\underbrace{k}}$ no explicitados.

Al cabo de n pasos obtendremos el siguiente sistema triangular (S.n) equivalente al sistema (S.1):

$$(S.n) \qquad \begin{cases} a_{11}^{\underbrace{1}} x_1 + a_{12}^{\underbrace{1}} x_2 + \ldots + a_{1n}^{\underbrace{1}} x_n = b_1^{\underbrace{1}} \\ a_{22}^{\underbrace{2}} x_2 + \ldots + a_{2n}^{\underbrace{2}} x_n = b_2^{\underbrace{2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{\underbrace{n}} x_n = b_n^{\underbrace{n}} \end{cases}$$

Finalmente resolviendo el sistema triangular (S.n) hallaremos la solución del sistema (S.1).

Observaciones

1.º Un método parecido al de Gauss es el método de Jordan (o de Gauss-Jordan) en el que se transforma el sistema (S.1) en un sistema diagonal en vez de triangular. La diferencia con el método de Gauss consiste en que en cada etapa se utiliza una ecuación no sólo para conseguir ceros por debajo de la diagonal principal, sino también por encima.

2.º Considerando el sistema (S.1) caracterizado por su correspondiente matriz ampliada, el método de Gauss se reformula fácilmente utilizando matrices equivalentes por filas.

3.º La técnica de eliminación del método de Gauss se puede aplicar a un sistema cualquiera de m ecuaciones lineales con n incógnitas para ob-

tener otro sistema equivalente de discusión inmediata y resolución inmediata (en caso de ser compatible).

Ejercicio 5

Consideremos el sistema de Cramer definido sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

1.º Resolver dicho sistema utilizando el método de Gauss.
2.º Resolver dicho sistema utilizando el método de Jordan.

Solución

Caracterizamos el sistema dado mediante su matriz ampliada:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.º Utilizando la técnica de eliminación del método de Gauss y representando los distintos pasos del método mediante equivalencias por filas de matrices, tenemos que:

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \hat{B}$$

De donde se sigue que el sistema dado es equivalente al sistema triangular de matriz ampliada $\hat{B}$. Es decir, el sistema dado es equivalente al siguiente sistema triangular:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_2 - 3x_3 = 3 \\ 6x_3 = -6 \end{cases}$$

Cuya solución obtenida por sustitución regresiva viene dada por:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

2.° Utilizando la técnica de eliminación del método de Jordan, tenemos que:

$$B \backsim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \backsim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \hat{B}'$$

De donde se sigue que el sistema dado es equivalente al sistema diagonal de matriz ampliada $\hat{B}'$. Es decir, el sistema dado es equivalente al sistema diagonal:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ -3x_2 = 0 \\ 6x_3 = -6 \end{cases}$$

cuya solución inmediata es:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Ejercicio 6

Consideremos los vectores $\bar{a}'_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $\bar{a}'_2 = (1, 1, 0, 0, 0, 0)$, $\bar{a}'_3 = (0, 1, 1, 0, 0, 0)$, $\bar{a}'_4 = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$, $\bar{a}'_5 = (0, 0, 0, 1, 1, 0)$, $\bar{a}'_6 = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$, $\bar{b} = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5)$ de $\mathbb{R}^6$ y sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$x_1\bar{a}'_1 + x_2\bar{a}'_2 + x_3\bar{a}'_3 + x_4\bar{a}'_4 + x_5\bar{a}'_5 + x_6\bar{a}'_6 = \bar{b}$$

Haciendo uso de la técnica de eliminación del método de Gauss, determinar α de forma que el sistema sea compatible y resolverlo.

Solución

Caracterizamos el sistema dado por su matriz ampliada:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha^4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha^5 \end{pmatrix}$$

en donde la submatriz A de B definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de los coeficientes de las incógnitas del sistema.

Siguiendo paso a paso la técnica de eliminación del método de Gauss y formuando los resultados mediante matrices equivalentes por filas, se sigue fácilmente que:

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 \end{pmatrix} = \hat{B}$$

De donde se deduce que el sistema dado es equivalente al sistema de matriz ampliada $\hat{B}$ y la matriz de los coeficientes de las incógnitas:

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pues bien, considerando que $r(A) = r(\hat{A})$ y $r(B) = r(\hat{B})$ pues $A \sim \hat{A}$ y $B \sim \hat{B}$, procedemos a clasificar el sistema dado a partir del sistema equivalente obtenido, resultando los siguientes casos:

$\alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow r(A) = r(\hat{A}) = 5 = r(\hat{B}) = r(B) < 6 =$ = n.º incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$\alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = r(\hat{A}) = 5 \neq 6 = r(\hat{B}) = r(B) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ Sistema incompatible.

Ahora bien, como $\alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1 = (\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^2 + 1)$ admite únicamente la solución real $\alpha = 1$, se tiene que:

$\alpha = 1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.
$\alpha \neq 1 \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Las soluciones del sistema dado para $\alpha = 1$ se obtienen resolviendo el sistema equivalente obtenido para $\alpha = 1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1 \\ x_4 + x_5 = 1 \\ x_5 + x_6 = 1 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema considerando como incógnita no principal a la incógnita x_6, se obtiene por sustitución regresiva:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 - \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1 - \lambda \\ x_4 = \lambda \\ x_5 = 1 - \lambda \\ x_6 = \lambda \end{array}\right. \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 7

Sea el sistema de ecuaciones lineales definido sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = \alpha \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = \beta \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = \beta \end{cases}$$

Haciendo uso de la técnica de eliminación del método de Gauss, determinar qué condición deben verificar α y β para que el sistema sea compatible y resolverlo.

Solución

Caracterizamos al sistema dado mediante su matriz ampliada:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \alpha \\ 3 & 5 & 2 & -1 & \beta \\ 1 & 3 & 2 & 5 & \beta \end{pmatrix}$$

en donde la submatriz A de B definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

es la matriz de los coeficientes de las incógnitas.

Siguiendo paso a paso la técnica de eliminación de Gauss y formulando los resultados mediante matrices equivalentes por filas, tenemos que:

$$B \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & -1 & -4 & \beta - 3\alpha \\ 0 & 1 & 1 & 4 & \beta - \alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & -1 & -1 & -4 & \beta - 3\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta - 4\alpha \end{pmatrix} = \hat{B}$$

De aquí se sigue que el sistema dado es equivalente al sistema de matriz ampliada $\hat{B}$ y matriz de los coeficientes de las incógnitas:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasificando el sistema dado a partir del sistema equivalente obtenido se tiene que:

$\beta = 2\alpha \Rightarrow r(A) = r(\hat{A}) = 2 = r(\hat{B}) = r(B) < 4 =$ n.º de incógnitas $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$\beta \neq 2\alpha \Rightarrow r(A) = r(\hat{A}) = 2 \neq 3 = r(\hat{B}) = r(B) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

Las soluciones del sistema dado para $\beta = 2\alpha$ se obtienen resolviendo el sistema equivalente obtenido para $\beta = 2\alpha$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = \alpha \\ \quad - x_2 - x_3 - 4x_4 = -\alpha \end{cases}$$

Resolviendo este sistema considerado como incógnitas no principales a x_3 y x_4, se obtiene por sustitución regresiva:

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha + \lambda + 7\gamma \\ x_2 = \alpha - \lambda - 4\gamma \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \gamma \end{cases} \qquad \forall\, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 8

Utilizando la técnica de eliminación del método de Gauss, clasificar y resolver el sistema homogéneo de ecuaciones lineales definido sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_2 + 6x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Solución

Caracterizamos al sistema homogéneo por su matriz A de los coeficientes de las incógnitas:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Haciendo uso de la técnica de eliminación del método de Gauss resulta que:

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

Por tanto el sistema homogéneo dado es equivalente al sistema homogéneo cuya matriz de los coeficientes de las incógnitas es $\hat{A}$. Luego como $r(A) = r(\hat{A}) = 3 < 5 =$ n.º incógnitas, el sistema homogéneo dado es compatible indeterminado.

Para hallar las soluciones del sistema homogéneo dado, resolvemos el sistema homogéneo equivalente obtenido:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ \quad x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ \quad\quad 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

De donde, considerando como incógnitas principales a x_1, x_2 y x_3, se obtiene:

$$\begin{cases} x_1 = 13\lambda + 13\gamma \\ x_2 = 9\lambda + 9\gamma \\ x_3 = -2\lambda - 2\gamma \\ x_4 = 3\lambda \\ x_5 = 3\gamma \end{cases} \qquad \forall\, \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$$

Antes de concluir el Tema conviene precisar algunos comentarios de interés sobre la resolución práctica de sistemas de ecuaciones lineales:

Las Ciencias aplicadas se ven frecuentemente comprometidas en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales como consecuencia de problemas relativos a análisis de circuitos eléctricos, elasticidad, transferencia de calor, equilibrios, vibraciones, etc..., siendo necesario, por tanto, disponer de métodos rápidos que nos permitan resolver con precisión sistemas de Cramer.

En la proposición 4.1 hemos presentado un método de resolución (conocido por la regla de Cramer) que nos permite hallar la única solución de un sistema de Cramer. Si denominamos coste del método al número de operaciones elementales (sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces) a efectuar, se demuestra que el coste $C_C^{\underline{n}}$ de la regla de Cramer para un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas viene dado por:

$$C_C^{\underline{n}} = (n + 1)! \,.\, n - 1$$

Por otro lado, se prueba que el coste $C_G^{\underline{n}}$ del método de Gauss para la resolución de un sistema de Cramer de n ecuaciones lineales con n incógnitas viene dado por $C_G^{\underline{n}} = \frac{1}{6}(4n^3 + 9n^2 - 7n)$.

Conviene observar que el coste $C_C^{\underline{n}}$ del método de Cramer es mucho más elevado que el coste $C_G^{\underline{n}}$ del método de Gauss. Así, por ejemplo, para resolver un sistema de Cramer de 10 ecuaciones lineales con 10 incógnitas tenemos que $C_C^{\underline{10}}$ es del orden de 4.10^8 operaciones elementales y $C_G^{\underline{10}}$ es del orden de 800 operaciones elementales.

En la práctica optaremos obviamente por el método de Gauss y conviene indicar alguna mejora en la técnica de eliminación de dicho método:

En el método de Gauss efectuamos divisiones por los elementos $a_{kk}^{\underline{k}}$ a los que se denominan pivotes y sucede que si $a_{kk}^{\underline{k}}$ es muy pequeño, un error de redondeo aunque sea pequeño en valor absoluto, puede originar errores muy grandes en el cociente con la consiguiente pérdida de precisión en la resolución.

Es conveniente, por tanto, cambiar el orden de colocación de las ecuaciones o el de las incógnitas para que de esta manera el pivote sea el mayor posible en valor absoluto. Existen dos métodos usuales para conseguir este objetivo: Pivoteo parcial y Pivoteo total:

En el pivoteo parcial para cada sistema $A^{\underline{k}} \cdot X = B^{\underline{k}}$, se busca el elemento $a^{\underline{k}}$ tal que $|a^{\underline{k}}| = \text{máx.} \{|a_{ik}^{\underline{k}}| \ / \ k \leq i \leq n\}$, procediendo a cambiar la ecuación correspondiente al elemento $a^{\underline{k}}$ con la ecuación k-ésima.

En el pivoteo total para cada sistema $A^{\underline{k}} \cdot X = B^{\underline{k}}$, se busca el elemento $a^{\underline{k}}$ tal que $|a^{\underline{k}}| = \text{máx.} \{|a_{ij}^{\underline{k}}| \ / \ k \leq i \leq n \wedge k \leq j \leq n\}$, procediendo a cambiar adecuadamente el orden de las ecuaciones y de las incógnitas de forma que el elemento $a^{\underline{k}}$ ocupe la posición relativa a la k-ésima fila y k-ésima columna en la matriz de los coeficientes de las incógnitas.

El método de la regla de Cramer, el método de Gauss y el método de Jordan entre otros, se denominan métodos directos pues pretenden hallar la solución exacta del sistema de Cramer dado al cabo de un número finito de operaciones elementales. No obstante, en la práctica, los errores de redondeo hacen que, en muchos casos, la solución hallada sea una solución aproximada.

En cursos posteriores abordaremos otro tipo de métodos de resolución denominados métodos iterativos, los cuales dado un sistema de Cramer denotado matricialmente por:

$$A \cdot X = B$$

$$A \in R_{n \times n}(K) \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B \in M_{n \times 1}(K)$$

buscan una sucesión convergente de matrices columna $(X_m)_{m \in N}$ definida mediante un proceso iterativo y con $X_m \in M_{n \times 1}(K)$, cuyo límite X sea la solución del sistema $A \cdot X = B$.

Entre los métodos iteraticos destacaremos el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel entre otros. Los métodos iterativos tampoco son

exactos y el uso eficaz de los mismos depende fundamentalmente de la elección óptima de la aproximación inicial X_o y de la velocidad de convergencia del método.

Finalmente cabe observar con ciertas reservas que los métodos directos se utilizan para resolver sistemas de Cramer con un número relativamente bajo de ecuaciones y los métodos iterativos se emplean en la resolución de sistemas de Cramer de gran número de ecuaciones.

Tema VI

Espacios vectoriales euclídeos

1. PRODUCTO ESCALAR. ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

Sea un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V.

Definición 1.1

Se dice que una aplicación $\langle , \rangle$: $V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto escalar sobre V si se cumplen los siguientes axiomas:

1.º) $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$ $\quad \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V.$
2.º) $\langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{z} \rangle = \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle + \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle$ $\quad \forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V.$
3.º) $\langle \lambda \,.\, \overline{x}, \overline{y} \rangle = \lambda \,.\, \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ $\quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V.$
4.º) $\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle > 0$ $\quad \forall\, \overline{x} \in V - \{\overline{0}\}.$

Al número real $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ se le denomina producto escalar de los vectores $\overline{x}$ e $\overline{y}$ de V.

Proposición 1.1

Sea un producto escalar $\langle , \rangle$ sobre V. Entonces:

a) $\langle \overline{x}, \overline{y} + \overline{z} \rangle = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle + \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle$ $\quad \forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in V.$
b) $\langle \overline{x}, \lambda \,.\, \overline{y} \rangle = \lambda \,.\, \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ $\quad \forall\, \lambda \in K \quad \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V.$
c) $\langle \overline{x}, \overline{0} \rangle = 0$ $\quad \forall\, \overline{x} \in V$
d) $(\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0 \quad \forall\, \overline{y} \in V) \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{0}$

Demostración

a) Considerando los axiomas 1.º) y 2.º) de la definición 1.1 tenemos que:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} + \overline{z} \rangle = \langle \overline{y} + \overline{z}, \overline{x} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle + \langle \overline{z}, \overline{x} \rangle = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle + \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle$$

b) Considerando los axiomas 1.º) y 3.º) de la definición 1.1 resulta que:

$$\langle \overline{x}, \lambda \cdot \overline{y} \rangle = \langle \lambda \cdot \overline{y}, \overline{x} \rangle = \lambda \cdot \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle = \lambda \cdot \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$$

c) Considerando el apartado b) tenemos que:

$$\langle \overline{x}, \overline{0} \rangle = \langle \overline{x}, 0 \cdot \overline{x} \rangle = 0 \cdot \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0$$

En particular para $\overline{x} = \overline{0}$ se cumple que $\langle \overline{0}, \overline{0} \rangle = 0$

d)

$\Rightarrow$) Supongamos que $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0 \ \forall \ \overline{y} \in V$. Entonces considerando que $\overline{y} = \overline{x}$ resulta que:

$$\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0$$

De donde se concluye que $\overline{x} = \overline{0}$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\overline{x} = \overline{0}$. Entonces, considerando el axioma 1.º) de la definición 1.1 y el apartado c), concluimos que:

$$\langle \overline{0}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{y}, \overline{0} \rangle = 0$$

Definición 1.2

A un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V dotado de un producto escalar $\langle , \rangle$ se le denomina espacio vectorial euclídeo y se le representa por el par $(V, \langle \ \rangle)$.

2. NORMA EUCLIDEA

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$.

Definición 2.1

Se denomina norma o longitud de un vector $\bar{x} \in V$, denotándose $\|\bar{x}\|$, al número real no negativo:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle}$$

Proposición 2.1

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$. Entonces:

a) $\|\bar{x}\| \geq 0 \qquad \forall\, \bar{x} \in V.$
b) $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}.$
c) $\|\lambda \,.\, \bar{x}\| = |\lambda| \,.\, \|\bar{x}\| \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\, \bar{x} \in V.$
d) $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \,.\, \|\bar{y}\| \qquad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in V.$
e) $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| = \|\bar{x}\| \,.\, \|\bar{y}\| \Leftrightarrow \{\bar{x}, \bar{y}\}$ sistema ligado
f) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \qquad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in V.$

Demostración

a) $\|\bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \geq 0$

b) $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

c) $\|\lambda \,.\, \bar{x}\| = \sqrt{\langle \bar{\lambda} \,.\, \bar{x}, \bar{\lambda} \,.\, \bar{x} \rangle} = \sqrt{\lambda \,.\, \langle \bar{x}, \bar{\lambda} \,.\, \bar{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2} \,.\, \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle =$

$= |\lambda| \,.\, \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = |\lambda| \,.\, \|\bar{x}\|$

d) Consideremos un número real cualquiera $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces resulta que:

$$\langle \alpha \,.\, \bar{x} + \bar{y}, \alpha \,.\, \bar{x} + \bar{y} \rangle \geq 0$$

Luego:

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle \,.\, \alpha^2 + 2 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \,.\, \alpha + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \geq 0$$

Según esto el polinomio de 2.º grado en la variable t:

$$\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle . t^2 + 2 \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle . t + \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle$$

toma valores no negativos para todo $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia, el discriminante de dicho polinomio debe ser negativo o nulo, es decir:

$$4 . \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle^2 - 4 . \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle . \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle \leq 0$$

Por tanto:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle^2 \leq \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle . \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle$$

Es decir:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle^2 \leq \| \overline{x} \|^2 . \| \overline{y} \|^2$$

De donde:

$$| \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle | \leq \| \overline{x} \| . \| \overline{y} \|$$

e) Si $\overline{x} = \overline{0}$ o $\overline{y} = \overline{0}$ o $\overline{x} = \overline{y} = \overline{0}$ la equivalencia se cumple trivialmente: Si $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V - \{\overline{0}\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\{\overline{x}, \overline{y}\} \text{ sistema ligado } &\Leftrightarrow \exists!\, \alpha \in \mathbb{R} \;/\; \alpha . \overline{x} + \overline{y} = \overline{0} \;\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists!\, \alpha \in \mathbb{R} \;/\; \langle \alpha . \overline{x} + \overline{y}, \alpha . \overline{x} + \overline{y} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \exists!\, \alpha \in \mathbb{R} \;/\; \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle . \alpha^2 + 2 \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle . \alpha + \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4 . \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle^2 - 4 . \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle . \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle^2 = \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle . \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle \;\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle^2 = \| \overline{x} \|^2 . \| \overline{y} \|^2 \;\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow | \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle | = \| \overline{x} \| . \| \overline{y} \|
\end{aligned}$$

f) En principio tenemos que:

$$\begin{aligned}
\| \overline{x} + \overline{y} \|^2 &= \langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y} \rangle = \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle + 2 . \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle + \langle \overline{y}, \overline{y} \rangle = \\
&= \| \overline{x} \|^2 + 2 . \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle + \| \overline{y} \|^2
\end{aligned}$$

Considerando la desigualdad del apartado d) resulta que:

$$\| \bar{x} + \bar{y} \|^2 \leq \| \bar{x} \|^2 + 2 \, . \, \| \bar{x} \| \, . \, \| \bar{y} \| + \| \bar{y} \|^2$$

Es decir:

$$\| \bar{x} + \bar{y} \|^2 \leq (\| \bar{x} \| + \| \bar{y} \|)^2$$

De donde:

$$\| \bar{x} + \bar{y} \| \leq \| \bar{x} \| + \| \bar{y} \|$$

Las desigualdades de los apartados d) y f) se denominan respectivamente desigualdad de SCHWARTZ y desigualdad de MINKOWSKI.

Proposición 2.2

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle \ \rangle)$. Entonces para cualesquiera vectores $\bar{x}, \bar{y} \in V - \{\bar{0}\}$ la desigualdad de SCHWARTZ se escribe en la forma:

$$-1 \leq \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\| \bar{x} \| \, . \, \| \bar{y} \|} \leq 1$$

Demostración

En efecto, considerando que $\| \bar{x} \| \neq 0$ y $\| \bar{y} \| \neq 0$ pues $\bar{x} \neq 0$ e $\bar{y} \neq 0$, resulta que:

$$|\langle \bar{x} \, , \, \bar{y} \rangle| \leq \| \bar{x} \| \, . \, \| \bar{y} \| \Leftrightarrow - \| \bar{x} \| \, . \, \| \bar{y} \| \leq \langle \bar{x} \, , \, \bar{y} \rangle \leq \| \bar{x} \| \, . \, \| \bar{y} \| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\| \bar{x} \| \, . \, \| \bar{y} \|} \leq 1$$

Observación

El resultado de la proposición 2.2 nos permite afirmar que para cada par de vectores $\bar{x}, \bar{y} \in V - \{\bar{0}\}$ existe un único $\theta \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\| \bar{x} \| \, . \, \| \bar{y} \|}$$

Definición 2.2

Se denomina ángulo entre los vectores $\bar{x} \in V - \{\bar{0}\}$ e $\bar{y} \in V - \{\bar{0}\}$ al ángulo correspondiente al arco $\theta \in [0, \pi]$ definido por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\| \bar{x} \| . \| \bar{y} \|}$$

La norma euclídea nos permite evaluar la «distancia» entre dos vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$ mediante el valor de $\| \bar{x} - \bar{y} \|$.

Ejercicio 1

Consideremos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y la aplicación $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \qquad \forall \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \qquad \bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Demostrar que la aplicación $\langle , \rangle$ es un producto escalar sobre $\mathbb{R}^n$ y hallar la norma asociada a dicho producto escalar.

Solución

1.º) $\forall \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \ \bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i . x_i = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle$$

2.º) $\forall \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \ \bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n), \ \bar{z} = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) . z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i . z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i . z_i = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle$$

3.º) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ \ \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\langle \lambda \,.\, \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda \,.\, x_i \,.\, y_i = \lambda \,.\, \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, y_i = \lambda \,.\, \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$$

4.º) $\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, 0, \overset{n}{\ldots}, 0)\}$

$$\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$$

Luego la aplicación $\langle , \rangle$ es un producto escalar sobre $\mathbb{R}^n$.

La norma $\| \ \|$ asociada al producto escalar $\langle , \rangle$ viene definida por:

$$\| \bar{x} \| = \sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ejercicio 2

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{C}$ de las funciones de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas sobre $[a, b]$ y tomemos una función $p \in \mathcal{C}$ tal que p sea estrictamente positiva. Consideremos la aplicación $\langle , \rangle$: $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b p(x) \,.\, f(x) \,.\, g(x)\, dx \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{C}$$

1.º) Demostrar que la aplicación $\langle , \rangle$ es un producto escalar sobre $\mathcal{C}$.
2.º) Hallar la norma asociada a dicho producto escalar.
3.º) Demostrar que $\forall\, f, g \in \mathcal{C}$ se cumple que:

$$\left| \int_a^b f(x) \,.\, g(x)\, dx \right| \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2\, dx \right)^{1/2} \,.\, \left(\int_a^b [g(x)]^2\, dx \right)^{1/2}$$

4.º) Demostrar que el valor medio integral de una función $f \in \mathcal{C}$ en $[a, b]$ es menor o igual que el valor medio cuadrático integral de la función $f \in \mathcal{C}$ en $[a, b]$.

Solución

1.º) $\forall\, f, g \in \mathscr{C}$

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b p(x) \,.\, f(x) \,.\, g(x)\, dx = \int_a^b p(x) \,.\, g(x) \,.\, f(x)\, dx = \langle g, f\rangle$$

$\forall\, f, g, h \in \mathscr{C}$

$$\begin{aligned}\langle f + g, h\rangle &= \int_a^b p(x) \,.\, [f(x) + g(x)] \,.\, h(x)\, dx = \\ &= \int_a^b p(x) \,.\, f(x) \,.\, h(x)\, dx + \int_a^b p(x) \,.\, g(x) \,.\, h(x)\, dx = \\ &= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle\end{aligned}$$

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ \ \forall\, f, g \in \mathscr{C}$

$$\langle \lambda \,.\, f, g\rangle = \int_a^b p(x) \,.\, \lambda \,.\, f(x) \,.\, g(x)\, dx = \lambda \,.\, \int_a^b p(x) \,.\, f(x) \,.\, g(x)\, dx = \lambda \,.\, \langle f, g\rangle$$

$\forall\, f \in \mathscr{C} - \{f_o\}$

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b p(x) \,.\, [f(x)]^2\, dx$$

Ahora bien, considerando que $p(x) > 0\ \ \forall\, x \in [a, b]$ y $f \neq f_o$, tenemos que:

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b p(x) \,.\, [f(x)]^2\, dx > 0$$

Por tanto la aplicación $\langle , \rangle$ es un producto escalar sobre $\mathscr{C}$.

2.º) La norma $\| \ \|$ asociada al producto escalar $\langle , \rangle$ viene definida por:

$$\| f \| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int_a^b p(x) \,.\, [f(x)]^2\, dx\right)^{1/2} \qquad \forall\, f \in \mathscr{C}$$

3.º) En particular si $p(x) = 1\ \ \forall\, x \in [a, b]$ el producto escalar $\langle , \rangle$ viene definido por:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) \,.\, g(x)\, dx \qquad \forall\, f, g \in \mathscr{C}$$

La norma $\| \ \|$ asociada a este producto escalar sobre $\mathcal{C}$ viene definida por:

$$\| f \| = \left(\int_a^b [f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} \qquad \forall \, f \in \mathcal{C}$$

Consideremos el espacio euclídeo $(\mathcal{C}, \langle \ \rangle)$ en donde el producto escalar $\langle , \rangle$ es el definido con $p(x) = 1 \ \forall \, x \in [a, b]$. Entonces de la desigualdad de SCHWARTZ resulta que:

$$\left| \int_a^b f(x) \, . \, g(x) \, dx \right| \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} . \left(\int_a^b [g(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} \qquad \forall \, f, g \in \mathcal{C}$$

4.º) Recordemos que el valor medio integral μ de la función $f \in \mathcal{C}$ en $[a, b]$ viene dado por:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \, . \int_a^b f(x) \, dx$$

El valor medio cuadrático integral μ_c de la función $f \in \mathcal{C}$ en $[a, b]$ se define como la raíz cuadrada del valor medio integral en $[a, b]$ de la función $g \in \mathcal{C}$ definida por $g(x) = [f(x)]^2 \ \forall \, x \in [a, b]$. Es decir:

$$\mu_c = \left(\frac{1}{b-a} \, . \int_a^b [f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2}$$

Demostremos que $\mu \leq \mu_c$:

Considerando el resultado del apartado 3.º) para la función $g \in \mathcal{C}$ definida por $g(x) = 1 \ \forall \, x \in [a, b]$, tenemos que:

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \left(\int_a^b [f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} . \left(\int_a^b dx \right)^{1/2} \qquad \forall \, f \in \mathcal{C}$$

Es decir:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq (b-a)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b [f(x)]^2\, dx \right)^{1/2} \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}$$

De donde:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq (b-a)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b [f(x)]^2\, dx \right)^{1/2} \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}$$

Luego:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{1}{(b-a)^{1/2}} \cdot \left(\int_a^b [f(x)]^2\, dx \right)^{1/2} \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}$$

Es decir:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx \leq \left(\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx \right)^{1/2} \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}$$

Por tanto:

$$\mu \leq \mu_c \qquad \forall\, f \in \mathcal{C}$$

Ejercicio 3

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y consideremos la aplicación $\langle , \rangle$: $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}\,(B^T \cdot A) \qquad \forall\, A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Demostrar que la aplicación $\langle , \rangle$ es un producto escalar sobre $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y hallar la norma asociada a dicho producto escalar.

Solución

Considerando las propiedades de la traza expuestas en un ejercicio anterior y la propiedad traza (A) = traza (A^T) $\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, resulta que:

1.º) $\forall A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\langle A, B\rangle = \text{traza}\,(B^T \cdot A) = \text{traza}\,[(B^T \cdot A)^T] = \text{traza}\,(A^T \cdot B) = \langle B, A\rangle$$

2.º) $\forall A, B, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\langle A + B, C\rangle = \text{traza}\,[C^T \cdot (A + B)] = \text{traza}\,(C^T \cdot A) + \text{traza}\,(C^T \cdot B) =$$
$$= \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$$

3.º) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\langle \lambda \cdot A, B\rangle = \text{traza}\,[B^T \cdot (\lambda \cdot A)] = \text{traza}\,[\lambda \cdot (B^T \cdot A)] =$$
$$= \lambda \cdot \text{traza}\,(B^T \cdot A) = \lambda \cdot \langle A, B\rangle$$

4.º) Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) - \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Entonces resulta que:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} \\ a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

De donde:

$$\langle A, A\rangle = \text{traza}\,(A^T \cdot A) = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$$

Luego la aplicación $\langle , \rangle$ es un producto escalar sobre $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
La norma $\| \ \|$ asociada al producto escalar $\langle , \rangle$ viene definida por:

$$\| A \| = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\text{traza}\,(A^T \cdot A)} = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2}$$

$$\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

3. EXPRESION MATRICIAL DE UN PRODUCTO ESCALAR

Consideremos un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$ de dimensión finita n y sea $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ una base de V.

Tomemos dos vectores cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in V$ y expresémoslos en la base B de V:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, \bar{e}_i \qquad\qquad \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \,.\, \bar{e}_i$$

Entonces el producto escalar $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$, considerando los axiomas y propiedades del mismo, se expresa en la forma:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \bar{e}_i \,,\, \bar{e}_j \rangle$$

Matricialmente:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)\ \ G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Siendo G la matriz definida por

$$G = \begin{pmatrix} \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle & \dots & \langle \bar{e}_1, \bar{e}_n \rangle \\ \langle \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle & \dots & \langle \bar{e}_2, \bar{e}_n \rangle \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ \langle \bar{e}_n, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_n, \bar{e}_2 \rangle & \dots & \langle \bar{e}_n, \bar{e}_n \rangle \end{pmatrix}$$

La expresión (1) se denomina expresión o ecuación matricial del producto escalar $\langle , \rangle$ en la base B de V.

En dicha expresión las n-tuplas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(y_1, y_2, ..., y_n)$ representan a las coordenadas respectivas de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ en la base B de V y la matriz G es una matriz simétrica a la que se denomina matriz métrica o matriz de GRAM del producto escalar $\langle , \rangle$ respecto de la base B de V.

Observemos inicialmente que los elementos de la diagonal principal de G son estrictamente positivos pues $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = \| \bar{e}_i \|^2 > 0$.

Además G es una matriz inversible. En efecto, si G no fuese inversible tendríamos que:

$$\text{G no inversible} \Rightarrow \exists\, \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, \bar{e}_i \in V - \{\bar{0}\} \,/\, G \,.\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, \bar{e}_i \in V - \{\bar{0}\} \,/\, (x_1\, x_2 \ldots x_n) \,.\, G \,.\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, \bar{e}_i \in V - \{\bar{0}\} \,/\, \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$$

El resultado $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = 0$ con $\bar{x} \in V - \{\bar{0}\}$ es absurdo, pues sabemos que $\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle = \| \bar{x} \|^2 > 0$ para cualquier $\bar{x} \in V - \{\bar{0}\}$. Luego G es inversible.

Posteriormente veremos que la matriz real simétrica G es definida positiva.

Ejercicio 4

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$ y consideremos un sistema de vectores no nulos $F = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_r\}$ de V. Se denomina determinante de GRAM relativo al sistema de vectores F, al determinante Δ definido por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \langle \bar{u}_1, \bar{u}_1 \rangle & \langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle & \ldots & \langle \bar{u}_1, \bar{u}_r \rangle \\ \langle \bar{u}_2, \bar{u}_1 \rangle & \langle \bar{u}_2, \bar{u}_2 \rangle & \ldots & \langle \bar{u}_2, \bar{u}_r \rangle \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle \bar{u}_r, \bar{u}_1 \rangle & \langle \bar{u}_r, \bar{u}_2 \rangle & \ldots & \langle \bar{u}_r, \bar{u}_r \rangle \end{vmatrix}$$

Demostrar que:

$$F \text{ sistema libre} \Leftrightarrow \Delta \neq 0$$

Solución

$$(1)\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \,.\, \bar{u}_i = \bar{0} \Leftrightarrow \left\langle \bar{u}_j, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \,.\, \bar{u}_i \right\rangle = 0 \ \wedge \ j = 1, 2, ..., r \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \,.\, \langle \bar{u}_j, \bar{u}_i \rangle = 0 \ \wedge \ j = 1, 2, ..., r \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} \langle \bar{u}_1, \bar{u}_i \rangle \,.\, \lambda_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} \langle \bar{u}_2, \bar{u}_i \rangle \,.\, \lambda_i = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{r} \langle \bar{u}_r, \bar{u}_i \rangle \,.\, \lambda_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \bar{u}_1, \bar{u}_1 \rangle \lambda_1 + \langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle \lambda_2 + \ldots + \langle \bar{u}_1, \bar{u}_r \rangle \lambda_r = 0 \\ \langle \bar{u}_2, \bar{u}_1 \rangle \lambda_1 + \langle \bar{u}_2, \bar{u}_2 \rangle \lambda_2 + \ldots + \langle \bar{u}_2, \bar{u}_r \rangle \lambda_r = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle \bar{u}_r, \bar{u}_1 \rangle \lambda_1 + \langle \bar{u}_r, \bar{u}_2 \rangle \lambda_2 + \ldots + \langle \bar{u}_r, \bar{u}_r \rangle \lambda_r = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Según esto la expresión vectorial (1) se verifica solamente para $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0$ si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales homogéneas (2) admite únicamente la solución trivial $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0$. Es decir, el sistema de vectores F es un sistema libre si y sólo si $\Delta \neq 0$.

Hacemos notar también que:

$$\text{F sistema ligado} \Leftrightarrow \Delta = 0$$

4. ORTOGONALIDAD EN ESPACIOS VECTORIALES EUCLIDEOS

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$.

Definición 4.1

Dos vectores $\bar{x} \in V$ e $\bar{y} \in V$ se dicen ortogonales si $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ denotándose $\bar{x} \perp \bar{y}$.

Proposición 4.1

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$. Entonces:

1.º) El vector nulo $\overline{0} \in V$ es el único vector de V ortogonal a todos los vectores de V.
2.º) Si $\overline{x}, \overline{y} \in V - \{\overline{0}\}$ resulta que $\overline{x} \perp \overline{y} \Leftrightarrow \theta = \pi/2$.

Demostración

1.º) Se concluye de inmediato considerando el apartado d) de la proposición 1.1.
2.º) Como

$$\cos \theta = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\| \overline{x} \| . \| \overline{y} \|}$$

tenemos que:

$$\overline{x} \perp \overline{y} \Leftrightarrow \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Recordemos que en la definición 2.2 acordamos tomar θ en el intervalo cerrado $[0, \pi]$.

Definición 4.2

Dos subconjuntos S y T de V se dicen ortogonales si $\forall\ \overline{x} \in S$ y $\forall\ \overline{y} \in T$ se cumple que $\overline{x} \perp \overline{y}$. Si S y T son ortogonales se denota $S \perp T$.

Proposición 4.2

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$. Entonces:

1.º) Si S es un subespacio vectorial de V tal que $\dim (S) = r$ y $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$ es una base de S resulta que:

$$\{\overline{x}\} \perp S \Leftrightarrow \{\overline{x}\} \perp B$$

2.º) Si S y T son subespacios vectoriales de V tenemos que:

$$S \perp T \Rightarrow S \cap T = \{\bar{0}\}$$

Demostración

1.º)

$\Rightarrow$) Supongamos que $\{\bar{x}\} \perp S$. Entonces se cumple que:

$$\bar{x} \perp \bar{y} \quad \forall\, \bar{y} \in S$$

Como B es un subconjunto de S tenemos que:

$$\bar{x} \perp \bar{y} \quad \forall\, \bar{y} \in B$$

Es decir $\{\bar{x}\} \perp B$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $\{\bar{x}\} \perp B$. Es decir:

$$\bar{x} \perp \bar{e}_i \quad \forall\, \bar{e}_i \in B$$

Luego:

$$\langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle = 0 \quad \forall\, \bar{e}_i \in B$$

Consideremos un vector cualquiera $\bar{y} \in S$ cuyas coordenadas en la base B de S vienen dadas por la r-tupla $(y_1, y_2, ..., y_r)$. Entonces:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \left\langle \bar{x}, \sum_{i=1}^{r} y_i \,.\, \bar{e}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{r} y_i \,.\, \langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle$$

De donde, considerando que $\langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle = 0 \;\; \forall\, \bar{e}_i \in B$, concluimos que:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0 \quad \forall\, \bar{y} \in S$$

Es decir $\{\bar{x}\} \perp S$.

2.º) Supongams que $S \perp T$. Entonces:

$$\overline{z} \in S \cap T \Rightarrow \overline{z} \in S \wedge \overline{z} \in T \Rightarrow \overline{z} \perp \overline{z} \Rightarrow \langle \overline{z}, \overline{z} \rangle = 0 \Rightarrow \overline{z} = \overline{0}$$

De donde concluimos que $S \cap T = \{\overline{0}\}$, es decir, los subespacios vectoriales S y T son independientes.

Definición 4.3

Se denomina complementario ortogonal de un subconjunto S de V al subconjunto de V denotado $S^{\perp}$ y definido por:

$$S^{\perp} = \{\overline{x} \in V / \overline{x} \perp \overline{s}, \ \forall \overline{s} \in S\}$$

Proposición 4.3

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$.

1.º) Si S es un subconjunto de V resulta que $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.
2.º) Si S es un subespacio vectorial de V tenemos que $S \cap S^{\perp} = \{\overline{0}\}$.

Demostración

1.º) Consideremos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y dos vectores cualesquiera $\overline{x}, \overline{y} \in S^{\perp}$. Entonces $\forall \overline{s} \in S$ se tiene que:

$$\langle \alpha . \overline{x} + \beta . \overline{y}, \overline{s} \rangle = \alpha . \langle \overline{x}, \overline{s} \rangle + \beta . \langle \overline{y}, \overline{s} \rangle = \alpha . 0 + \beta . 0 = 0$$

Es decir:

$$\langle \alpha . \overline{x} + \beta . \overline{y} \rangle \perp \overline{s} \quad \forall \overline{s} \in S$$

Luego:

$$\alpha . \overline{x} + \beta . \overline{y} \in S^{\perp} \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in S^{\perp}$$

En consecuencia $S^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.

2.º) Como S y $S^{\perp}$ son subespacios vectoriales de V tales que $S \perp S^{\perp}$, considerando el apartado 2.º) de la proposición 4.2, concluimos que $S \cap S^{\perp} = \{\overline{0}\}$.

Observación

Al subespacio vectorial $S^{\perp}$ de V se le denomina frecuentemente subespacio ortogonal de S.

Ejercicio 5

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y consideremos el producto escalar $\langle , \rangle$ definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 + 2x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4$$
$$\forall\, \overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)\,, \qquad \overline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

Hallar $S^{\perp}$ siendo $S = L(\{\overline{e}_1 = (1, 0, 1, 0),\ \overline{e}_2 = (0, -1, 0, 1)\})$.

Solución

Como $B = \{\overline{e}_1 = (1, 0, 1, 0),\ \overline{e}_2 = (0, -1, 0, 1)\}$ es un sistema libre y en consecuencia una base de $S = L(B)$, considerando la proposición 4.2 tenemos que:

$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^{\perp} \Leftrightarrow \{\overline{x}\} \perp S \Leftrightarrow \{\overline{x}\} \perp B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \langle \overline{x}, \overline{e}_1 \rangle = 0 \wedge \langle \overline{x}, \overline{e}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - \beta \\ x_4 = \alpha + 2\beta \end{cases} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Luego:

$$S^{\perp} = \{(\alpha, \beta, -\alpha - \beta, \alpha + 2\beta) \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, -1, 2)\})$$

5. SISTEMAS ORTOGONALES Y SISTEMAS ORTONORMALES. PROCESO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$.

Definición 5.1

Un sistema de vectores $\{\bar{v}_i / i \in I\}$ se denomina sistema ortogonal si se cumple que:

$$\bar{v}_i \perp \bar{v}_j \qquad \forall\, i, j \in I / i \neq j$$

Definición 5.2

Un sistema de vectores $\{\bar{v}_i / i \in I\}$ se denomina sistema ortonormal si se cumple que:

$$\bar{v}_i \perp \bar{v}_j \qquad \forall\, i, j \in I / i \neq j \qquad \wedge \qquad \| \bar{v}_i \| = 1 \quad \forall\, i \in I$$

Proposición 5.1

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$.

1.º) Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_r\} \subset V - \{\bar{0}\}$ es un sistema ortogonal entonces $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_r\}$ es un sistema libre.

2.º) Si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_r\} \subset V$ es un sistema ortogonal resulta que:

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} \bar{v}_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{r} \| \bar{v}_i \|^2$$

Demostración

1.º) Consideremos un subíndice cualquiera $j \in \{1, 2, ..., r\}$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i . \bar{v}_i = \bar{0} \Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i . v_i, v_j \right\rangle = \langle \bar{0}, v_j \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i . \langle \bar{v}_i, \bar{v}_j \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_j . \langle \bar{v}_j, \bar{v}_j \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_j . \| \bar{v}_j \|^2 = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0$$

Ahora bien, como j es un subíndice cualquiera de $\{1, 2, ..., r\}$, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot \overline{v}_i = \overline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_r = 0$$

Luego $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r\}$ es un sistema libre.

2.º)

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} \overline{v}_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{r} \overline{v}_i , \sum_{j=1}^{r} \overline{v}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{r} \left\langle \overline{v}_i , \sum_{j=1}^{r} \overline{v}_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \left(\langle \overline{v}_i , \overline{v}_1 \rangle + \langle \overline{v}_i , \overline{v}_2 \rangle + ... + \langle \overline{v}_i , \overline{v}_i \rangle + ... + \langle \overline{v}_i , \overline{v}_r \rangle \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left(0 + 0 + ... + \| \overline{v}_i \|^2 + ... + 0 \right) = \sum_{i=1}^{r} \| \overline{v}_i \|^2$$

Este resultado se denomina frecuentemente teorema de PITÁGORAS. En particular para $r = 2$ tenemos que:

$$\| \overline{v}_1 + \overline{v}_2 \|^2 = \| \overline{v}_1 \|^2 + \| \overline{v}_2 \|^2$$

Definición 5.3

Dados dos vectores no nulos $\overline{x}, \overline{y} \in V - \{\overline{0}\}$ se denomina proyección ortogonal de $\overline{x}$ sobre $\overline{y}$ al vector:

$$\overline{x}' = \frac{\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle}{\| \overline{y} \|^2} \cdot \overline{y}$$

Es inmediato probar que $\overline{x}' \in L(\{\overline{y}\})$ y $\| \overline{x}' \| \leq \| \overline{x} \|$.

La siguiente proposición nos presenta un proceso que nos permite obtener un sistema ortogonal a partir de un sistema libre de tal forma que ambos sistemas engendren el mismo subespacio vectorial.

Proposición 5.2

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$. Entonces si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r\} \subset V$ es un sistema libre, resulta que existe un sistema ortogonal $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_r\} \subset V$ tal que $L(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_r\}) = L(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_r\})$.

Demostración

Tomemos $\bar{v}_1 = \bar{u}_1$.

Consideremos $\bar{v}_2 = \bar{u}_2 + \alpha_1 . \bar{v}_1$ y determinemos el escalar α_1 de forma que $\bar{v}_2 \perp \bar{v}_1$:

$$\bar{v}_2 \perp \bar{v}_1 \Leftrightarrow \langle \bar{v}_2, \bar{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \bar{u}_2 + \alpha_1 . \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle \bar{u}_2 , \bar{v}_1 \rangle + \alpha_1 . \langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \bar{u}_2 , \bar{v}_1 \rangle + \alpha_1 . \| \bar{v}_1 \|^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{-\langle \bar{u}_2 , \bar{v}_1 \rangle}{\| \bar{v}_1 \|^2}$$

Luego tomando $\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \bar{u}_2 , \bar{v}_1 \rangle}{\| \bar{v}_1 \|^2} . \bar{v}_1$ resulta que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ es un sistema ortogonal y además $L(\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}) = L(\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\})$.

Observemos que $\bar{v}_2$ es la suma del vector $\bar{u}_2$ y del opuesto del vector proyección ortogonal de $\bar{u}_2$ sobre $\bar{v}_1$.

Consideremos $\bar{v}_3 = \bar{u}_3 + \alpha_2 . \bar{v}_2 + \alpha_1 . \bar{v}_1$ y determinemos los escalares α_1 y α_2 de forma que $\bar{v}_3 \perp \bar{v}_1$ y $\bar{v}_3 \perp \bar{v}_2$:

$$\bar{v}_3 \perp \bar{v}_1 \wedge \bar{v}_3 \perp \bar{v}_2 \Leftrightarrow \langle \bar{u}_3 + \alpha_2 . \bar{v}_2 + \alpha_1 . \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle = 0 \wedge$$

$$\langle \bar{u}_3 + \alpha_2 . \bar{v}_2 + \alpha_1 . \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \bar{u}_3 , \bar{v}_1 \rangle + \alpha_2 . \langle \bar{v}_2 , \bar{v}_1 \rangle + \alpha_1 . \langle \bar{v}_1 , \bar{v}_1 \rangle = 0 \\ \langle \bar{u}_3 , \bar{v}_2 \rangle + \alpha_2 . \langle \bar{v}_2 , \bar{v}_2 \rangle + \alpha_1 . \langle \bar{v}_1 , \bar{v}_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \bar{u}_3 , \bar{v}_1 \rangle + \alpha_1 . \| \bar{v}_1 \|^2 = 0 \\ \langle \bar{u}_3 , \bar{v}_2 \rangle + \alpha_2 . \| \bar{v}_2 \|^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{\langle \bar{u}_3 , \bar{v}_1 \rangle}{\| \bar{v}_1 \|^2} \\ \alpha_2 = -\frac{\langle \bar{u}_3 , \bar{v}_2 \rangle}{\| \bar{v}_2 \|^2} \end{cases}$$

Luego tomando $\overline{v}_3 = \overline{u}_3 - \frac{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_2 \rangle}{\|\overline{v}_2\|^2} \cdot \overline{v}_2 - \frac{\langle \overline{u}_3, \overline{v}_1 \rangle}{\|\overline{v}_1\|^2} \cdot \overline{v}_1$ resulta que $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ es un sistema ortogonal y además $L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3\}) = L(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\})$.

Observemos que el vector $\overline{v}_3$ es la suma del vector $\overline{u}_3$ y del vector opuesto de la suma del vector proyección ortogonal de $\overline{u}_3$ sobre $\overline{v}_2$ y del vector proyección ortogonal de $\overline{u}_3$ sobre $\overline{v}_1$.

Reiterando el proceso obtendremos:

$$\overline{v}_r = \overline{u}_r - \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\langle \overline{u}_r, \overline{v}_j \rangle}{\|\overline{v}_j\|^2} \cdot \overline{v}_j$$

tal que $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r\}$ es un sistema ortogonal y cumpliéndose además que $L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_r\}) = L(\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r\})$.

El proceso seguido en la determinación del sistema ortogonal $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r\}$ en donde:

$$\overline{v}_1 = \overline{u}_1$$

$$\overline{v}_i = \overline{u}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \overline{u}_i, \overline{v}_j \rangle}{\|\overline{v}_j\|^2} \cdot \overline{v}_j \qquad i \in \{2, 3, ..., r\}$$

Se denomina proceso de ortogonalización de GRAM-SCHMIDT.

Proposición 5.3

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$. Entonces:

1.º) Si $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_r\} \subset V$ es un sistema libre, resulta que existe un sistema ortonormal $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_r\} \subset V$ tal que $L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_r\}) = L(\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_r\})$.

2.º) Si el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es de dimensión finita n resulta que V tiene al menos una base ortonormal.

Demostración

1.º) Consideremos el sistema ortogonal $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_r\}$ determinado en la proposición anterior. Entonces, como $\|\overline{v}_i\| \neq 0 \ \forall \ i \in \{1, 2, ..., r\}$, podemos construir los vectores:

$$w_i = \frac{1}{\|\overline{v}_i\|} . \overline{v}_i \qquad i \in \{1, 2, ..., r\}$$

Es inmediato probar que $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_r\}$ es un sistema ortonormal y que $L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_r\}) = L(\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_r\})$.

2.º) Como el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es de dimensión finita n resulta que existe al menos una base $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ de V.

A partir del sistema libre $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\} \subset V$ y considerando el resultado del apartado 1.º), obtendremos el sistema ortonormal $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_r\} \subset V$ en donde:

$$\overline{w}_1 = \frac{1}{\|\overline{v}_1\|} . \overline{v}_1 \qquad \overline{v}_1 = \overline{e}_1$$

$$\overline{w}_i = \frac{1}{\|\overline{v}_i\|} . \overline{v}_i \qquad \overline{v}_i = \overline{e}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \overline{e}_i , \overline{v}_j \rangle}{\|\overline{v}_j\|^2} . \overline{v}_j \qquad i \in \{2, 3, ..., r\}$$

cumpliéndose que $V = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}) = L(\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_n\})$.

De lo expuesto se sigue que $B' = \{\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_n\}$ es una base ortonormal de V.

Observaciones

1.º) El proceso seguido en el apartado 1.º) de la proposición 5.3 para obtener los vectores unitarios $\overline{w}_i$ ($\|\overline{w}_i\| = 1$) a partir de los vectores no nulos $\overline{v}_i$, se denomina proceso de normalización. Mediante dicho proceso siempre es posible obtener un sistema ortonormal de vectores no nulos.

2.º) Dado un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle \ \rangle)$ siendo el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita n, resulta que la matriz métrica o matriz de GRAM del producto escalar $\langle , \rangle$ respecto de una base ortonormal cualquiera de V coincide con la matriz unidad $I \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Proposición 5.4

Consideremos un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$ siendo el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita n. Entonces si $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ es una base ortonormal de V cada vector $\bar{x} \in V$ se expresa en la forma:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle \, . \, \bar{e}_i$$

Demostración

Como B es una base de V resulta que:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, . \, \bar{e}_i$$

en donde la n-tupla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ representa a las coordenadas del vector $\bar{x}$ en la base B de V.

Determinemos los productos escalares $\langle \bar{x}, \bar{e}_j \rangle$ para $j = 1, 2, ..., n$:

$$\langle \bar{x}, \bar{e}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \, . \, \bar{e}_i \, , \, \bar{e}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, . \, \langle \bar{e}_i \, , \, \bar{e}_j \rangle$$

De donde, considerando que $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ y $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 1$ si $i = j$, resulta que:

$$\langle \bar{x}, \bar{e}_j \rangle = x_j \qquad j = 1, 2, ..., n$$

Por tanto, el vector $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, . \, \bar{e}_i$ se expresa en la forma:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle \, . \, \bar{e}_i$$

Observación

Considerando que el vector $\langle \bar{x}, \bar{e}_i \rangle \cdot \bar{e}_i$ es el vector proyección ortogonal del vector $\bar{x}$ sobre el vector $\bar{e}_i$ de la base ortonormal B, podemos enunciar que cada vector $\bar{x} \in V$ es la suma de los vectores proyección ortogonal del vector $\bar{x}$ sobre cada uno de los vectores $\bar{e}_i$ de la base ortonormal B de V.

Proposición 5.5

Consideremos un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$ siendo el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita n. Entonces si S es un subespacio vectorial de V, resulta que V es suma directa de S y $S^{\perp}$.

Demostración

Si $S = \{\bar{0}\}$ entonces $S^{\perp} = V$ y la proposición se verifica trivialmente.

Supongamos que $S \neq \{\bar{0}\}$:

Sea $\dim(S) = r \leq n$ y consideremos una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r\}$ de S. Completemos el sistema libre $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r\} \subset V$ hasta obtener una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r, \bar{e}_{r+1}, ..., \bar{e}_n\}$ de V.

A partir de la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r, \bar{e}_{r+1}, ..., \bar{e}_n\}$ de V y considerando la proposición 5.3, obtendremos una base ortonormal $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_r, \bar{w}_{r+1}, ..., \bar{w}_n\}$ de V siendo además $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_r\}$ una base ortonormal de S.

Según esto:

$$V = L(\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_r, \bar{w}_{r+1}, ..., \bar{w}_n\}) =$$
$$= L(\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_r\}) + L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\})$$

Es decir:

$$V = S + L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\})$$

Demostremos que $S^{\perp} = L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\})$:

Como $\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\} \perp \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_r\}$ y $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, ..., \bar{w}_r\}$ es una base de S, considerando la proposición 4.2, resulta que $\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n \in S^{\perp}$. Ahora bien, como $L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\})$ es el menor subespacio vectorial que contiene a $\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n$, tenemos que $L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\}) \subset S^{\perp}$.

Por otro lado, considerando la proposición 4.2 y que todo vector $\bar{x}$ de V se expresa en la forma:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \bar{e}_i$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, ..., r, r+1, ..., n$, resulta que:

$$\begin{aligned}
\bar{x} \in S^{\perp} &\Rightarrow \{\bar{x}\} \perp S \Rightarrow \{\bar{x}\} \perp \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_r\} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{w}_j \rangle = 0 \wedge j = 1, 2, ..., r \Rightarrow \\
&\Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \bar{w}_i , \bar{w}_j \right\rangle = 0 \wedge j = 1, 2, ..., r \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \langle \bar{w}_i, \bar{w}_j \rangle = 0 \wedge j = 1, 2, ..., r \Rightarrow \\
&\Rightarrow \alpha_j \cdot \langle \bar{w}_j, \bar{w}_j \rangle = 0 \wedge j = 1, 2, ..., r \Rightarrow \\
&\Rightarrow \alpha_j \cdot 1 = 0 \wedge j = 1, 2, ..., r \Rightarrow \\
&\Rightarrow \alpha_j = 0 \wedge j = 1, 2, ..., r \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{x} = \sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i \cdot \bar{w}_i \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{x} \in L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\})
\end{aligned}$$

De donde se sigue que $S^{\perp} \subset L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\})$.

Luego de $L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\}) \subset S^{\perp}$ y $S^{\perp} \subset L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\})$ resulta que $S^{\perp} = L(\{\bar{w}_{r+1}, \bar{w}_{r+2}, ..., \bar{w}_n\})$

Reuniendo resultados tenemos que:

$$V = S + S^{\perp}$$

Como además $S \cap S^{\perp} = \{\bar{0}\}$ según la proposición 4.2, concluimos que V es suma directa de S y $S^{\perp}$.

Observación

El sistema ortonormal $\{\overline{w}_{r+1}, \overline{w}_{r+2}, ..., \overline{w}_n\}$ es una base ortonormal de $S^{\perp}$.

Ejercicio 6

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{C}$ de las funciones de $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas sobre $\mathcal{C}$ y consideremos el producto escalar $\langle , \rangle$ sobre $\mathcal{C}$ definido por:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \,.\, g(x)\, dx \qquad \forall\, f, g \in \mathcal{C}$$

Demostrar que el sistema $U = \{h, f_1, g_1, ..., f_i, g_i, ..., f_n, g_n\} \subset \mathcal{C}$ en donde:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,.\, \operatorname{sen} ix, \quad g_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,.\, \cos ix \quad \forall x \in [0, 2\pi]$$

para $i = 1, 2, ..., n$ es un sistema ortonormal.

Solución

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ \langle h, f_i\rangle = \int_0^{2\pi} h(x) \,.\, f_i(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,.\, \operatorname{sen} ix\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\pi} \,.\, \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} ix\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\pi} \,.\, \left[-\frac{\cos ix}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ \langle h, g_i\rangle = \int_0^{2\pi} h(x) \,.\, g_i(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,.\, \cos ix\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\pi} \,.\, \int_0^{2\pi} \cos ix\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\pi} \,.\, \left[\frac{\operatorname{sen} ix}{i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}\ \langle f_i, g_i\rangle = \int_0^{2\pi} f_i(x) \,.\, g_i(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,.\, \operatorname{sen} ix \,.\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \,.\, \cos ix\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \,.\, \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} ix \,.\, \cos ix\, dx = \frac{1}{\pi} \,.\, \left[\frac{\operatorname{sen}^2 ix}{2i}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \;/\; i \neq j \quad \langle f_i , g_j \rangle = \int_0^{2\pi} f_i(x) \cdot g_j(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{sen} ix \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos jx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} ix \cdot \cos jx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[-\frac{\cos(i-j)\,x}{2(i-j)} - \frac{\cos(i+j)\,x}{2(i+j)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \;/\; i \neq j \quad \langle f_i , f_j \rangle = \int_0^{2\pi} f_i(x) \cdot f_j(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{sen} ix \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{sen} jx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} ix \cdot \operatorname{sen} jx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}(i-j)\,x}{2(i-j)} - \frac{\operatorname{sen}(i+j)\,x}{2(i+j)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\} \;/\; i \neq j \quad \langle g_i , g_j \rangle = \int_0^{2\pi} g_i(x) \cdot g_j(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos ix \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos jx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos ix \cdot \cos jx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\operatorname{sen}(i-j)\,x}{2(i-j)} + \frac{\operatorname{sen}(i+j)\,x}{2(i+j)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\langle h, h \rangle = \int_0^{2\pi} h(x) \cdot h(x)\, dx = \int_0^{2\pi} [h(x)]^2 \, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot [x]_0^{2\pi} = 1$$

$$\| h \| = \sqrt{\langle h, h \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \langle f_i , f_i \rangle = \int_0^{2\pi} f_i(x) \cdot f_i(x)\, dx = \int_0^{2\pi} [f_i(x)]^2\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \operatorname{sen} ix \right]^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \operatorname{sen}^2 ix\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 ix\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ix}{4i} \right]_0^{2\pi} = 1$$

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \| f_i \| = \sqrt{\langle f_i , f_i \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \langle g_i , g_i \rangle = \int_0^{2\pi} g_i(x) \cdot g_i(x)\, dx = \int_0^{2\pi} [g_i(x)]^2\, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \cos ix \right]^2 dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \cos^2 ix\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 ix\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ix}{4i} \right]_0^{2\pi} = 1$$

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad \| g_i \| = \sqrt{\langle g_i , g_i \rangle} = \sqrt{1} = 1$$

De lo expuesto se sigue que el sistema U es ortonormal.

Ejercicio 7

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y consideremos el producto escalar $\langle , \rangle$ sobre $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2) + x_2 \cdot y_2 + (x_2 - x_3) \cdot (y_2 - y_3)$$

$$\forall\, \overline{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Solución

Consideremos la base canónica B = $\{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallemos, considerando la proposición 5.3, una base ortonormal B' = $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{e}_2 - \frac{\langle \bar{e}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\| \bar{v}_1 \|^2} \cdot \bar{v}_1 \qquad \langle \bar{e}_2, \bar{v}_1 \rangle = 1 \qquad \| \bar{v}_1 \|^2 = \langle \bar{v}_1, \bar{v}_1 \rangle = 1$$

$$\bar{v}_2 = \bar{e}_2 - \frac{1}{1} \cdot \bar{v}_1 = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$$

$$\bar{v}_3 = \bar{e}_3 - \frac{\langle \bar{e}_3, \bar{v}_2 \rangle}{\| \bar{v}_2 \|^2} \cdot \bar{v}_2 - \frac{\langle \bar{e}_3, \bar{v}_1 \rangle}{\| \bar{v}_1 \|^2} \cdot \bar{v}_1$$

$$\langle \bar{e}_3, \bar{v}_1 \rangle = 0$$

$$\langle \bar{e}_3, \bar{v}_2 \rangle = -1$$

$$\| \bar{v}_2 \|^2 = \langle \bar{v}_2, \bar{v}_2 \rangle = 2 \qquad \| \bar{v}_2 \| = \sqrt{2}$$

$$\bar{v}_3 = e_3 + \frac{1}{2} \cdot \bar{v}_2 - \frac{0}{1} \cdot \bar{v}_1 = e_3 + \frac{1}{2} \cdot \bar{v}_2 = (0,0,1) + \frac{1}{2} \cdot (-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$$

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{\| \bar{v}_1 \|} \cdot \bar{v}_1 = \frac{1}{1} \cdot \bar{v}_1 = (1,0,0)$$

$$\bar{w}_2 = \frac{1}{\| \bar{v}_2 \|} \cdot \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1,1,0) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

$$\bar{w}_3 = \frac{1}{\| \bar{v}_3 \|} \cdot \bar{v}_3 \qquad \| \bar{v}_3 \| = \sqrt{\langle \bar{v}_3, \bar{v}_3 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{w}_3 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \bar{v}_3 = \sqrt{2} \cdot \bar{v}_3 = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \right)$$

Por tanto

$$B' = \left\{ \overline{w}_1 = (1,0,0),\ \overline{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ 0 \right),\ \overline{w}_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2} \right) \right\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 8

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{C}$ de las funciones de $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas sobre $[0, 1]$ y consideremos el producto escalar $\langle , \rangle$ sobre $\mathcal{C}$ definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx \qquad \forall\ f, g \in \mathcal{C}$$

Hallar una base ortogonal del subespacio vectorial $S = L(\{f_1, f_2, f_3\})$ de $\mathcal{C}$ en donde:

$$f_1(x) = e^{-x} \qquad f_2(x) = 1 \qquad f_3(x) = e^x \qquad \forall\ x \in [0, 1]$$

Solución

Observemos en principio que $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ es un sistema libre.

Hallemos, considerando la proposición 5.2, una base ortogonal $B' = \{h_1, h_2, h_3\}$ de S a partir de la base B de S. Operando:

$$h_1 = f_1$$

$$h_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, h_1 \rangle}{\| h_1 \|^2} \cdot h_1$$

$$\langle f_2, h_1 \rangle = \int_0^1 f_2(x) \cdot h_1(x)\, dx = \int_0^1 1 \cdot e^{-x}\, dx = \int_0^1 e^{-x}\, dx = \frac{e-1}{e}$$

$$\| h_1 \|^2 = \langle h_1, h_1 \rangle = \int_0^1 h_1(x) \cdot h_1(x)\, dx = \int_0^1 (e^{-x})^2\, dx = \int_0^1 e^{-2x}\, dx = \frac{e^2-1}{2e^2}$$

$$h_2 = f_2 - \frac{\frac{e-1}{e}}{\frac{e^2-1}{2e^2}} \cdot h_1 = f_2 - \frac{2e}{e+1} \cdot h_1$$

$$h_3 = f_3 - \frac{\langle f_3 , h_2 \rangle}{\| h_2 \|^2} \cdot h_2 - \frac{\langle f_3 , h_1 \rangle}{\| h_1 \|^2} \cdot h_1$$

$$\langle f_3 , h_1 \rangle = \int_0^1 f_3(x) \cdot h_1(x)\, dx = \int_0^1 e^x \cdot e^{-x}\, dx = \int_0^1 dx = 1$$

$$\langle f_3 , h_2 \rangle = \int_0^1 f_3(x) \cdot h_2(x)\, dx = \int_0^1 e^x \cdot \left(1 - \frac{2e}{e+1} \cdot e^{-x}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 e^x\, dx - \frac{2e}{e+1} \int_0^1 dx = \frac{e^2-2e-1}{e+1}$$

$$\| h_2 \|^2 = \langle h_2 , h_2 \rangle = \int_0^1 \left(1 - \frac{2e}{e+1} \cdot e^{-x}\right)^2 dx = -\frac{e^2-2e-3}{(e+1)^2}$$

$$h_3 = f_3 + \frac{\frac{e^2-2e-1}{e+1}}{\frac{e^2-2e-3}{(e+1)^2}} \cdot h_2 - \frac{1}{\frac{e^2-1}{2e^2}} \cdot h_1 = f_3 + \frac{e^2-2e-1}{e^2-2e-3} \cdot (e+1) h_2 - \frac{2e^2}{e^2-1} \cdot h_1$$

Luego el sistema ortogonal $B' = \{h_1, h_2, h_3\}$ en donde:

$$h_1 = f_1$$

$$h_2 = f_2 - \frac{2e}{e+1} \cdot f_1$$

$$h_3 = f_3 + \frac{e^2-2e-1}{e^2-2e-3} \cdot (e+1) \cdot \left(f_2 - \frac{2e}{e+1} \cdot f_1\right) - \frac{2e^2}{e^2-1} \cdot f_1$$

es una base ortogonal de S.

Hacemos notar que a partir de la base ortogonal B' de S se obtiene la base ortonormal

$$B' = \left\{ \frac{1}{\|h_1\|} \cdot h_1 , \frac{1}{\|h_2\|} \cdot h_2 , \frac{1}{\|h_3\|} \cdot h_3 \right\} \qquad \text{de } S$$

Ejercicio 9

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y consideremos el producto escalar $\langle , \rangle$ sobre $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por:

$$\langle A, B\rangle = \text{traza}\,(B^T \cdot A) \qquad \forall\, A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

Hallar una base ortonormal del subespacio vectorial $S = L(\{A_1, A_2\})$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ en donde:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

$B = \{A_1, A_2\}$ es un sistema libre de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Hallemos, considerando la proposición 5.3, una base ortonormal $B' = \{C_1, C_2\}$ de S a partir de la base B de S.

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - \frac{\langle A_2 , B_1\rangle}{\|B_1\|^2} \cdot B_1 \qquad \langle A_2 , B_1\rangle = \text{traza}\,(B_1^T \cdot A_2)$$

$$B_1^T \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle A_2 , B_1\rangle = -2$$

$$\|B_1\|^2 = \langle B_1 , B_1\rangle = \text{traza}\,(B_1^T \cdot B_1) \wedge B_1^T \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|B_1\|^2 = 5$$

$$B_2 = A_2 + \frac{2}{5} \cdot B_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\| B_2 \|^2 = \langle B_2 , B_2 \rangle = \text{traza} \left(B_2^T \cdot B_2 \right) \wedge B_2^T \cdot B_2 = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 29 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \| B_2 \|^2 = \frac{1}{25} (29 + 1) = \frac{6}{5}$$

$$C_1 = \frac{1}{\| B_1 \|} \cdot B_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \frac{1}{\| B_2 \|} \cdot B_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{6}{5}}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{30}}{30} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$B' = \left\{ C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \frac{\sqrt{30}}{30} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortonormal del subespacio vectorial S de $M_{2 \times 2} (\mathbb{R})$.

Ejercicio 10

Sean los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $M_{n \times n} (\mathbb{R})$. Consideremos el producto escalar $\langle , \rangle$ sobre $\mathbb{R}^n$ definido por:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \qquad \forall \bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad \bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Sea una matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n} \in M_{n \times n} (\mathbb{R})$.

Interpretemos las filas de A como vectores $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$, $\bar{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$, ..., $\bar{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn})$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

Demostrar que A es ortogonal si y sólo si $B = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Solución

Sea $I \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz unidad y representemos abreviadamente $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $A^T = [a^T_{ij}]_{n \times n}$ e $I = [\delta_{ij}]_{n \times n}$ en donde:

$$\begin{aligned} a^T_{ij} &= a_{ji} && \forall\, i, j \in \{1, 2, ..., n\} \\ \delta_{ij} &= 0 && \forall\, i, j \in \{1, 2, ..., n\} \;/\; i \neq j \\ \delta_{ii} &= 1 && \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\} \end{aligned}$$

Con estas consideraciones tenemos que:

$$A \text{ ortogonal} \Leftrightarrow A A^T = I \Leftrightarrow [a_{ij}]_{n \times n} \cdot [a^T_{ij}]_{n \times n} = [\delta_{ij}]_{n \times n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, a^T_{hj} \right]_{n \times n} = [\delta_{ij}]_{n \times n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot a_{jh} \right]_{n \times n} = [\delta_{ij}]_{n \times n} \Leftrightarrow \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \cdot a_{jh} = \delta_{ij} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle \bar{a}_i, \bar{a}_j \rangle = \delta_{ij} \Leftrightarrow B \subset \mathbb{R}^n \text{ sistema ortonormal} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B \text{ base ortonormal de } \mathbb{R}^n.$$

Un resultado análogo se obtiene para los vectores columna de A.

6. PROYECCION ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO VECTORIAL

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$, un vector $\bar{v} \in V$ y un subespacio vectorial S de V.

Definición 6.1

Se dice que un vector $\bar{v}' \in S$ es proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre S si el vector $\bar{v} - \bar{v}'$ es ortogonal al subespacio vectorial S.

Proposición 6.1

Si S es un subespacio vectorial de dimensión finita, entonces para cualquier vector $\bar{v} \in V$ existe un único vecto $\bar{v}' \in S$ proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre S.

Demostración

Si $S = V$ se tiene trivialmente que $\overline{v}' = \overline{v}$.

Supongamos que $\dim(S) = r$ y tomemos una base ortogonal $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$ de S. Entonces considerando $\overline{v}' = \alpha_1 \cdot \overline{e}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{e}_2 + ... + \alpha_r \cdot \overline{e}_r$, en donde $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$, resulta que:

$$\overline{v}' \text{ proyección ortogonal de } \overline{v} \text{ sobre } S \Leftrightarrow \overline{v} - \overline{v}' \perp S \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{v} - \overline{v}' \perp \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \overline{v} - \overline{v}', \overline{e}_1 \rangle = 0 \\ \langle \overline{v} - \overline{v}', \overline{e}_2 \rangle = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle \overline{v} - \overline{v}', \overline{e}_r \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \overline{v}', \overline{e}_1 \rangle = \langle \overline{v}, \overline{e}_1 \rangle \\ \langle \overline{v}', \overline{e}_2 \rangle = \langle \overline{v}, \overline{e}_2 \rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle \overline{v}', \overline{e}_r \rangle = \langle \overline{v}, \overline{e}_r \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + ... + \alpha_r \overline{e}_r, \overline{e}_1 \rangle = \langle \overline{v}, \overline{e}_1 \rangle \\ \langle \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + ... + \alpha_r \overline{e}_r, \overline{e}_2 \rangle = \langle \overline{v}, \overline{e}_2 \rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \langle \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + ... + \alpha_r \overline{e}_r, \overline{e}_r \rangle = \langle \overline{v}, \overline{e}_r \rangle \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \|\overline{e}_1\|^2 \alpha_1 = \langle \overline{v}, \overline{e}_1 \rangle \\ \|\overline{e}_2\|^2 \alpha_2 = \langle \overline{v}, \overline{e}_2 \rangle \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \|\overline{e}_r\|^2 \alpha_r = \langle \overline{v}, \overline{e}_r \rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\langle \overline{v}, \overline{e}_1 \rangle}{\|\overline{e}_1\|^2} \\ \alpha_2 = \dfrac{\langle \overline{v}, \overline{e}_2 \rangle}{\|\overline{e}_2\|^2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_r = \dfrac{\langle \overline{v}, \overline{e}_r \rangle}{\|\overline{e}_r\|^2} \end{cases}$$

Este resultado nos prueba la existencia y unicidad del vector $\overline{v}'$ proyección ortogonal del vector $\overline{v}$ sobre el subespacio vectorial S. Además dicho vector $\overline{v}'$ viene determinado por:

$$\overline{v}' = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \overline{v}, \overline{e}_i \rangle}{\|\overline{e}_i\|^2} \cdot \overline{e}_i$$

en donde $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$ es una base ortogonal de S.

Si B fuese una base ortonormal de S, entonces el vector $\bar{v}'$ se expresaría en la forma:

$$\bar{v}' = \sum_{i=1}^{r} \langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle \, . \, \bar{e}_i$$

Observaciones

1.ª) En la definición 5.3, dados dos vectores $\bar{x}, \bar{y} \in V - \{\bar{0}\}$ denominamos proyección ortogonal de $\bar{x}$ sobre $\bar{y}$ al vector:

$$\bar{x}' = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\| \bar{y} \|^2} \, . \, \bar{y} \qquad (2)$$

Es inmediato darse cuenta de que el vector $\bar{x}'$ definido por (2) coincide con el vector proyección ortogonal del vector $\bar{x}$ sobre el subespacio vectorial unidimensional $S = L(\{\bar{y}\})$.

2.ª) En lo sucesivo denotaremos $P_s(\bar{v})$ al vector proyección ortogonal del vector $\bar{v}$ sobre el subespacio vectorial S.

Proposición 6.2

$$P_s(\bar{v}) = \bar{v}' \wedge P_s(\bar{w}) = \bar{w}' \Rightarrow P_s(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{v}' + \bar{w}'$$
$$P_s(\bar{v}) = \bar{v}' \Rightarrow P_s(-\bar{v}) = -\bar{v}'$$

Demostración

$$\begin{aligned} P_s(\bar{v}) = \bar{v}' \wedge P_s(\bar{w}) = \bar{w}' &\Rightarrow \bar{v} - \bar{v}' \perp S \wedge \bar{w} - \bar{w}' \perp S \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\bar{v} - \bar{v}') + (\bar{w} - \bar{w}') \perp S \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\bar{v} + \bar{w}) - (\bar{v}' + \bar{w}') \perp S \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_s(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{v}' + \bar{w}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_s(\bar{v}) = \bar{v}' &\Rightarrow \bar{v} - \bar{v}' \perp S \Rightarrow -(\bar{v} - \bar{v}') \perp S \Rightarrow -\bar{v} + \bar{v}' \perp S \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\bar{v} - (-\bar{v}') \perp S \Rightarrow P_s(-\bar{v}) = -\bar{v}' \end{aligned}$$

7. APROXIMACION LINEAL EN ESPACIOS VECTORIALES EUCLIDEOS

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$, un subespacio vectorial S de V de dimensión finita r y un vector $\bar{v} \in V$.

Bajo estas condiciones existe un único vector $\bar{v}' \in S$ tal que:

$$d(\bar{v}, \bar{v}') \leq d(\bar{v}, \bar{x}) \qquad \forall\ \bar{x} \in S$$

siendo d la distancia euclídea asociada al producto escalar $\langle , \rangle$ definida por:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{\langle \bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y} \rangle} \qquad \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in V$$

El vector $\bar{v}'$ se denomina «mejor aproximación» o «representación óptima» de $\bar{v}$ en S.

Si $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r\} \subset V$ es un sistema libre tal que $S = L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r\})$ y $\bar{v} \in V$, el problema de determinar la mejor aproximación de $\bar{v}$ en S consiste en hallar $\bar{v}' \in L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r\})$ tal que:

$$d(\bar{v}, \bar{v}') \leq d(\bar{v}, \bar{x}) \qquad \forall\ \bar{x} \in L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r\})$$

Ahora bien, como $\bar{v}' \in L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r\})$ resulta que $\bar{v}'$ debe ser una combinación lineal de los vectores $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_r$. Es decir, $\bar{v}'$ deberá expresarse en la forma:

$$\bar{v}' = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i . \bar{e}_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \qquad ; i = 1, 2, ..., r$$

Luego el problema de determinar la mejor aproximación $\overline{v}'$ de $\overline{v}$ en S, consiste en hallar los escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ que verifican la condición

$$d\left(v, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \overline{e}_i\right) \leq d(\overline{v}, \overline{x}) \qquad \forall \overline{x} \in S = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\})$$

El problema así planteado se conoce como el problema de la aproximación lineal en un espacio vectorial euclídeo.

La siguiente proposición nos resuelve el problema propuesto cuando el sistema libre $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$ es un sistema ortogonal.

Proposición 7.1

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\ \rangle)$ y consideremos un sistema ortogonal $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$ de V. Entonces si $\overline{v} \in V$ resulta que:

$$d\left(\overline{v}, \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \overline{v}, \overline{e}_i \rangle}{\|\overline{e}_i\|^2} \cdot \overline{e}_i\right) \leq d(\overline{v}, \overline{x}) \qquad \forall \overline{x} \in S = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\})$$

Es decir

$$\overline{v}' = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \overline{v}, \overline{e}_i \rangle}{\|\overline{e}_i\|^2} \cdot \overline{e}_i$$

es la mejor aproximación del vector $\overline{v}$ en el subespacio vectorial $S = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\})$.

Demostración

Consideremos un vector cualquiera $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \overline{e}_i$ del subespacio vectorial $S = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\})$. Determinemos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ de tal forma que la distancia del vector $\overline{v}$ al vector $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \overline{e}_i$ sea mínima:

$$d\left(\bar{v}, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i\right) = \left\| \bar{v} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bar{e}_i \right\| = \left(\left\langle \bar{v} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \bar{e}_i, \bar{v} - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \bar{e}_j \right\rangle \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \langle \bar{v}, \bar{e}_j \rangle - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle \bar{e}_i, \bar{v} \rangle + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \alpha_j \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\| \bar{v} \|^2 - 2 \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \alpha_i \alpha_j \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\| \bar{v} \|^2 - 2 \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 \| \bar{e}_i \|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\| \bar{v} \|^2 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 \| \bar{e}_i \|^2 - 2 \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle + \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle^2}{\| \bar{e}_i \|^2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle^2}{\| \bar{e}_i \|^2} \right)^{1/2} =$$

$$= \left[\| \bar{v} \|^2 + \sum_{i=1}^{r} \left(\alpha_i^2 \| \bar{e}_i \|^2 - 2 \alpha_i \langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle + \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle^2}{\| \bar{e}_i \|^2} \right) - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle^2}{\| \bar{e}_i \|^2} \right]^{1/2} =$$

$$= \left[\| \bar{v} \|^2 + \sum_{i=1}^{r} \left(\alpha_i \| \bar{e}_i \| - \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle}{\| \bar{e}_i \|} \right)^2 - \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle^2}{\| \bar{e}_i \|^2} \right]^{1/2}$$

Según esta expresión, la distancia del vector $\bar{v}$ al vector $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \cdot \bar{e}_i$ es mínima si se cumple:

$$\alpha_i \| e_i \| - \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle}{\| \bar{e}_i \|} = 0$$

Es decir, si se verifica que:

$$\alpha_i = \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle}{\| e_i \|^2}$$

Por tanto, el vector $\overline{v}'$ del subespacio vectorial $S = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\})$ que menos dista del vector dado $\overline{v} \in V$, viene definido por:

$$\overline{v}' = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \overline{v}, \overline{e}_i \rangle}{\| \overline{e}_i \|^2} \cdot \overline{e}_i$$

Observemos que si $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$ es un sistema ortonormal resulta que:

$$\overline{v}' = \sum_{i=1}^{r} \langle \overline{v}, \overline{e}_i \rangle \cdot \overline{e}_i$$

ya que $\| \overline{e}_i \| = 1$ para $i = 1, 2, ..., r$.

Definición 7.1

A los números reales $\frac{\langle \overline{v}, \overline{e}_1 \rangle}{\| \overline{e}_1 \|^2}$, $\frac{\langle \overline{v}, \overline{e}_2 \rangle}{\| \overline{e}_2 \|^2}$, ..., $\frac{\langle \overline{v}, \overline{e}_r \rangle}{\| \overline{e}_r \|^2}$ se les denomina coeficientes de FOURIER del vector $\overline{v} \in V$ respecto del sistema ortogonal $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$.

Al vector $\overline{v}' = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle \overline{v}, \overline{e}_i \rangle}{\| \overline{e}_i \|^2} \cdot \overline{e}_i$ se le denomina suma de FOURIER del vector $\overline{v} \in V$ respecto del sistema ortogonal $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$.

Según esto, la mejor aproximación del vector $\overline{v} \in V$ en $S = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\})$ es la suma de FOURIER de $\overline{v} \in V$ respecto del sistema ortogonal $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\}$.

Hacemos notar finalmente que la mejor aproximación de $\overline{v} \in V$ en $S = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\})$ coincide con el vector proyección ortogonal de $\overline{v} \in V$ sobre $S = L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_r\})$.

Ejercicio 11

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y consideremos el producto escalar $\langle , \rangle$ sobre $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \qquad \forall\, \overline{x} = (x_1, x_2, x_3), \quad \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Hallar la mejor aproximación del vector $\bar{v} = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ en el subespacio vectorial $S = L(\{\bar{u}_1 = (1, 1, 1),\ \bar{u}_2 = (0, 1, 1)\})$ de $\mathbb{R}^3$.

Solución

Determinemos, considerando la proposición 5.2, un sistema ortogonal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ a partir del sistema libre $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$:

$$\bar{e}_1 = \bar{u}_1$$

$$\bar{e}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \bar{u}_2, \bar{e}_1 \rangle}{\| \bar{e}_1 \|^2} \cdot \bar{e}_1 \qquad \langle \bar{u}_2, \bar{e}_1 \rangle = 2$$

$$\| \bar{e}_1 \|^2 = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle = 3$$

$$\bar{e}_2 = \bar{u}_2 - \frac{2}{3} \cdot \bar{e}_1 = (0, 1, 1) - \frac{2}{3} \cdot (1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Luego $\left\{ \bar{e}_1 = (1, 1, 1),\ \bar{e}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right\}$ es un sistema ortogonal tal que $S = L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$.

Según la proposición 7.1 la mejor aproximación $\bar{v}'$ del vector $\bar{v} = (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ en el subespacio vectorial S viene definida por la suma de FOURIER:

$$\bar{v}' = \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle}{\| \bar{e}_i \|^2} \cdot \bar{e}_i = \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle}{\| \bar{e}_1 \|^2} \cdot \bar{e}_1 + \frac{\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle}{\| \bar{e}_2 \|^2} \cdot \bar{e}_2$$

Hallemos el vector $\bar{v}'$:

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle = 2 \qquad \| \bar{e}_1 \|^2 = 3$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle = -\frac{1}{3} \qquad \| \bar{e}_2 \|^2 = \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle = \frac{2}{3}$$

$$\bar{v}' = \frac{2}{3} \bar{e}_1 - \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \bar{e}_2 = \frac{2}{3} \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \bar{e}_2 = \frac{2}{3} (1, 1, 1) - \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Luego el vector $\bar{v}' = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es la mejor aproximación del vector $\bar{v} = (1, 0, 1)$ en el subespacio vectorial S, es decir, $\bar{v}' = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es el vector de S que menos dista del vector $\bar{v} = (1, 0, 1)$ según la distancia d asociada al producto escalar $\langle , \rangle$.

Ejercicio 12

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathcal{C}$ de las funciones de $[0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continuas sobre $[0, 2\pi]$ y consideremos el producto escalar $\langle , \rangle$ sobre $\mathcal{C}$ definido por:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}$$

Sea el sistema ortonormal $\{q, f_1, g_1\}$ de $\mathcal{C}$ en donde:

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x \quad g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x \qquad \forall x \in [0, 2\pi]$$

y la función $v \in \mathcal{C}$ en donde:

$$v(x) = \frac{1}{4\pi^2} x^2 - 1 \qquad \forall x \in [0, 2\pi]$$

Hallar la mejor aproximación de la función $v \in \mathcal{C}$ en el subespacio vectorial $S = L(\{q, f_1, g_1\})$.

Solución

La mejor aproximación v' de la función $v \in \mathcal{C}$ en el subespacio vectorial S viene definida por la suma de FOURIER:

$$v' = \langle v, q \rangle q + \langle v, f_1 \rangle f_1 + \langle v, g_1 \rangle g_1$$

Operando se tiene que:

$$\langle v, q\rangle = \int_0^{2\pi} v(x)\ \ q(x)\ \ dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4\pi^2}\, x^2 - 1\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \ dx = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{3}$$

$$\langle v, f_1\rangle = \int_0^{2\pi} v(x)\ \ f_1(x)\ \ dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4\pi^2}\, x^2 - 1\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \ \operatorname{sen} x\ \ dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$$\langle v, g_1\rangle = \int_0^{2\pi} v(x)\ \ g_1(x)\ \ dx = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4\pi^2}\, x^2 - 1\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \ \cos x\ \ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^2}$$

Por tanto:

$$v' = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{3}\, q - \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\, f_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{\pi^2}\, g_1$$

Ejercicio 13

En el espacio vectorial euclídeo $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), \langle\ \rangle)$ donde

$$\langle A, B\rangle = \text{traza}\,(B^T \,.\, A) \qquad \forall\ A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

hallar la mejor aproximación de la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ en el subespacio vectorial $S = L(\{A_1, A_2\})$ de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ siendo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

Considerando un ejercicio anterior tenemos que:

$$\left\{C_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C_2 = \frac{\sqrt{30}}{30}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

es un sistema ortonormal tal que $S = L(\{C_1, C_2\})$.

La mejor aproximación H de la matriz P en el subespacio vectorial S viene definida por la suma de FOURIER:

$$H = \sum_{i=1}^{2} \langle P, C_i \rangle \, . \, C_i = \langle P, C_1 \rangle \, . \, C_1 + \langle P, C_2 \rangle \, . \, C_2$$

Hallemos la matriz H:

$$\langle P, C_1 \rangle = \text{traza}\,(C_1^T \, . \, P) \qquad C_1^T \, . \, P = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle P, C_1 \rangle = \frac{\sqrt{5}}{5} (3+0) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\langle P, C_2 \rangle = \text{traza}\,(C_2^T \, . \, P) \qquad C_2^T \, . \, P = \frac{\sqrt{30}}{30} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{30}}{30} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle P, C_2 \rangle = \frac{\sqrt{30}}{30} (11+0) = \frac{11\sqrt{30}}{30}$$

Luego:

$$H = \frac{3\sqrt{5}}{5} \; \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{11\sqrt{30}}{30} \; \frac{\sqrt{30}}{30} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz $H = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ es la mejor aproximación de la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ en el subespacio vectorial S, es decir H es la matriz de S que menos dista de la matriz P según la distancia d asociada al producto escalar $\langle , \rangle$.

Ejercicio propuesto

Sea un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle \; \rangle)$ tal que el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es de dimensión finita n.

Consideremos dos bases ortonormales $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ y $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n\}$ de V. Demostrar que la matriz P del cambio de coordenadas de la base B a la base B' es una matriz ortogonal.

8. SOLUCION APROXIMADA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sea un sistema de ecuaciones lineales definido sobre $\mathbb{R}$, expresado matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

cuya expresión vectorial viene definida por:

$$x_1 \bar{a}'_1 + x_2 \bar{a}'_2 + ... + x_n \bar{a}'_n = \bar{b}$$

en donde los vectores $\bar{a}'_i = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{mi}) \in \mathbb{R}^m$ para $i = 1, 2, ..., n$ representan a las columnas de A y $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$ a los términos independientes.

Consideremos definido en $\mathbb{R}^m$ el producto escalar usual:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum_{i=1}^{m} u_i v_i \qquad \forall\, \bar{u} = (u_1, u_2, ..., u_m),\ \bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_m) \in \mathbb{R}^m$$

al que está asociada la distancia euclídea definida por:

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = \| \bar{u} - \bar{v} \| = (\langle \bar{u} - \bar{v}, \bar{u} - \bar{v} \rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} (u_i - v_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$\forall\, \bar{u} = (u_1, u_2, ..., u_m),\ \bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_m) \in \mathbb{R}^m$$

Supongamos que $F = \{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\}$ es un sistema libre, es decir $r(A) = n$. Entonces:

— Si $\bar{b} \in L(\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\})$ resulta que el sistema es compatible y como $\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\}$ es un sistema libre, existirán unos únicos escalares $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{a}'_i$, siendo $(x_1, x_2, ..., x_n)$ la única solución del sistema. Para esta situación existirán unos únicos escalares $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ tales que $d\left(\bar{b}, \sum_{i=1}^{m} x_i \bar{a}'_i\right) = 0$.

— Si $\bar{b} \notin L(\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\})$ el sistema es incompatible y se tendrá que $d(\bar{b}, \bar{y}) > 0 \ \forall \bar{y} \in L(\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\})$. En este caso es posible determinar el único vector $\bar{b}' \in L(\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\})$ que menos dista del vector $\bar{b}$. Además, dicho vector $\bar{b}'$ se expresará en la base $F = \{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\}$ del subespacio vectorial $L(F)$ como $\bar{b}' = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{a}'_i$.

Definición 8.1

La n-tupla $(y_1, y_2, ..., y_n)$ se denomina solución aproximada o solución en mínimos cuadrados del sistema.

Ejercicio 14

Determinar la solución aproximada del sistema incompatible de ecuaciones lineales expresado matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

El sistema se expresa vectorialmente en la forma:

$$x_1 \bar{a}'_1 + x_2 \bar{a}'_2 = \bar{b}$$

en donde $\bar{a}_1' = (-1, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$, $\bar{a}_2' = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ y $\bar{b} = (0, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$. Observemos que $\{\bar{a}_1', \bar{a}_2'\}$ es un sistema libre.

En $\mathbb{R}^4$ consideramos definido el producto escalar usual y mediante el proceso de ortogonalización de GRAM-SCHMIDT determinamos una base ortogonal $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ del subespacio vectorial $S = L(\{\bar{a}_1', \bar{a}_2'\})$:

$$\bar{v}_1 = \bar{a}_1' = (-1, 0, 1, 1)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{a}_2' - \frac{\langle \bar{a}_2', \bar{v}_1 \rangle}{\| \bar{v}_1 \|^2} \cdot \bar{v}_1 = (1, 1, 1, 1) - \frac{1}{3}(-1, 0, 1, 1) = \left(\frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

El vector $\bar{b}' \in S$ que menos dista del vector $\bar{b}$ (es decir, la mejor aproximación $\bar{b}'$ de $\bar{b}$ en S) viene explicitado por la suma de FOURIER de $\bar{b}$ respecto del sistema ortogonal $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$:

$$\bar{b}' = \frac{\langle \bar{b}, \bar{v}_1 \rangle}{\| \bar{v}_1 \|^2} \cdot \bar{v}_1 + \frac{\langle \bar{b}, \bar{v}_2 \rangle}{\| \bar{v}_2 \|^2} \cdot \bar{v}_2$$

Operando se obtiene:

$$\bar{b}' = \left(\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{7}{11}, \frac{7}{11} \right)$$

La solución aproximada (y_1, y_2) del sistema se obtiene determinando las coordenadas de $\bar{b}' \in S$ respecto de la base $\{\bar{a}_1', \bar{a}_2'\}$ de S. Es decir:

$$y_1 \bar{a}_1' + y_2 \bar{a}_2' = \bar{b} \Leftrightarrow y_1 (-1, 0, 1, 1) + y_2 (1, 1, 1, 1) = \left(\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, \frac{7}{11}, \frac{7}{11} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y_1 + y_2 = -\dfrac{3}{11} \\ y_2 = \dfrac{5}{11} \\ y_1 + y_2 = \dfrac{7}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{2}{11} \\ y_2 = \dfrac{5}{11} \end{cases}$$

Luego la solución aproximada del sistema viene dada por:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{2}{11} \\ y_2 = \dfrac{5}{11} \end{cases}$$

Tema VII

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Matrices cuadradas diagonalizables

1. VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UNA MATRIZ CUADRADA

Sea una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$.

Definiciones 1.1 y 1.2

Se llama valor propio, autovalor o valor característico de A a todo escalar λ para el que existe al menos una matriz columna $X \in M_{n \times 1}(K) - \{(0)_{n \times 1}\}$ que cumple $A X = \lambda X$.

A toda matriz columna X que cumple $A X = \lambda X$ se le llama vector propio, autovector o vector característico de A asociado al valor propio λ.

Observación

En los términos de las definiciones anteriores está también generalizado el decir que la n-tupla $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in K^n$ asociada a la matriz columna X es un vector propio asociado al valor propio λ. En adelante utilizaremos indistintamente ambas expresiones.

Definición 1.3

El conjunto de valores propios de la matriz A se denomina espectro de A y se representa por $\sigma(A)$.

2. PROPIEDADES DE LOS VALORES PROPIOS. SUBESPACIOS PROPIOS

Sea una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$.

Proposición 2.1

1) Todo vector propio X de A está asociado a un único valor propio λ.

2) $V(\lambda) \cup \{(0)_{n \times 1}\}$, donde $V(\lambda)$ es el conjunto de los vectores propios asociados al valor propio λ, es un subespacio vectorial del K-espacio vectorial $M_{n \times 1}(K)$.

3) Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de A, entonces $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \varnothing$.

4) Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ son valores propios distintos de A, entonces el sistema de vectores propios $\{X_1, X_2, ..., X_m\} \subset M_{n \times 1}(K)$ asociados respectivamente a cada uno de ellos es libre.

5) Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ son valores propios distintos de A, entonces el subespacio suma de los subespacios propios asociados correspondientes es suma directa.

Demostración

1) Sea X vector propio asociado a dos valores propios distintos λ_1, λ_2. Entonces:

$$\begin{aligned} AX = \lambda_1 X \wedge AX = \lambda_2 X &\Rightarrow \lambda_1 X = \lambda_2 X \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) X = (0)_{n \times 1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \end{aligned}$$

2) $V(\lambda) \cup \{(0)_{n \times 1}\} \neq \varnothing$ y $V(\lambda) \cup \{(0)_{n \times 1}\} \subseteq V$. Además $\forall \alpha, \beta \in K \wedge \forall X, Y \in V(\lambda) \cup \{(0)_{n \times 1}\}$:

$$A(\alpha X + \beta Y) = \alpha AX + \beta AY = \lambda(\alpha X + \beta Y) \Rightarrow \alpha X + \beta Y \in V(\lambda) \cup \{(0)_{n \times 1}\}$$

Y de aquí la conclusión.

3) Consecuencia inmediata de 1) (por reducción al absurdo).

4) Supongamos que $\{X_1, X_2, ..., X_m\}$ es un sistema ligado y que sin pérdida de generalidad $\{X_1, X_2, ..., X_r\}$ es un sistema libre tal que $X_m \in L(\{X_1, X_2, ..., X_r\})$. Entonces:

$$X_m = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_r X_r \Rightarrow AX_m = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_r X_r) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_m X_m = \lambda_1 \alpha_1 X_1 + \lambda_2 \alpha_2 X_2 + ... + \lambda_r \alpha_r X_r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_m (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_r X_r) = \lambda_1 \alpha_1 X_1 + \lambda_2 \alpha_2 X_2 + ... + \lambda_r \alpha_r X_r$$

Por tanto:

$$\alpha_1 (\lambda_m - \lambda_1) X_1 + \alpha_2 (\lambda_m - \lambda_2) X_2 + ... + \alpha_r (\lambda_m - \lambda_r) X_r = (0)_{n \times 1}$$

De esta igualdad, de la independencia lineal del sistema de vectores $\{X_1, X_2, ..., X_r\}$ y de que los λ sean todos distintos se concluye que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$. Lo que es una contradicción porque entonces X_m sería un vector propio nulo.

Y de aquí la conclusión.

5) Sea una matriz columna

$$X \in V(\lambda_1) \cup \{(0)_{n \times 1}\} + V(\lambda_2) \cup \{(0)_{n \times 1}\} + ... + V(\lambda_m) \cup \{(0)_{n \times 1}\}$$

y consideremos dos descomposiciones de X en suma de vectores pertenecientes a los subespacios $V(\lambda_i) \cup \{(0)_{n \times 1}\} / i = 1, 2, ..., m$.

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_m = X'_1 + X'_2 + ... + X'_m$$

Restando ordenadamente ambas descomposiciones obtenemos

$$(X_1 - X'_1) + (X_2 - X'_2) + ... + (X_m - X'_m) = (0)_{n \times 1}$$

Lo que, teniendo en cuenta que si $X_i \neq X'_i$ las matrices $X_i - X'_i$ son vectores propios asociados a valores propios distintos, estaría en contradicción con su independencia lineal demostrada en 4).

Y de aquí la conclusión.

Definición 2.1

Al subespacio $V(\lambda) \cup \{(0)_{n \times 1}\}$ se le llama subespacio propio asociado al valor propio λ.

En adelante escribiremos abreviadamente $V(\lambda)$.

En este momento es interesante realizar el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1

Hallar los valores propios y subespacios propios de las siguientes matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compárense los resultados y búsquese una explicación mediante las interpretaciones gráficas de las transformaciones en $\mathbb{R}^2$ asociadas a dichas matrices.

Proposición 2.2

$$\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Demostración

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\Leftrightarrow \exists X \in M_{n\times 1}(K) - \{(0)_{n\times 1}\} / AX = \lambda X \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists X \in M_{n\times 1}(K) - \{(0)_{n\times 1}\} / (A - \lambda I_n) X = (0)_{n\times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Definiciones 2.2 y 2.3

Al polinomio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, de orden n en la variable λ, se le denomina polinomio característico de la matriz A.

A la ecuación $\det(A - \lambda I_n) = 0$ se le llama ecuación característica de la matriz A.

En consecuencia, los valores propios de la matriz A son los ceros de su polinomio característico.

Definición 2.4

Si un escalar λ es raíz de multiplicidad k de la ecuación característica de A, se dice que λ es valor propio de orden k de la matriz A.

En caso de que $k = 1$ se dice que λ es un valor propio simple.

Observaciones

1) En caso de que K sea un cuerpo algebraicamente cerrado (en particular, si $K = \mathbb{C}$) el polinomio característico de A es factorizable de la forma

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k1} (\lambda - \lambda_2)^{k2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{kr}$$

donde $k1 + k2 + \dots + kr = n$ y los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ de órdenes respectivos k1, k2, ..., kr.

2) Para todo valor propio de A existen dos números naturales asociados a él:

—el orden de multiplicidad k del valor propio.
—la dimensión d del subespacio propio asociado.

3) Llamando d1, d2, ..., dr a las dimensiones de los subespacios propios asociados a los valores propios de A, son evidentes las siguientes desigualdades:

$$r \leq k1 + k2 + \dots + kr \leq n$$
$$r \leq d1 + d2 + \dots + dr \leq n$$

Definición 2.5

Dos matrices $A, B \in M_{n \times n}(K)$ se dice que son semejantes si y sólo si existe una matriz regular $P \in R_{n \times n}(K)$ tal que $B = P^{-1} AP$.

Proposición 2.3

Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Demostración

$$\det(B - \lambda I_n) = \det(P^{-1} AP - \lambda P^{-1} I_n P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \det(P) =$$
$$= \det(A - \lambda I_n)$$

Consecuencia

Dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios con los mismos órdenes de multiplicidad.

Proposición 2.4

Si λ_o es un valor propio de A de orden k_o, entonces $\dim V(\lambda_o) \leq k_o$.

Demostración

Sea $d = \dim V(\lambda_o)$ y $\{X_1, X_2, ..., X_d\}$ una base de $V(\lambda_o)$. Construyamos una matriz P regular tal que sus primeras d columnas sean X_1, X_2, ..., X_d. Entonces se cumple la relación matricial $AP = PB$, donde

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_o I_d & \vdots & B_1 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & B_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto A y B son matrices semejantes con polinomio característico $p(\lambda) = (\lambda_o - \lambda)^d \det(B_2 - \lambda I_{n-d})$ y λ_o es valor propio de A y B con orden de multiplicidad $k_o \geq d$.

Consecuencia

Si el espectro de la matriz A es $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\}$, el número máximo de vectores propios de A linealmente independientes es $d1 + d2 + + ... + dr$ y se cumplen las siguientes desigualdades

$$r \leq d1 + d2 + ... + dr \leq k1 + k2 + ... + kr \leq n$$

3. TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Sea una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$.

Definición 3.1

Se llama matriz adjunta característica de la matriz A a la matriz $B_A(\lambda)$ adjunta de la matriz $A - \lambda I_n$.

Proposición 3.1

Sea λ_o un valor propio de A. Entonces:

1) $(A - \lambda_o I_n) B_A(\lambda_o) = \det(A - \lambda_o I_n) I_n$.
2) Las columnas no nulas de la matriz $B_A(\lambda_o)$ son vectores propios de A asociados al valor propio λ_o.

Demostración

1) Es aplicación inmediata del correspondiente resultado obtenido en el tema 4 (Matrices inversibles).

2) $\lambda_o \in \sigma(A) \Rightarrow (A - \lambda_o I_n)\, B_A(\lambda_o) = \det(A - \lambda_o I_n)\, I_n = 0 \cdot I_n = (0)_{n \times n} \Rightarrow$
$\Rightarrow A \cdot B_A(\lambda_o) = \lambda_o \cdot B_A(\lambda_o)$.

Por tanto, para toda columna X de la matriz $B_A(\lambda_o)$ se cumple $AX = \lambda_o X$ y de aquí la conclusión.

Proposición 3.2 (Teorema de CAYLEY-HAMILTON)

Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de la matriz A.
Entonces $p(A) = (0)_{n \times n}$.

Demostración

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_o$$

Además, la matriz $B_A(\lambda)$ tiene como elementos a los adjuntos de la matriz $A - \lambda I_n$ que son polinomios en λ de grado menor o igual que $n - 1$ y por tanto, será de la forma:

$$B_A(\lambda) = B_{n-1} \lambda^{n-1} + B_{n-2} \lambda^{n-2} + \ldots + B_1 \lambda + B_o$$

con B_i / $0 \leq i \leq n - 1$ matrices cuadradas de orden n e independientes de λ.

Entonces:

$$(A - \lambda I_n)\, B_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n))\, I_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A - \lambda I_n)(B_{n-1} \lambda^{n-1} + B_{n-2} \lambda^{n-2} + \ldots + B_1 \lambda + B_o) =$$
$$= [(-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_o]\, I_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -B_{n-1} = (-1)^n I_n \\ A B_{n-1} - B_{n-2} = a_{n-1} I_n \\ A B_{n-2} - B_{n-3} = a_{n-2} I_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A B_1 - B_0 = a_1 I_n \\ A B_0 = a_0 I_n \end{cases}$$

Multiplicando estas igualdades por: A^n, A^{n-1}, ..., A e I_n respectivamente, se obtienen:

$$\begin{array}{llll} & & -A^n B_{n-1} = (-1)^n A^n \\ A^n & B_{n-1} - A^{n-1} B_{n-2} = a_{n-1} A^{n-1} \\ A^{n-1} & B_{n-2} - A^{n-2} B_{n-3} = a_{n-2} A^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^2 & B_1 & -A & B_0 = a_1 A \\ A & B_0 & & = a_0 I_n \end{array}$$

Sumando estas igualdades queda:

$$[0]_{n \times n} = (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_o I_n$$

es decir:

$$p(A) = [0]_{n \times n}$$

Ejercicio 2

Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Hallar el valor de los siguientes polinomios en A y A^{-1}:

1) $q_1(A) = A^6 + 2A^5 - A^4 - A^3 - A$.
2) $q_2(A) = A^{-1}$.
3) $q_3(A^{-1}) = 2A^{-4} + A^{-3} - 2A^{-2} - I_3$.

Solución

Sea $q(\lambda)$ un polinomio en λ con coeficientes reales, $p(\lambda)$ el polinomio característico de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ y $r(\lambda)$ el resto resultante de divi-

dir q (λ) por p (λ). Entonces, como consecuencia del Teorema de Cayley-Hamilton.

$$q(\lambda) = p(\lambda)\ c(\lambda) + r(\lambda) \Rightarrow q(A) = p(A)\ c(A) + r(A) = r(A)$$

Esta idea es muy útil para el cálculo del valor de un polinomio cualquiera q (λ) cuando se sustituye λ por A. Apliquémoslo a este ejercicio:

$$p(\lambda) = \text{Det}\,(A - \lambda I_3) = -(\lambda^2 - 1)(\lambda + 2) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$$

1) $q_1(\lambda) = p(\lambda)(-1 - \lambda^3) + r_1(\lambda)$ donde $r_1(\lambda) = -2\lambda^2 + 2$.
Por tanto

$$q_1(A) = p(A)(-A^3 - I_3) + r_1(A) = r_1(A) = -2A^2 + 2I_3$$

Calculando A^2 y sustituyendo tenemos

$$q_1(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

2) $p(A) = A^3 + 2A^2 - A - 2I_3 = (0)_{3\times 3} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 + 2A - I_3)$.

Sustituyendo, tenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3) Hallando ahora el polinomio característico de A^{-1} y procediendo como en el apartado 1) tenemos:

$$q_3(A^{-1}) = A^{-1} - I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4. POLINOMIO MINIMO DE UNA MATRIZ CUADRADA

Sea una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$.

Definición 4.1

A un polinomio $m(\lambda)$ de grado mínimo que cumple que $m(A) = (0)_{n \times n}$ y cuyo coeficiente principal es la unidad se le llama polinomio mínimo de A.

Proposición 4.1

Sea $p_1(\lambda)$ un polinomio de grado menor o igual que n y $m_1(\lambda)$, $m_2(\lambda)$ polinomios mínimos de A, entonces:

1.º) $p_1(A) = (0)_{n \times n} \Leftrightarrow m_1(\lambda) / p_1(\lambda)$ ($m_1(\lambda)$ divide a $p_1(\lambda)$)
2.º) $m_1(\lambda) = m_2(\lambda)$

Demostración

1º) Si se divide $p_1(\lambda)$ entre $m_1(\lambda)$ se tiene:

$$p_1(\lambda) = c(\lambda) \cdot m_1(\lambda) + r(\lambda)$$

con $r(\lambda) = 0$ ó grado de $r(\lambda)$ menor que grado de $m_1(\lambda)$, por lo que

$$p_1(A) = c(A) \cdot m_1(A) + r(A) = c(A) \cdot (0)_{n \times n} + r(A) = r(A)$$

Entonces:

$$p_1(A) = [0]_{n \times n} \Leftrightarrow r(A) = (0)_{n \times n} \overset{\text{gr } r(\lambda) < \text{gr } m_1(\lambda)}{\Leftrightarrow} r(\lambda) = 0 \Leftrightarrow m_1(\lambda) / p_1(\lambda)$$

En particular como $p(A) = [0]_{n \times n}$ siendo $p(\lambda)$ el polinomio característico de A, se cumple que el polinomio mínimo divide al polinomio característico.

2.º) Como $m_1(A) = m_2(A) = [0]_{n \times n}$, por 1.º) se tiene que: $m_1(\lambda) / m_2(\lambda) \wedge m_2(\lambda) / m_1(\lambda)$, son de igual grado y tienen el mismo coeficiente principal, luego $m_1(\lambda) = m_2(\lambda)$.

Definición 4.2

Sea $B_A(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))_{n \times n}$ la matriz adjunta característica de A y $\delta(\lambda)$ el máximo común divisor de los polinomios $b_{ij}(\lambda)$. Se llama matriz adjunta reducida de la matriz A a la matriz

$$C_A(\lambda) = (c_{ij}(\lambda))_{n \times n} = \delta(\lambda)^{-1} B_A(\lambda)$$

Proposición 4.2

Sean $p(\lambda)$, $m(\lambda)$ y $\delta(\lambda)$ según definidos anteriormente. Entonces:

1.º) $m'(\lambda) = p(\lambda) \cdot \delta(\lambda)^{-1}$ es igual a $m(\lambda)$ salvo un factor escalar.
2.º) $p(\lambda)$ y $m(\lambda)$ tienen los mismos ceros aunque posiblemente con distinto orden de multiplicidad.

Demostración

1.º)

$$(A - \lambda I_n) \cdot B_A(\lambda) = p(\lambda) I_n \Rightarrow (A - \lambda I_n) \cdot B_A(\lambda) = \delta(\lambda) \cdot m'(\lambda) I_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (A - \lambda I_n) \cdot \delta(\lambda) \cdot C_A(\lambda) = \delta(\lambda) \cdot m'(\lambda) I_n \overset{\delta(\lambda) \neq 0}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow (A - \lambda I_n) \cdot C_A(\lambda) = m'(\lambda) I = m'(A) = (0)_{n \times n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m(\lambda) / m'(\lambda)$$

Por otra parte, consideramos el polinomio $m(\lambda) - m(\mu)$ que es una suma de términos de la forma $c_i(\lambda^i - \mu^i)$ y cada uno de los cuales es divisible por $\mu - \lambda$. Por tanto,

$$m(\lambda) - m(\mu) = (\mu - \lambda)\, k(\lambda, \mu) \overset{\text{sustituyendo } \lambda \text{ por } \lambda I_n \text{ y } \mu \text{ por } A}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow m(\lambda I_n) - m(A) = (A - \lambda I_n)\, k(\lambda I_n, A) \overset{m(A) = (0)_{n \times n}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow m(\lambda I_n) = m(\lambda) I_n = (A - \lambda I_n)\, k(\lambda I_n, A) \overset{\text{multiplicando por } B_A(\lambda)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow m(\lambda) B_A(\lambda) = B_A(\lambda)(A - \lambda I_n)\, k(\lambda I_n, A) = p(\lambda)\, k(\lambda I_n, A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m(\lambda) \delta(\lambda) C_A(\lambda) = m'(\lambda) \delta(\lambda)\, k(\lambda I_n, A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m(\lambda) C_A(\lambda) = m'(\lambda)\, k(\lambda I_n, A)$$

Luego m'(λ) divide a todo elemento de la matriz m(λ) . $C_A(\lambda)$ y como el m.c.d. de los elementos de $C_A(\lambda)$ es 1, se cumplirá que: m'(λ)/m(λ).

De m(λ)/m'(λ) y de m'(λ)/m(λ) se llega a que m(λ) y m'(λ) = $\frac{p(\lambda)}{\delta(\lambda)}$ coinciden y p(λ) = m(λ) δ(λ), salvo un escalar.

2.º) m(λ)/p(λ), luego si λ_o es cero de m(λ), es decir si $m(\lambda_o) = 0$, se cumplirá que $p(\lambda_o) = 0$ y λ_o será cero de p(λ).

$$(A - \lambda I_n)\, C_A(\lambda) = m(\lambda) I_n \overset{\text{tomando determinantes}}{\Rightarrow} p(\lambda)\, \det(C_A(\lambda)) = [m(\lambda)]^n.$$

Luego si λ_o es cero de p(λ), se cumplirá que $[m(\lambda_o)]^n = 0$ y por tanto $m(\lambda_o) = 0$, con lo que λ_o será cero de m(λ).

Ejercicio 3

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Hallar p(λ), $B_A(\lambda)$, δ(λ), m(λ) y $C_A(\lambda)$.

Solución

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -4 \\ 1 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = (1-\lambda)^3$$

$$B_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & -4\lambda + 4 \\ \lambda - 1 & (\lambda-1)^2 & -2\lambda + 2 \\ \lambda - 1 & 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) \end{pmatrix}$$

$\delta(\lambda) = \lambda - 1$

$$m'(\lambda) = \frac{(1-\lambda)^3}{\lambda - 1} = -\frac{(\lambda-1)^3}{\lambda - 1} = -(\lambda-1)^2$$

entonces: $m(\lambda) = (\lambda - 1)^2$.

Los ceros de $p(\lambda) \wedge m(\lambda)$ son respectivamente:

$$\lambda_1 = 1 \text{ de orden } k_1 = 3 \wedge \lambda_1 = 1 \text{ de orden } k_1' = 2$$

$$C_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda - 1 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$C_A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Además, $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vector propio asociado a $\lambda_1 = 1$, es decir:

$$V(1) = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \subset M_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

5. MATRICES CUADRADAS DIAGONALIZABLES

Sea una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(K)$.

Definición 5.1

La matriz A se dice diagonalizable si y sólo si existe una matriz P regular tal que $D = P^{-1}AP$ sea diagonal (esto es, que exista una matriz diagonal D semejante a A).

Proposición 5.1

La matriz A es diagonalizable si y sólo si existe una base de $M_{n \times 1}(K)$ formada por vectores propios de A.

Demostración

A diagonalizable $\Leftrightarrow \exists\ P \in R_{n \times n}(K)/D = P^{-1}AP$ diagonal $\Leftrightarrow$ $AP = PD \Leftrightarrow \exists\ P \in M_{n \times n}(K)$ tal que sus columnas constituyen una base de $M_{n \times 1}(K)$ formada por vectores propios de A.

Consecuencias

1) Si el espectro de la matriz A es $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\}$, los ordenes de multiplicidad de los valores propios son $k_1, k_2, ..., k_n$ respectivamente, y $d_1, d_2, ..., d_r$ son las dimensiones de los subespacios propios asociados, tenemos que:

$$\text{A diagonalizable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) } k_1 + k_2 + ... + k_r = n \\ \text{b) } d_i = k_i,\ \forall\ i \in \{1, 2, ..., r\} \end{cases}$$

2) En tal caso la matriz diagonalizada de A, única salvo permutaciones en los valores propios, es

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \overset{k_1}{\dots}, \lambda_1, \lambda_2, \overset{k_2}{\dots}, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \overset{k_r}{\dots}, \lambda_r) = P^{-1}AP$$

y si los subespacios propios respectivamente asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ son:

$$\begin{aligned} V(\lambda_1) &= L(\{X_{11}, X_{12}, ..., X_{1\,k_1}\}) \\ V(\lambda_2) &= L(\{X_{21}, X_{22}, ..., X_{2\,k_2}\}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ V(\lambda_r) &= L(\{X_{r1}, X_{r2}, ..., X_{r\,k_r}\}) \end{aligned}$$

la matriz P tiene por columnas los n vectores propios linealmente independientes

$$X_{11}, ..., X_{1\,k_1}, X_{21}, ..., X_{2\,k_2}, ..., X_{r\,1}, ..., X_{r\,k_r}$$

en este orden.

Ejercicio 4

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Hallar los valores propios y los subespacios propios de A. ¿Es A diagonalizable?

Solución

Formamos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

Luego los valores propios de A son:

$\lambda_1 = -2$ de orden $k_1 = 2$

$\lambda_2 = 4$ de orden $k_2 = 1$

—Hallaremos una base del subespacio propio V(–2).

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I)X = [0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Luego las soluciones vienen dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

con lo que:

$$V(-2) = \{(\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)/\alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \\ = L(\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\})$$

y $B_1 = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ base de $V(-2) \wedge d_1 = \dim [V(-2)] = 2$

—Hallaremos una base del subespacio propio V(4).

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow (A - \lambda_2 I)X = [0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Luego las soluciones vienen dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 2\alpha \end{cases} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

con lo que:

$$V(4) = \{(\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha(1, 1, 2)/\alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1, 2)\})$$

y $B_2 = \{(1, 1, 2)\}$ base de $V(4) \wedge d_2 = \dim [V(4)] = 1$

Como $\begin{cases} k_1 = d_1 = 2 \wedge k_2 = d_2 = 1 \\ \wedge \\ k_1 + k_2 = 3 \end{cases}$ se cumple que A es diagonalizable, $B = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 2)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A y $\exists$ la matriz:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} / P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

Hallar los valores propios y los subespacios propios de A. ¿Es diagonalizable?

Solución

Formamos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^2 \cdot (\lambda-4)$$

Luego los valores propios de A son:

$\lambda_1 = -2$ de orden $k_1 = 2$

$\lambda_2 = 4$ de orden $k_2 = 1$

—Hallaremos una base del subespacio propio V(–2).

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I)X = [0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Luego las soluciones vienen dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

con lo que:

$$V(-2) = \{(\alpha, \alpha, 0) = \alpha(1, 1, 0)/\ \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1, 0)\})$$

y $B_1 = \{(1, 1, 0)\}$ base de $V(-2) \wedge d_1 = \dim [V(-2)] = 1$

—Hallaremos una base del subespacio propio V(4).

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow (A - \lambda_2 I)X = [0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -7x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Luego las soluciones vienen dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

con lo que:

$$V(4) = \{(0, \alpha, \alpha) = \alpha(0, 1, 1)/\ \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 1, 1)\})$$

y $B_2 = \{(0, 1, 1)\}$ base de $V(4) \wedge d_2 = \dim [V(4)] = 1$

Observamos que: $k_1 = 2 \neq d_1 = 1$, luego A no es diagonalizable.

Ejercicio 6

Demostrar que la matriz A no es diagonalizable en $\mathbb{R}^4$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalizarla en $\mathbb{C}^4$.

Solución

Formamos el polinomio característico

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 2-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1)$$

Los valores propios de A son:

$\lambda_1 = 1$ de orden $k_1 = 2$
$\lambda_2 = i$ de orden $k_2 = 1$
$\lambda_3 = -i$ de orden $k_3 = 1$

Como sólo dos de ellos son reales, A no es diagonalizable en $\mathbb{R}^4$.
Para diagonalizar A en $\mathbb{C}^4$:

—Hallaremos una base y la dimensión del subespacio propio V(1).

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow (A - \lambda_1 I)X = [0] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 - 5x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_2 + 2x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

Luego las soluciones vienen dadas por: $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha + \beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

con lo que:

$$V(1) = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta, \beta) = \alpha(1, 0, 1, 0) + \beta(0, 1, 1, 1)/\alpha, \beta \in \mathbb{C}\} =$$
$$= L(\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\})$$

y $B_1 = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\}$ base de $V(1) \wedge d_1 = \dim [V(1)] = 2$

—Hallaremos una base y la dimensión del subespacio propio V(i).

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow (A - \lambda_2 I)X = [0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4-i & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 2-i & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-i)x_1 = 0 \\ x_1 + (-4-i)x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + (2-i)x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_2 + (3-i)x_4 = 0 \end{cases}$$

Luego las soluciones vienen dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = (3-i)\alpha \\ x_3 = (-1+i)\alpha \\ x_4 = 2\alpha \end{cases} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$$

con lo que:

$$V(i) = \{(0, (3-i)\alpha, (-1+i)\alpha, 2\alpha) = \alpha(0, 3-i, -1+i, 2)/\alpha \in \mathbb{C}\} =$$
$$= L(\{(0, 3-i, -1+i, 2)\})$$

y $B_2 = \{(0, 3-i, -1+i, 2)\}$ base de $V(i) \wedge \dim [V(i)] = 1 = d_2$

—Hallaremos una base y la dimensión del subespacio propio V(–i).

$$AX = \lambda_3 X \Leftrightarrow (A - \lambda_3 I)X = [0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4+i & -1 & 6 \\ -1 & 3 & 2+i & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 3+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (1+i)x_1 = 0 \\ x_1 + (-4+i)x_2 - x_3 + 6x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 + (2+i)x_3 - 4x_4 = 0 \\ -2x_2 + (3+i)x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

Luego las soluciones vienen dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = (3 + i)\alpha \\ x_3 = (-1 - i)\alpha \\ x_4 = 2\alpha \end{cases} \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$$

con lo que:

$$V(-i) = \{(0, (3 + i)\alpha, (-1 - i)\alpha, 2\alpha) = \alpha(0, 3 + i, -1 - i, 2)/\alpha \in \mathbb{C}\} = \\ = L(\{(0, 3 + i, -1 - i, 2)\})$$

y $B_3 = \{(0, 3 + i, -1 - i, 2)\}$ base de $V(-i) \wedge d_3 = \dim [V(-i)] = 1$

Entonces existe la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 - i & 3 + i \\ 1 & 1 & -1 + i & -1 - i \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} / P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

Sea $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ una matriz que admite los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 \wedge \lambda_3 = -1$ y que tiene por vectores propios correspondientes a ellos a: $\bar{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{u}_2 = (0, 1, 2)$ y $\bar{u}_3 = (1, 2, 1)$ respectivamente. Obtener la matriz diagonal D y la matriz regular P tales que $D = P^{-1}AP$. Hallar A.

Solución

Los tres valores propios λ_1, $\lambda_2 \wedge \lambda_3$ de A son distintos, luego es diagonalizable y su forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Además los vectores propios $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2 \wedge \bar{u}_3$ son linealmente independientes luego forman una base de $\mathbb{R}^3$ y la matriz regular $P/P^{-1}AP = D$ es:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8

Hallar los valores de a, b $\wedge$ c para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \text{ sea diagonalizable}$$

Solución

El polinomio característico de A es:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 1 \\ 0 & 1-\lambda & b \\ 0 & 0 & c-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(c-\lambda)$$

Los valores propios de A son: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ de orden } k_1 = 2 \\ \lambda_2 = c \text{ de orden } k_2 = 1 \end{cases}$

—Hallaremos el subespacio propio V(1) asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$.

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow (A - I)X = [0] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax_2 + x_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \\ (c-1)x_3 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Para resolver el sistema (1) vamos a considerar los casos siguientes:

1) $c = 1 \wedge a = 0$

$$(1) \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_3 = 0$$

$$V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

y por tanto $d_1 = \dim V(1) = 2$.

Como la dimensión de V(1) es $d_1 = 2$ y en este caso, al ser c = 1, el orden de $\lambda_1 = 1$ es $k_1 = 3$, se cumplirá que A no es diagonalizable.

2) $c = 1 \wedge a \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} ax_2 + x_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2-a) } b = 0 \Rightarrow V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta/a \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1/a \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/a \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \wedge d_1 = \dim V(1) = 2$$

2-b) $b \neq 0 \Rightarrow x_3 = 0 \wedge x_2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \wedge d_1 = \dim V(1) = 1$$

Luego en cualquier caso es $d_1 = \dim V(1) \leq 2$ y por tanto es distinta del orden de multiplicidad de $\lambda_1 = 1$ que es $k_1 = 3$, con lo que A no es diagonalizable.

3) $c \neq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} ax_2 + x_3 = 0 \\ bx_3 = 0 \\ (c-1)x_3 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

3-a) $a = 0 \Rightarrow V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \wedge d_1 = \dim V(1) = 2$$

3-b) $a \neq 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \wedge d_1 = \dim V(1) = 1 \neq k_1 = 2,$$

con lo que A no es diagonalizable.

—Hallaremos el subespacio propio V(c) asociado al valor propio c en el caso 3) $c \neq 1$.

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow (A - cI)X = [0] \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-c & a & 1 \\ 0 & 1-c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-c)x_1 + ax_2 + x_3 = 0 \\ (1-c)x_2 + bx_3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

3-a) $a = 0$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (1-c)x_1 + x_3 = 0 \\ (1-c)x_2 + bx_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{1-c}x_3 \\ x_2 = -\dfrac{b}{1-c}x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(c) = \left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{1-c}\alpha \\ -\dfrac{b}{1-c}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{1-c} \\ -\dfrac{b}{1-c} \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{1-c} \\ -\dfrac{b}{1-c} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \wedge d_2 = \dim V(c) = 1 = k_2$$

Luego en este caso:

$$3\text{-a) } c \neq 1,\ a = 0 \wedge \forall\, b \in \mathbb{R}$$

se cumplen $d_1 = \dim V(1) = 2 = k_1 \wedge d_2 = \dim V(c) = 1 = k_2$.

Con lo que A es diagonalizable.

6. DIAGONALIZACION DE MATRICES CUADRADAS REALES SIMETRICAS

Proposición 6.1

Sea una matriz simétrica $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ tal que todos sus elementos son números reales, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ valores propios de A, y $X_1, X_2 \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$ vectores propios asociados respectivamente a λ_1, λ_2. Entonces, se cumple que $(\lambda_1 - \lambda_2)X_1^T X_2 = 0$.

Demostración

λ_1, λ_2 valores propios de A, y X_1, X_2 vectores propios asociados respectivamente a $\lambda_1 \wedge \lambda_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lambda_1 X_1 = AX_1 \wedge \lambda_2 X_2 = AX_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 X_2^T X_1 = X_2^T AX_1 \wedge \lambda_2 X_1^T X_2 = X_1^T AX_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 X_2^T X_1 = X_2^T AX_1 \wedge (\lambda_2 X_1^T X_2)^T = (X_1^T AX_2)^T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 X_2^T X_1 = X_2^T AX_1 \wedge \lambda_2 X_2^T X_1 \overset{A = A^T}{=} X_2^T AX_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1 X_2^T X_1 = \lambda_2 X_2^T X_1 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) X_2^T X_1 = 0$$

Proposición 6.2

Sea una matriz simétrica $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ tal que todos sus elementos son números reales. Todos los valores propios de A son números reales.

Demostración

Demostrémoslo por reducción al absurdo.

Supongamos que $\lambda \neq \overline{\lambda}$, es decir λ complejo y no real.

Como λ valor propio de A: $\exists\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq [0]_{n \times 1}$ vector propio de A tal que $AX = \lambda X$.

Además el número complejo $\overline{\lambda}$ tal que $\lambda \neq \overline{\lambda}$ también sería valor propio de A pues:

Por ser A real, todos los coeficientes de la ecuación característica son reales y si ésta tiene como raíz al número complejo λ tiene también como raíz a su conjugado $\overline{\lambda}$.

Por otra parte:

$$AX = \lambda X \Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda X} \overset{A = \bar{A}}{\Rightarrow} A\overline{X} = \overline{\lambda}\overline{X} \Rightarrow \overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} \neq [0]_{n \times 1}$$

vector propio correspondiente al valor propio $\overline{\lambda}$.

Entonces:

$\lambda \wedge \overline{\lambda}$ valores propios de A y $X \wedge \overline{X}$ vectores propios asociados respectivamente a λ y $\overline{\lambda}$. Entonces, considerando la proposición anterior:

$$(\lambda - \overline{\lambda})\overline{X}^T X = 0 \overset{\lambda \neq \overline{\lambda}}{\Rightarrow} \overline{X}^T X = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \overline{x}_1 x_1 + \overline{x}_2 x_2 + \ldots + \overline{x}_n x_n =$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Rightarrow X = (0)_{n \times 1},$$

lo que va en contra de que $X \neq (0)_{n \times 1}$ vector propio de A asociado al valor propio λ. Y de aquí la conclusión.

Proposición 6.3 (Teorema espectral)

Toda matriz real simétrica es diagonalizable mediante una matriz P ortogonal.

Demostración

Sea X_1 un vector propio de A asociado a un valor propio λ_1 y con norma unidad. Formemos una matriz ortogonal $P_1 \in O_{n \times n}(\mathbb{R})$ cuya primera columna sea X_1. Entonces:

$AP_1 = P_1A_1$ donde la matriz A_1 es de la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & B_1 \end{pmatrix}$$

En efecto, la primera columna de A_1 es consecuencia de $AX_1 = \lambda_1 X_1$. Además $A_1 = P_1^{-1}AP_1 = P_1^TAP_1$ es simétrica y por tanto A_1 es de la forma indicada, con B_1 simétrica.

Aplicando este razonamiento a $B_1 \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ real y simétrica obtenemos una matriz P_2 y una matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & & \vdots & B_2 \end{pmatrix}$$

tal que $A_2 = P_2^TA_1P_2$ con $P_2 \in O_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortonormal y $B_2 \in M_{(n-2)\times(n-2)}(\mathbb{R})$ real simétrica.

Aplicando este razonamiento recursivamente obtendremos la igualdad matricial $D = P^TAP$ donde $P = P_1 \cdot P_2 \ldots P_n$ es una matriz ortogonal, por ser el producto de matrices ortogonales.

Y de aquí la conclusión.

Consecuencias

1) Los subespacios propios de una matriz real simétrica A son todos ortogonales entre sí.
2) Las columnas de P constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A.

Cuando se diagonaliza una matriz real simétrica mediante una matriz P ortogonal se denomina diagonalización ortogonal.

Ejercicio 9

Sea la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$

Diagonalizar ortogonalmente A.

Solución

$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^4 - 32\lambda^2 + 256 = 0$

Los valores propios de A son:

$\lambda_1 = 4$ de orden $k_1 = 2$

$\lambda_2 = -4$ de orden $k_2 = 2$

Asociado al valor propio $\lambda_1 = 4$ se obtiene el subespacio propio $V(4) = L(\{\bar{u}_1 = (1, 0, 1, 0), \bar{u}_2 = (0, 1, 0, 1)\})$.

Asociado al valor propio $\lambda_2 = -4$ se obtiene el subespacio propio $V(-4) = L(\{\bar{u}_3 = (1, 0, -1, 0), \bar{u}_4 = (0, 1, 0, -1)\})$.

Observamos que $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ pues evidentemente se cumplen:

$$\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle = 0, \langle \bar{u}_1, \bar{u}_3 \rangle = 0, \langle \bar{u}_1, \bar{u}_4 \rangle = 0, \langle \bar{u}_2, \bar{u}_3 \rangle = 0,$$
$$\langle \bar{u}_2, \bar{u}_4 \rangle = 0, \langle \bar{u}_3, \bar{u}_4 \rangle = 0$$

y por tanto:

$$B' = \left\{ \bar{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \bar{v}_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \bar{v}_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \right.$$
$$\left. \bar{v}_4 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}$$

es una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

Entonces:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

y además

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

es una matriz ortogonal tal que $D = P^{-1}AP = P^{T}AP$.

Ejercicio 10

Diagonalizar ortogonalmente la matriz real simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

obteniendo una matriz ortogonal P que permita expresar $D = P^{T}AP$.

Solución

La ecuación característica de A es:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) = 0$$

Los valores propios de A son:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ de orden } k_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \text{ de orden } k_2 = 1 \end{cases}$$

—Hallaremos el subespacio propio V(2) correspondiente al valor propio $\lambda_1 = 2$.

$$AX = \lambda_1 X \Leftrightarrow (A - 2I)X = [0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Luego

$$V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \wedge \dim V(2) = d_1 = 2$$

—Hallaremos el subespacio propioV(4) correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 4$.

$$AX = \lambda_2 X \Leftrightarrow (A - 4I)X = [0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

Luego

$$V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{ U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \wedge \dim V(4) = d_2 = 1$$

Observamos que $B = \{U_1, U_2, U_3\}$ es base ortogonal de $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ pues $\langle U_1, U_2 \rangle = \langle U_1, U_3 \rangle = \langle U_2, U_3 \rangle = 0$ y por tanto:

$$B' = \left\{ U_1' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, U_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, U_3' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

base ortonormal de $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

Luego la forma diagonal de A es:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = P^T A P$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

Ejercicio 11

Sea $\lambda \neq 0$ valor propio de una matriz inversible $A \in M_{n \times n}(K)$. Demostrar que λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.

Solución

$$\lambda \neq 0 \text{ valor propio de } A \Rightarrow \exists\, X \neq (0)_{n \times 1} / AX = \lambda X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, X \neq (0)_{n \times 1} / A^{-1}AX = \lambda A^{-1}X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, X \neq (0)_{n \times 1} / \lambda^{-1}X = \lambda^{-1}\lambda \,.\, A^{-1}X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists\, X \neq (0)_{n \times 1} / A^{-1}X = \lambda^{-1}X,$$

luego λ^{-1} es valor propio de A^{-1}.

Ejercicio 12

Sean dos matrices $A \wedge B \in M_{n \times n}(K)$. Demostrar que A . B y B . A tienen los mismos valores propios no nulos.

Solución

Sea $\lambda \neq 0$ valor propio de A . B $\Rightarrow \exists\, X \neq (0)_{n \times 1} / ABX = \lambda X$.

Hacemos $BX = Y$ y como $\lambda \neq 0 \wedge X \neq (0)_{n \times 1}$ será:

$$AY = ABX = \lambda X \neq (0) \underset{n \times 1}{\Rightarrow} Y \neq (0)_{n \times 1}$$

Pero Y es vector propio de BA correspondiente al valor propio λ pues:

$$BAY = BABX = B\lambda X = \lambda BX = \lambda Y$$

Luego λ es valor propio de BA.

Análogamente se prueba que cualquier valor propio distinto de cero de BA es también valor propio de AB, con lo que AB $\wedge$ BA tienen los mismos valores propios.

Ejercicio propuesto

Consideremos una matriz real simétrica $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ con tres valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tal que

$$V(\lambda_1) = L(\{1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0)\}), V(\lambda_2) = L(\{(1, 0, 0, -1)\})$$

y

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) Hallar $V(\lambda_3)$.
2) Hallar los valores propios de A.
3) Hallar la matriz D diagonal y una matriz P ortogonal tales que $D = P^T AP$.

Tema VIII

Formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$

1. FORMAS BILINEALES EN $\mathbb{R}^n$. EXPRESION MATRICIAL

Definición 1.1

Se llama forma bilineal en $\mathbb{R}^n$ a toda aplicación f: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que cumple:

$$f(\overline{x} + \overline{y}, \overline{z}) = f(\overline{x}, \overline{z}) + f(\overline{y}, \overline{z}) \qquad \forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\alpha\overline{x}, \overline{y}) = \alpha f(\overline{x}, \overline{y}) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) = f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{x}, \overline{z}) \qquad \forall\, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\overline{x}, \alpha\overline{y}) = \alpha f(\overline{x}, \overline{y}) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$$

Definición 1.2

Una forma bilineal f: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama simétrica si cumple que:

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = f(\overline{y}, \overline{x}) \qquad \forall\, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$$

Expresión matricial y matriz de una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$

Sea una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y representemos por las n tuplas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(y_1, y_2, ..., y_n)$ a las coordenadas respectivas de dos vectores cualesquiera $\bar{x}$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ en la base B. Entonces:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{e}_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(\bar{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \bar{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) =$$

$$= (x_1\ x_2\ ...\ x_n) \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) & ... & f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) & ... & f(\bar{e}_2, \bar{e}_n) \\ ..... & & & \\ f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_n, \bar{e}_2) & ... & f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \forall\, \bar{x}, \bar{y} \in V$$

Esta expresión se llama representación matricial de la forma bilineal f respecto de la base B.

La matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) & ... & f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) & ... & f(\bar{e}_2, \bar{e}_n) \\ ..... & & & \\ f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_n, \bar{e}_2) & ... & f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{pmatrix}$$

se llama matriz de la forma bilineal f respecto de la base B.

2. FORMAS CUADRATICAS EN $\mathbb{R}^n$

Sea $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica.

Definición 2.1

Se llama forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$ asociada a la forma bilineal simétrica f a toda aplicación $\omega: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\omega(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) \qquad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$$

Toda forma bilineal simétrica f define una única forma cuadrática y veremos que toda forma cuadrática puede definirse mediante una única forma bilineal simétrica.

Proposición 2.1

Sea ω: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática asociada a una forma bilineal simétrica f. Entonces:

1) $\omega(\alpha\bar{x}) = \alpha^2\omega(\bar{x})$ $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$
2) $\omega(\bar{0}) = 0$
3) $\omega(\bar{x} + \bar{y}) = \omega(\bar{x}) + \omega(\bar{y}) + 2f(\bar{x}, \bar{y})$ $\forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

Demostración

1) $\omega(\alpha\bar{x}) = f(\alpha\bar{x}, \alpha\bar{x}) = \alpha^2 f(\bar{x}, \bar{x}) = \alpha^2\omega(\bar{x})$
2) $\omega(\bar{0}) = f(\bar{0}, \bar{0}) = 0$
3) $\omega(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = \omega(\bar{x}) + f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{x}) + \omega(\bar{y}) =$
$= \omega(\bar{x}) + \omega(\bar{y}) + 2f(\bar{x}, \bar{y})$

De aquí se deduce que f es única pues

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}\,[\omega(\bar{x} + \bar{y}) - \omega(\bar{x}) - \omega(\bar{y})]$$

3. EXPRESION MATRICIAL DE UNA FORMA CUADRATICA

Sea una forma cuadrática ω: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ asociada a una forma bilineal simétrica f y consideremos una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

$\forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i$ y por tanto:

$$\omega(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)\begin{pmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_2, \bar{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_n, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= X^T A X \in \mathbb{R}$$

Definición 3.1

A la matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ f(\bar{e}_2, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_2, \bar{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & f(\bar{e}_n, \bar{e}_2) & \dots & f(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{pmatrix}$ se le llama *matriz asociada a la forma cuadrática* ω *respecto de la base B.*

Definición 3.2

A la igualdad $\omega(\bar{x}) = X^T A X \ \forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se le llama expresión matricial de la forma cuadrática ω respecto de la base B.

Proposición 3.1

Si $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ y $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, ..., \bar{e}'_n\}$ son bases de $\mathbb{R}^n$ y $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ y $A' = [a'_{ij}]_{n \times n}$ son las matrices asociadas a una forma cuadrática ω: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en las bases B y B′ respectivamente, se cumple que: $A' = P^T A P$.

Siendo $P = [p_{ij}]_{n \times n} \in R_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz de cambio de coordenadas al pasar de B a B'.

Demostración

$$\forall\ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ es } \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i \quad \text{y} \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x'_i \bar{e}'_i$$

La expresión matricial de ω en la base B es $\omega(\bar{x}) = X^T A X$, donde $X^T = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)$.

La expresión matricial de ω en la base B' es $\omega(\bar{x}) = X'^T A' X'$, donde $X'^T = (x'_1\ x'_2\ ...\ x'_n)$.

Además, al pasar de B a B' se cumple que: $X = PX'$.

Entonces:

$$\omega(\bar{x}) = X^T A X = (PX')^T A (PX') = X'^T (P^T A P) X' = X'^T A' X' \ \Rightarrow\ A' = P^T A P$$

Es decir, A y A' son matrices congruentes. (Existe P regular, tal que $A' = P^T AP$).

Nota

Dos matrices congruentes tienen el mismo rango.

Ejercicio 1

Sea una forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\omega(\overline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 \ \forall\ \overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Hallar la matriz A y la expresión matricial de ω en la base canónica B de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar la matriz A' y la expresión matricial de ω en la base $B' = \{\overline{e}'_1 = (1, 0, 0), \overline{e}'_2 = (1, 1, 0), \overline{e}'_3 = (1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

c) Hallar una matriz $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ que cumpla la igualdad $A' = P^T AP$.

Solución

a) Sean $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3), \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = \frac{1}{2}\,[\omega(\overline{x} + \overline{y}) - \omega(\overline{x}) - \omega(\overline{y})] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + 3(x_3 + y_3)^2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) +$$

$$+ 2(x_1 + y_1)(x_3 + y_3) + 3(x_2 + y_2)(x_3 + y_3) -$$

$$- x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 - 3x_2x_3 -$$

$$- y_1^2 - y_2^2 - 3y_3^2 - y_1y_2 - 2y_1y_3 - 3y_2y_3] =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 + 3x_3y_3 + \frac{1}{2}\,x_1y_2 + \frac{1}{2}\,x_2y_1 +$$

$$+ x_1y_3 + x_3y_1 + \frac{3}{2}\,x_3y_2 + \frac{3}{2}\,x_2y_3.$$

La matriz asociada a ω en la base canónica B será la matriz asociada a f.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $\omega(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$ para hallar la matriz asociada a una forma cuadrática no es necesario repetir este proceso, basta con colocar debidamente los coeficientes de la expresión $\omega(\bar{x})$.

—Los coeficientes de los términos cuadrados en la diagonal principal.

—$\frac{1}{2}$ de los coeficientes de los términos rectangulares, de forma simétrica en la fila y en la columna correspondientes.

b)

$$A' = \begin{pmatrix} f(\bar{e}_1', \bar{e}_1') & f(\bar{e}_1', \bar{e}_2') & f(\bar{e}_1', \bar{e}_3') \\ f(\bar{e}_2', \bar{e}_1') & f(\bar{e}_2', \bar{e}_2') & f(\bar{e}_2', \bar{e}_3') \\ f(\bar{e}_3', \bar{e}_1') & f(\bar{e}_3', \bar{e}_2') & f(\bar{e}_3', \bar{e}_3') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 & \frac{11}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{11}{2} & 11 \end{pmatrix}$$

c) Evidentemente $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cumple que $P^TAP = A'$

4. DIAGONALIZACION ORTOGONAL DE UNA FORMA CUADRATICA. DESCOMPOSICION EN SUMA DE CUADRADOS

Sea el espacio vectorial euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$, donde $\langle , \rangle$ es el producto escalar usual y $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Consideremos una forma cuadrática ω: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cuya expresión matricial en la base B será:

$$\omega(\bar{x}) = X^T A X \qquad \forall\, \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$$

siendo $X^T = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$ y $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ real y simétrica.

Diagonalización ortogonal de la forma cuadrática ω

Como A real y simétrica es ortogonalmente diagonalizable y existe una base ortonormal $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, formada por vectores propios de A, respecto de la que la matriz asociada a la forma cuadrática ω es:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = P^T A P$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son los valores propios de A y $P \in R_{n \times n}(\mathbb{R})$ es la matriz de cambio de coordenadas al pasar de B a B'.

Entonces:

$$\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ es } \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i' \bar{u}_i \quad \text{y} \quad \omega(\bar{x}) = X'^T D X' = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \ldots + \lambda_n x_n'^2$$

A esta igualdad se le llama expresión normal de ω y es única, salvo el orden de los valores propios, lo mismo que la matriz D.

Diagonalizar ortogonalmente la forma cuadrática ω, consiste en hallar las matrices D y P, así como la expresión normal.

Descomposición de la forma cuadrática ω en sumas de cuadrados

Se verá que $\forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se puede expresar $\omega(\bar{x})$ como suma algebraica de cuadrados de expresiones lineales independientes en las coordenadas de $\bar{x}$.

Esta expresión de $\omega(\overline{x})$ se puede buscar por diferentes métodos, pero aquí se hará utilizando la diagonalización ortogonal de ω.

$$\forall\, \overline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ es: } \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \overline{u}_i$$

En la base ortonormal $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ la expresión matricial de ω es:

$$\omega(\overline{x}) = X^T A X$$

donde $X^T = (x_1\ x_2\ ...\ x_n)$ y $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ real y simétrica.

En la base ortonormal $B' = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$, formada por vectores propios de A, la expresión matricial de ω es:

$$\omega(\overline{x}) = X'^T D X' = \lambda_1 x'^2_1 + \lambda_2 x'^2_2 + ... + \lambda_n x'^2_n \qquad (1)$$

donde $X'^T = (x'_1\ x'_2\ ...\ x'_n)$ y $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

con $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ valores propios de A.

Además, al pasar de B a B' se cumple que:

$$X = PX'$$

donde $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ es la matriz ortogonal de cambio de coordenadas, al pasar de B a B'.

Entonces:

$$X = PX' \iff X' = P^T X$$

Que desarrollando queda:

$$x'_i = p_{1i}x_1 + p_{2i}x_2 + ... + p_{ni}x_n \qquad \forall\, i = 1, 2, ..., n$$

Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$\omega(\overline{x}) = \lambda_1(p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + \ldots + p_{n1}x_n)^2 + \lambda_2(p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + \ldots + \\ + p_{n2}x_n)^2 + \ldots + \lambda_n(p_{1n}x_1 + p_{2n}x_2 + \ldots + p_{nn}x_n)^2$$

Esta expresión es la descomposición de ω en suma de cuadrados.

Las combinaciones lineales son independientes, pues sus coeficientes son los elementos de la matriz P, que es inversible.

Ejercicio 2

Sea la forma cuadrática ω: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\omega(\overline{x}) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 \qquad \forall\, \overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

a) Diagonalizar ortogonalemente ω.

b) Descomponer ω en suma de cuadrados.

Solución

a) La matriz asociada a ω en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

Su ecuación característica: $|A - \lambda I| = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$ y los valores propios son:

$$\lambda_1 = 7 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = 2$$

Los subespacios propios correspondientes son:

$$V(7) = L(\{(1, -2)\}) = L\left(\left\{\overline{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\right\}\right)$$

$$V(2) = L(\{(2, 1)\}) = L\left(\left\{\overline{u}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}\right)$$

Luego la matriz de ω en la base ortonormal $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es:

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = P^T A P, \text{ donde } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

En dicha base ω se expresa por:

$$\omega(\bar{x}) = 7x_1'^2 + 2x_2'^2 \qquad (1)$$

siendo (x_1', x_2') las coordenadas del vector $\bar{x}$ en la base $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$.

b)

$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^T X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} x_2 \\ x_2' = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2 \end{cases}$$

Sustituyendo en (1), queda:

$$\omega(\bar{x}) = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} x_2\right)^2 + 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2\right)^2$$

que es la descomposición de ω en suma de cuadrados.

Ejercicio 3

Sea la forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\omega(\bar{x}) = 7x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \qquad \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Diagonalizar ortogonalmente ω.
b) Descomponer ω en suma de cuadrados.

Solución

a) La matriz asociada a ω es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La ecuación característica:

$$|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 92\lambda + 160 = 0$$

y los valores propios son: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 8$.
Los subespacios propios correspondientes:

$$V(4) = L(\{(0, 1, -1)\}) = L\left(\left\{\bar{u}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\right)$$

$$V(5) = L(\{(1, 1, 1)\}) = L\left(\left\{\bar{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}\right)$$

$$V(8) = L(\{(-2, 1, 1)\}) = L\left(\left\{\bar{u}_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}\right)$$

Luego, la matriz de ω en la base ortonormal $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ es:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = P^T A P, \text{ donde } P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

En dicha base ω se expresa por:

$$\omega(\bar{x}) = 4x_1'^2 + 5x_2'^2 + 8x_3'^2 \qquad (1)$$

siendo (x_1', x_2', x_3') las coordenadas del vector $\bar{x}$ en la base $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

b)

$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^T X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3 \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3 \\ x_3' = -\frac{2}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3 \end{cases}$$

Sustituyendo en (1) queda:

$$\omega(\bar{x}) = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3\right)^2 +$$
$$+ 8\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}x_3\right)^2$$

5. CLASIFICACION DE LAS FORMAS CUADRATICAS

Sea ω: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática.

Definición 5.1

La forma cuadrática ω se llama *definida* cuando $\omega(\overline{x}) = 0$ únicamente para $\overline{x} = \overline{0}$.

Proposición 5.1

Si ω es una forma cuadrática definida, entonces, $\omega(\overline{x})$ tiene signo constante $\forall\ \overline{x} \in \mathbb{R}^n - \{\overline{0}\}$.

Demostración

Supongamos que siendo ω definida existen dos vectores $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n - \{\overline{0}\}$ tales que $\omega(\overline{x}) > 0$ y $\omega(\overline{y}) < 0$.

Sea λ un número real cualquiera. Calculemos $\omega(\lambda\overline{x} + \overline{y})$

$$\omega(\lambda\overline{x} + \overline{y}) = f(\lambda\overline{x} + \overline{y}, \lambda\overline{x} + \overline{y}) = \lambda^2\omega(\overline{x}) + 2\lambda f(\overline{x}, \overline{y}) + \omega(\overline{y})$$

$\omega(\lambda\overline{x} + \overline{y}) = 0 \iff \lambda$ es raíz de la ecuación

$$\lambda^2\omega(\overline{x}) + 2\lambda f(\overline{x}, \overline{y}) + \omega(\overline{y}) = 0$$

cuyo discriminante es:

$$4f^2(\overline{x}, \overline{y}) - 4\omega(\overline{x})\omega(\overline{y}) > 0$$

pues $\omega(\overline{x})\omega(\overline{y}) < 0$

Por tanto, $\exists\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tales que $\omega(\lambda_1\overline{x} + \overline{y}) = 0$ y $\omega(\lambda_2\overline{x} + \overline{y}) = 0$ y al menos uno de los dos no nulo.

Luego, existe al menos un vector no nulo que anula ω, lo que va en contra de que ω es definida.

Definición 5.2

Sea ω: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida

ω es definida positiva cuando $\omega(\overline{x}) > 0 \ \forall \ \overline{x} \in \mathbb{R}^n - \{\overline{0}\}$.

ω es definida negativa cuando $\omega(\overline{x}) < 0 \ \forall \ \overline{x} \in \mathbb{R}^n - \{\overline{0}\}$.

Definición 5.3

Sea ω: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ no definida

ω es semidefinida positiva cuando $\omega(\overline{x}) \geq 0 \ \forall \ \overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

ω es semidefinida negativa cuando $\omega(\overline{x}) \leq 0 \ \forall \ \overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Hay formas cuadráticas que no son definidas ni semidefinidas.

Así, por ejemplo:

ω: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\omega(\overline{x}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \qquad \forall \ \overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

no es definina, ni semidefinida pues:

para $\overline{x} = (0, 2, 1)$ es $\omega(\overline{x}) = -3$ y

para $\overline{x} = (2, 1, 0)$ es $\omega(\overline{x}) = 3$

Definición 5.4

Se llama *rango* de la forma cuadrática ω y se representa por $r(\omega)$, al rango de cualquiera de las matrices, reales y simétricas, asociadas a ω en las distintas bases de $\mathbb{R}^n$. (Todas con el mismo rango).

Por tanto, el rango de ω será el número de elementos no nulos de la matriz diagonal D asociada a ω, en la base $B' = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & d_r & \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$

$\omega(\overline{u}_i) = d_i \neq 0$, para $i = 1, 2, ..., r$

$\omega(\overline{u}_i) = 0$, para $i = r + 1, ..., n$

Evidentemente: $0 \leq r(\omega) \leq n$.

Definición 5.5

Se llama *signatura* de la forma cuadrática ω y se representa por $\text{sig}(\omega)$, al par (p, q), donde p es el número de elementos positivos y q el número de elementos negativos que tiene la diagonal principal de la matriz D asociada a ω en la base $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$.

Evidentemente: $p + q = r(\omega)$.

Proposición 5.2

De lo expuesto anteriormente se deduce que:

a) ω definida positiva $\Leftrightarrow$ $\text{sig}(\omega) = (n, 0)$.

b) ω definida negativa $\Leftrightarrow$ $\text{sig}(\omega) = (0, n)$.

c) ω semidefinida positiva $\Leftrightarrow$ $\text{sig}(\omega) = (r, 0) \wedge r = r(\omega) < n$.

d) ω semidefinida negativa $\Leftrightarrow$ $\text{sig}(\omega) = (0, r) \wedge r = r(\omega) < n$.

Nota

Conviene precisar que los productos escalares en $\mathbb{R}^n$ coinciden con las formas bilineales simétricas en $\mathbb{R}^n$ tal que las formas cuadráticas asociadas sean definidas positivas.

Ejercicio 4

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y consideremos la forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es A.

a) Hallar $\omega(\bar{x})$ $\forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

b) Diagonalizar ortogonalmente ω.

c) Clasificar ω, según los valores de α.

Solución

a)

$$\omega(\bar{x}) = X^T A X = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + (1+\alpha)x_3^2 + 2\alpha x_1 x_2 - 2\alpha x_1 x_3 \ \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

b) $|A - \lambda I| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + (-3 + 3\alpha^2)\lambda + (1 - 3\alpha^2) = 0$
Los valores propios de A son:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 1 + \alpha\sqrt{3}, \qquad \lambda_3 = 1 - \alpha\sqrt{3}$$

Los subespacios propios correspondientes son:

$$V(1) = L(\{(1, 1, 1)\}) = L\left(\left\{\bar{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}\right)$$

$$V(1 + \alpha\sqrt{3}) = L\left(\left\{\left(1, \frac{1}{1 + \sqrt{3}}, \frac{1}{1 - \sqrt{3}}\right)\right\}\right) =$$

$$= L\left(\left\{\bar{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3} + 3}, \frac{1}{\sqrt{3} - 3}\right)\right\}\right)$$

$$V(1 - \alpha\sqrt{3}) = L\left(\left\{\left(1, \frac{1}{1 - \sqrt{3}}, \frac{1}{1 + \sqrt{3}}\right)\right\}\right) =$$

$$= L\left(\left\{\bar{u}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3} - 3}, \frac{1}{\sqrt{3} + 3}\right)\right\}\right)$$

Luego la matriz de ω en la base ortonormal $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ es:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha\sqrt{3} \end{pmatrix} = P^T A P,$$

$$\text{con } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3} + 3} & \frac{1}{\sqrt{3} - 3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3} - 3} & \frac{1}{\sqrt{3} + 3} \end{pmatrix} \text{ ortogonal}$$

En dicha base, ω se expresa por:

$$\omega(\bar{x}) = x_1'^2 + (1 + \alpha\sqrt{3})x_2'^2 + (1 - \alpha\sqrt{3})x_3'^2$$

siendo (x_1', x_2', x_3') las coordenadas del vector $\bar{x}$ en la base $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

c) Como $1 + \alpha\sqrt{3} = 0$ para $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y

$$1 - \alpha\sqrt{3} = 0 \text{ para } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

podemos distinguir los casos siguientes:

1) $\alpha < -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} + & & \\ & - & \\ & & + \end{pmatrix}$, sig(ω) = (2, 1) y ω indefinida.

2) $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} + & & \\ & 0 & \\ & & + \end{pmatrix}$, sig(ω) = (2, 0) y ω semidefinida positiva.

3) $\alpha \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & + \end{pmatrix}$, sig(ω) = (3, 0) y ω definida positiva.

4) $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, sig(ω) = (2, 0) y ω semidefinida positiva.

5) $\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & - \end{pmatrix}$, sig(ω) = (2, 1) y ω indefinida.

Ejercicio 5

Sea la forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\omega(\bar{x}) = \alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + (\alpha - 1)x_3^2 + 2x_1x_2 \qquad \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

a) Diagonalizar ortogonalmente ω.
b) Descomponer ω en suma de cuadrados.
c) Hallar r(ω), sig(ω) y clasificar ω, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución

a) La matriz de ω en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = (\alpha - 1 - \lambda)[\lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 - 1)] = 0$$

Los valores propios son:
$\lambda_1 = \alpha + 1$ de orden $k_1 = 1$
$\lambda_2 = \alpha - 1$ de orden $k_2 = 2$
Los subespacios propios correspondientes son:

$$V(\alpha + 1) = L(\{(1, 1, 0)\}) = L\left(\left\{\bar{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}\right)$$

$$V(\alpha - 1) = L(\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}) =$$
$$= L\left(\left\{\bar{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \bar{u}_3 = (0, 0, 1)\right\}\right)$$

Luego la matriz de ω en la base ortonormal $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ es:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} = P^T A P, \text{ con } P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En dicha base, ω se expresa por:

$$\omega(\bar{x}) = (\alpha + 1)x_1'^2 + (\alpha - 1)x_2'^2 + (\alpha - 1)x_3'^2 \qquad (1)$$

siendo (x_1', x_2', x_3') las coordenadas del vector $\bar{x}$ en la base $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.

b)

$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^T X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \\ x_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2 \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

Sustituyendo en (1) queda:

$$\omega(\bar{x}) = (\alpha + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2\right)^2 + (\alpha - 1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2\right)^2 +$$

$$+ (\alpha - 1) x_3^2 \quad \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

c) $\alpha + 1 = 0$ para $\alpha = -1$

$\alpha - 1 = 0$ para $\alpha = 1$

podemos distinguir los casos siguientes:

1) $\alpha < -1 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} - & & \\ & - & \\ & & - \end{pmatrix}$, $r(\omega) = 3$, $sig(\omega) = (0, 3)$ y ω definida negativa.

2) $\alpha = -1 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & - & \\ & & - \end{pmatrix}$, $r(\omega) = 2$, $sig(\omega) = (0, 2)$ y ω semidefinida negativa.

3) $\alpha \in (-1, 1) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} + & & \\ & - & \\ & & - \end{pmatrix}$, $r(\omega) = 3$, $sig(\omega) = (1, 2)$ y ω indefinida.

4) $\alpha = 1 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} + & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, $r(\omega) = 1$, $sig(\omega) = (1, 0)$ y ω semidefinida positiva.

5) $\alpha > 1 \Rightarrow D = \begin{pmatrix} + & & \\ & + & \\ & & + \end{pmatrix}$, $r(\omega) = 3$, $sig(\omega) = (3, 0)$ y ω definida positiva.

Ejercicio propuesto

Sea la forma cuadrática ω: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\omega(\bar{x}) = 4x_1^2 + 2(\alpha - 1)x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 \qquad \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

a) Hallar la matriz A de ω en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.
b) Hallar la forma bilineal simétrica f a la que está asociada ω.
c) Diagonalizar ortogonalmente ω.
d) Clasificar ω, según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tema IX

El plano afín ordinario

1. EL PLANO AFIN ORDINARIO

Definición 1.1

Decimos que un conjunto E_2 está dotado de una estructura de espacio afín asociado al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ si se define una aplicación $f: E_2 \times E_2 \to \mathbb{R}^2$ tal que cumpla los siguientes axiomas:

i) $\forall P \in E_2, \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^2 : \exists Q \in E_2 / f(P, Q) = \bar{v}$.
ii) $\forall P, Q \in E_2 / f(P, Q) = \bar{0} : P = Q$.
iii) $\forall P, Q, R \in E_2 : f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ (Relación de CHASLES).

E_2 recibe entonces el nombre de plano afín ordinario y los elementos de E_2 se llaman puntos. Convendremos en denotar $f(P, Q) = \overline{PQ}$ y diremos que P es el origen y Q el extremo del vector $\overline{PQ} \in \mathbb{R}^2$.

De esta definición se deducen sin dificultad las siguientes propiedades que nos recuerdan las estructuras lógico-matemáticas de trabajo en el plano físico.

1.ª $\forall P \in E_2 : \overline{PP} = \bar{0}$.
2.ª $\overline{PQ} = \bar{0} \Rightarrow P = Q$.
3.ª $\forall P, Q \in E_2 : \overline{QP} = -\overline{PQ}$.

Además, desde un punto $P \in E_2$, nos trasladamos mediante un vector $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ a otro punto $Q \in E_2$ único, tal que $\overline{PQ} = \bar{v}$. Esto se representa alternativamente por $Q = P + \bar{v}$. Con esta notación se demuestra que

4.ª $\forall P \in E_2, \forall \bar{v}, \bar{w} \in E_2 : P + (\bar{v} + \bar{w}) = (P + \bar{v}) + \bar{w}$.

2. SISTEMAS DE REFERENCIA CARTESIANOS. COORDENADAS DE UN PUNTO

Definición 2.1

Llamamos sistema de referencia cartesiano en el plano afín ordinario E_2 a un par $R = (O, B)$ formado por un punto $O \in E_2$ y una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^2$.

Al punto $O \in E_2$ se le denomina origen del sistema de referencia $\mathbb{R}$.

Definición 2.2

Llamamos coordenadas cartesianas de un punto $P \in E_2$ respecto al sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ a las coordenadas del vector $\overline{OP} \in \mathbb{R}^2$ respecto a la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ asociada a $\mathbb{R}$.

Según esto, $P = O + \overline{OP} = O + x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ donde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ son las coordenadas cartesianas del punto $P \in E_2$ en el sistema de referencia $R = (O, B)$, y cuando no haya lugar a confusión escribiremos abreviadamente $P(x_1, x_2)$.

Ejercicio 1

Consideremos dos sistemas de referencia cartesianos $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ y $R' = (O', B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$ del plano afín ordinario tal que $O'(a_1, a_2)$ en el sistema de referencia R y $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ es la matriz del cambio de coordenadas de la base B a la base B' de $\mathbb{R}^2$. Hallar la relación matricial entre las matrices columna de las coordenadas cartesianas de un punto $P \in E_2$ en los sistemas de referencia R y R'.

Solución

Sea $P(x_1, x_2)$ en el sistema de referencia R y $P(x'_1, x'_2)$ en el sistema de referencia R'. Entonces haciendo uso de la relación de CHASLES tenemos:

$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad matricial debe entenderse en la base B asociada al sistema de referencia R y por tanto $x''_1, x''_2 \in \mathbb{R}$ representan las coordenadas del vector $\overline{O'P}$ en la base B de $\mathbb{R}^2$.

Teniendo ahora en cuenta que el vector $\overline{O'P}$ tiene por coordenadas en la base B' asociada a R' las coordenadas del punto $P \in E_2$ en el sistema de referencia R', y haciendo uso de la matriz A del cambio de coordenadas de la base B a la base B' tenemos:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

que es la relación buscada.

3. RECTAS EN EL PLANO AFIN ORDINARIO

Definición 3.1

Consideremos un punto $A \in E_2$ del plano afín ordinario y un subespacio vectorial W de dimensión uno del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ asociado. Llamamos recta que pasa por el punto A y tiene dirección W, al conjunto de puntos

$$L = \{A + \overline{x} / \overline{x} \in W\} \subset E_2$$

que se representa abreviadamente por L = A + W.

Como vemos en la definición, al subespacio vectorial W le llamamos dirección de la recta L y a un vector cualquiera de W no nulo (base de W) le llamamos vector director de L.

Observación

Se puede demostrar que para definir la recta L = A + W se puede tomar en general cualquier punto de L. Asimismo, sabemos que W queda determinado por una cualquiera de sus bases. De esta forma para la definición de una recta L en el plano afín ordinario tenemos una libertad infinita de elección tanto del punto como del vector director.

Definición 3.2

Elegido un sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\})$ en el plano afín ordinario, llamamos ejes de referencia correspondientes al sistema de referencia R a las rectas $O + L(\{\overline{e}_1\})$ y $O + L(\{\overline{e}_2\})$.

4. ECUACIONES VECTORIAL, PARAMETRICAS Y CARTESIANA DE UNA RECTA EN EL PLANO AFIN ORDINARIO

Consideremos una recta $L = A + W$ del plano afín ordinario en el que suponemos elegido un sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$.

Sea $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ un vector director de L tal que $W = L(\{\bar{w}\})$ y P un punto genérico de E_2. Entonces:

$$P \in A + W \Leftrightarrow \overline{AP} \in W \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} / \overline{AP} = \lambda \,.\, \bar{w} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P = A + \lambda \,.\, \bar{w} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Definición 4.1

Llamamos ecuación vectorial de la recta $L = A + W$ que pasa por el punto $A \in E_2$ y tiene dirección W a la expresión

$$P = A + \lambda \,.\, \bar{w} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

donde $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ es un vector director de L.

Observación

Nótese que la ecuación vectorial de una recta no depende del sistema de referencia R elegido.

Supongamos ahora $P(x_1, x_2)$, $A(a_1, a_2)$ y $\bar{w}(w_1, w_2)$ en el sistema de referencia cartesiano R elegido y en la base B asociada respectivamente. Entonces:

$$P = A + \lambda\bar{w} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{AP} = \lambda\bar{w} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \overset{\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \overline{OP} = \overline{OA} + \lambda\bar{w} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda w_2 \end{matrix}\right\} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Definición 4.2

Llamamos ecuaciones paramétricas de la recta L = A + W en el sistema de referencia cartesiano R = (O, B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$) a las expresiones

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda w_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Observación

A diferencia de la ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas de una recta dependen del sistema de referencia R elegido. Esto se hace evidente por la aparición explícita en dichas ecuaciones de las coordenadas del punto A $\in E_2$ así como del vector director $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ en el sistema de referencia R y en la base B asociada.

Eliminando ahora, en el sistema de ecuaciones paramétricas de la recta L respecto del sistema de referencia R, el parámetro indeterminado $\lambda \in \mathbb{R}$ obtendremos una ecuación del tipo

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

que establece la condición necesaria y suficiente para que un punto $P(x_1, x_2)$ del plano afín ordinario pertenezca a la recta L.

Definición 4.3

A la expresión $ax_1 + bx_2 + c = 0$ así obtenida la llamamos ecuación cartesiana de la recta L = A + W en el sistema de referencia cartesiano R.

Observación

También la ecuación cartesiana de la recta L depende del sistema de referencia elegido R.

Ejercicio 2

Realizar la transformación razonada de las ecuaciones paramétricas de una recta L = A + W a la ecuación cartesiana en el sistema de referencia R = (O, B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$) y viceversa.

Solución

1) Consideremos las ecuaciones paramétricas de L en R:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda w_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Despejando formalmente λ en ambas ecuaciones e igualando tenemos:

$$\lambda = \frac{x_1 - a_1}{w_1} = \frac{x_2 - a_2}{w_2} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

De la observación de este resultado tenemos los siguientes casos:

a) $w_1 \neq 0 \wedge w_2 \neq 0$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda w_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda = \frac{x_1 - a_1}{w_1} = \frac{x_2 - a_2}{w_2} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 - a_1}{w_1} = \frac{x_2 - a_2}{w_2}$$

que es la ecuación cartesiana de L respecto a R en este caso, y simplemente operando y reordenando términos queda en su forma general.

b) $w_1 \neq 0 \wedge w_2 = 0$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda w_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \underset{w_2 = 0}{\Leftrightarrow} \left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 &= a_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x_2 = a_2$$

que es la ecuación cartesiana de L respecto a R, en este caso ya en su forma general.

c) $w_1 = 0 \wedge w_2 \neq 0$. Entonces un desarrollo análogo a b) nos da $x_1 = a_1$ como ecuación cartesiana de L respecto a R, en este caso.

2) Consideremos la ecuación cartesiana de L respecto a R en su forma general

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

Entonces, uno de los coeficientes al menos debe ser distinto de cero. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que es $b \neq 0$. Entonces:

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = \dfrac{-ax_1 - c}{b} \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda \\ x_2 = -\dfrac{c}{b} - \dfrac{a}{b}\lambda \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

De la observación de este resultado deducimos inmediatamente que $(-b, a) \in \mathbb{R}^2$ es un vector director de la recta L en el sistema de referencia R.

Observación

Cuando la recta L está definida por dos puntos distintos A, $B \in E_2$, el vector $\overline{AB} \in \mathbb{R}^2$ es vector director de la recta L y entonces queda

$$L = A + L(\{\overline{AB}\})$$

Haciendo uso de esta observación se deducen con facilidad las distintas ecuaciones de la recta L, definida por dos puntos distintos.

5. PARALELISMO DE RECTAS EN EL PLANO AFIN ORDINARIO

Definición 5.1

Dos rectas L = A + W y L' = A' + W' se dice que son paralelas en el plano afín ordinario si sus direcciones son iguales, es decir W = W', y lo representaremos $L \parallel L'$.

Observaciones

1) Toda recta es paralela a sí misma.
2) Dos rectas L y L' son paralelas si y sólo si sus vectores directores son proporcionales.

Ejercicio 3

Deducir la condición de paralelismo entre dos rectas dadas por sus ecuaciones cartesianas respectivas respecto a un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ en su forma general.

Solución

Sean las ecuaciones cartesianas respectivas en el sistema de referencia R:

$$L)\ ax_1 + bx_2 + c = 0 \qquad L')\ a'x_1 + b'x_2 + c' = 0$$

Según el ejercicio anterior tenemos unos vectores directores respectivos de L y L'

$$\bar{w}(-b, a) \in \mathbb{R}^2 \qquad \bar{w}'(-b', a') \in \mathbb{R}^2$$

en la base B asociada al sistema de referencia R.

Aplicando ahora la condición de paralelismo tenemos la condición buscada:

$$\begin{aligned} L \parallel L' &\Leftrightarrow L(\{\bar{w}\}) = L'(\{\bar{w}'\}) \overset{\bar{w} \neq \bar{0} \wedge \bar{w}' \neq \bar{0}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \bar{w}' = \lambda \,.\, \bar{w} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (b', a') = \lambda \,.\, (b, a) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

6. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO AFIN ORDINARIO

Consideremos las rectas L y L' de ecuaciones cartesianas respectivas

$$L)\ ax_1 + bx_2 + c = 0 \qquad L')\ a'x_1 + b'x_2 + c' = 0$$

en el sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ del plano afín ordinario.

Proposición 6.1

Considerando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

tenemos:

1) $L \cap L' = \varnothing \Leftrightarrow r(A) = 1 \neq 2 = r(B)$. (L y L' no tienen ningún punto común).
2) $L \cap L' = P \Leftrightarrow r(A) = 2 = r(B)$. (L y L' tienen un solo punto en común).
3) $L = L' = L \cap L' \Leftrightarrow r(A) = 1 = r(B)$. (L y L' coinciden).

Demostración

$L \cap L'$ es el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas en el sistema de referencia R sean solución del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} ax_1 + bx_2 + c = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c' = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS tenemos que:

1) $r(A) = 1 \neq 2 = r(B) \Leftrightarrow$ (1) incompatible $\Leftrightarrow L \cap L' = \varnothing$.

2) $r(A) = 2 = r(B) \Leftrightarrow$ (1) compatible determinado $\Leftrightarrow L \cap L' = P$. (Un solo punto).

3) $r(A) = 1 = r(B) \Leftrightarrow$ (1) compatible indeterminado y las dos ecuaciones de (1) son equivalentes $\Leftrightarrow L = L' = L \cap L'$.

Observación

Teniendo en cuenta esta proposición y el resultado obtenido en el ejercicio anterior $(b', a') = \lambda \cdot (b, a)$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ obtenemos una nueva caracterización del paralelismo de rectas en el plano afín ordinario, atendiendo ahora a sus posiciones relativas: «Dos rectas L y L' son paralelas en el plano afín ordinario si y sólo si no tienen ningún punto en común o son coincidentes».

7. HAZ DE RECTAS

Proposición 7.1

Consideremos las rectas L y L' de ecuaciones cartesianas respectivas

$$L)\ ax_1 + bx_2 + c = 0 \qquad L')\ a'x_1 + b'x_2 + c' = 0$$

en el sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ del plano afín ordinario E_2. Supongamos que $L \cap L' = P$ (un único punto). Entonces:

Una recta T contendrá dicho punto $P \in E_2$ si y sólo si su ecuación cartesiana en el sistema de referencia R es una combinación lineal no nula de las ecuaciones cartesianas respectivas de L y L' en el sistema de referencia R, de forma que:

$$T)\ \lambda(ax_1 + bx_2 + c) + \gamma(a'x_1 + b'x_2 + c') = 0 \qquad \text{con } (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $a''x_1 + b''x_2 + c'' = 0$ la ecuación cartesiana de la recta T en el sistema de referencia R. Entonces considerando el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} ax_1 + bx_2 + c = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c' = 0 \\ a''x_1 + b''x_2 + c'' = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$P \in T \overset{L \cap L' = P \text{ (un punto)}}{\Rightarrow} (2) \text{ Compatible determinado} \Rightarrow r \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2 \left.\begin{array}{r} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$L \cap L' = P \text{ (un punto)} \Rightarrow r \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \left.\begin{array}{r} \\ \\ \\ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ (a", b", c") es combinación lineal no nula de (a, b, c) y (a', b', c') y de aquí la conclusión.

$\Leftarrow$) Consideremos $P(p_1, p_2)$ en el sistema de referencia cartesiano R.

$$\left.\begin{array}{l} P \in L \Rightarrow ap_1 + bp_2 + c = 0 \\ P \in L' \Rightarrow a'p_1 + b'p_2 + c' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda(ap_1 + bp_2 + c) + \gamma(a'p_1 + b'p_2 + c') = 0,\ \forall(\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \Rightarrow P \in T$$

Observaciones

El caso singular $\lambda = \gamma = 0$ no da la ecuación de una recta para T sino la identidad $0 = 0$ y por esta razón no se considera.

Definición 7.1

El conjunto de rectas que contienen el punto $P = L \cap L'$ y que en las condiciones de la proposición anterior tienen una ecuación cartesiana en el sistema de referencia R de la forma

$$\lambda(ax_1 + bx_2 + c) + \gamma(a'x_1 + b'x_2 + c') = 0 \qquad \text{con } (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

se denomina haz de rectas de base el punto P.

Observación

Hasta aquí hemos estudiado el plano afín ordinario. Para dar un sentido completo a la geometría afín del plano deberíamos de estudiar ahora las aplicaciones afines (aplicaciones de E_2 en sí mismo que conservan el paralelismo y la alineación). Pero este estudio excede de los objetivos de este curso.

8. EL PLANO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO

Al tratar el plano afín ordinario no hemos estudiado ningún problema métrico (distancias y ángulos). Esto no ha sido posible porque en su definición el plano afín ordinario no contiene ninguna idea que permita estructurarlo como espacio métrico. Precisamente, la introducción de una idea de este tipo es lo que va a dar lugar a la estructura de plano afín euclídeo ordinario que definimos a continuación.

Definición 8.1

Denominamos plano afín euclídeo ordinario al plano afín ordinario E_2 en el que el $\mathbb{R}$-espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^2$ es euclídeo y el producto escalar en él definido es el usual.

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{2} x_i y_i, \qquad \forall\, \bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\, \bar{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Proposición 8.1

Consideremos el plano afín euclídeo ordinario E_2 y la norma $\| \ \|$ asociada al producto escalar usual definido en $\mathbb{R}^2$. Entonces la aplicación

$$d: E_2 \times E_2 \to \mathbb{R} \text{ tal que } d(P, Q) = \|\overline{PQ}\|, \qquad \forall P, Q \in E_2$$

es una distancia sobre E_2.

Demostración

Considerando las propiedades de la norma $\| \ \|$ tenemos:

$$d(P, Q) = \|\overline{PQ}\| \geq 0 \qquad \forall P, Q \in E_2$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow \|\overline{PQ}\| = 0 \Leftrightarrow \overline{PQ} = \bar{0} \Leftrightarrow P = Q$$

$$d(P, Q) = \|\overline{PQ}\| = \|\overline{-QP}\| = |-1| \, . \, \|\overline{QP}\| = \|\overline{QP}\| = d(Q, P), \qquad \forall P, Q \in E_2$$

$$d(P, Q) = \|\overline{PQ}\| = \|\overline{PR} + \overline{RQ}\| \leq \|\overline{PR}\| + \|\overline{RQ}\| = d(P, R) + d(R, Q), \qquad \forall P, R, Q \in E_2$$

Por tanto d es una distancia o métrica sobre E_2.
Según esto E_2 queda estructurado como un espacio métrico.

Definición 8.2

A la distancia o métrica d definida sobre E_2 en la proposición 8.1 se le denomina distancia o métrica euclídea sobre E_2.

9. SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL PLANO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO

Definición 9.1

Un sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ del plano afín euclídeo ordinario se dice ortogonal (ortonormal) si la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ asociada es ortogonal (ortonormal).

A los sistemas de referencia cartesianos ortonormales de E_2 también se les denomina rectangulares.

Proposición 9.1

Sea $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ un sistema de referencia cartesiano ortonormal del plano afín euclídeo ordinario E_2 y consideremos dos puntos cualesquiera $P(x_1, x_2) \in E_2$ y $Q(y_1, y_2) \in E_2$ en dicho sistema de referencia R. Entonces:

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (y_i - x_i)^2}$$

Demostración

$$d(P, Q) = \left\|\overline{PQ}\right\| = \left\|\overline{OQ} - \overline{OP}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{2} y_i \bar{e}_i - \sum_{i=1}^{2} x_i \bar{e}_i\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{i=1}^{2} (y_i - x_i)\bar{e}_i\right\| \underset{\text{B ortonormal}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (y_i - x_i)^2}$$

10. ORTOGONALIDAD EN EL PLANO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO

Definición 10.1

Decimos que una recta L = A + W del plano afín euclídeo ordinario E_2 es ortogonal a un vector no nulo $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ cuando la dirección W de L y el vector $\bar{v}$ son ortogonales.

Ejercicio 4

Dada una recta L = A + W definida por su ecuación cartesiana L) $ax_1 +$ $+ bx_2 + c = 0$ en un sistema de referencia ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$

de E_2 y el vector $\overline{v}(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ en la base B asociada a R. Hallar una condición necesaria y suficiente para que la recta L sea ortogonal al vector $\overline{v}$.

Solución

$$L \perp \overline{v} \Leftrightarrow W \perp \overline{v} \overset{W = L(\{\overline{w}\}) \text{ con } \overline{w}(-b, a) \text{ en R}}{\Leftrightarrow} \overline{w}(-b, a) \perp \overline{v}(v_1, v_2) \underset{\text{B ortonormal}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow -bv_1 + av_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & v_1 \\ b & v_2 \end{vmatrix} = 0 \overset{\overline{w} \neq \overline{0} \wedge \overline{v} \neq \overline{0}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (a, b) = \lambda(v_1, v_2) \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Observación

Según este resultado, el vector de coordenadas (a, b) en la base ortonormal B es ortogonal a la recta L, de ecuación cartesiana L) $ax_1 + bx_2 + c = 0$ en el sistema de referencia ortonormal R.

Definición 10.2

Decimos que dos rectas L = A + W y L' = A' + W' del plano afín euclídeo ordinario E_2 son ortogonales si sus direcciones respectivas W y W' son ortogonales. Escribiremos entonces:

$$L \perp L' \Leftrightarrow W \perp W'$$

Ejercicio 5

Definidas dos rectas L = A + W y L' = A' + W' por sus ecuaciones cartesinas respectivas

$$L) \ ax_1 + bx_2 + c = 0 \qquad L') \ a'x_1 + b'x_2 + c' = 0$$

en un sistema de referencia ortonormal $R = (O, B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\})$ de E_2, hallar una condición necesaria y suficiente para que las rectas L y L' sean ortogonales.

Solución

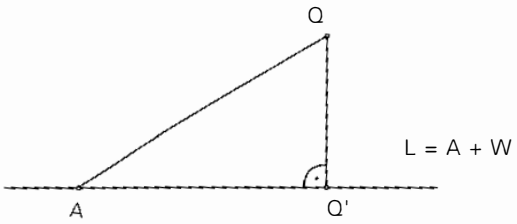
Teniendo en cuenta que $W = L(\{\bar{w}\})$ y $W' = L(\{\bar{w}'\})$ con $\bar{w}(-b, a)$ y $\bar{w}'(-b', a')$ en el sistema de referencia R, tenemos:

$$L \perp L' \Leftrightarrow W \perp W' \Leftrightarrow \bar{w}(-b, a) \perp \bar{w}'(-b', a') \underset{\text{B ortonormal}}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow bb' + aa' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

que es la condición buscada.

11. PROYECCION ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Estudiaremos en esta cuestión dos problemas métricos que resultan tener, como se demostrará, una misma solución



Proposición 11.1

Consideremos una recta $L = A + W$ y un punto $Q \in E_2$ en el plano afín euclídeo ordinario. Entonces existe un único punto $Q' \in L$ tal que $\overline{Q'A} = P_W(\overline{QA})$ y equivalentemente $\overline{QQ'} \perp L$.

Demostración

Demostremos en primer lugar la existencia de $Q' \in L$:

Sea $W = L(\{\bar{w}\})$. Teniendo en cuenta la teoría de ortogonalidad en espacios vectoriales euclídeos tenemos que

$$P_W(\overline{QA}) = \frac{<QA, \bar{w}>}{\| \bar{w} \|^2} \cdot \bar{w} \in W$$

y entonces:

$$Q' = A - P_W(\overline{QA}) \in L \Rightarrow \overline{Q'A} = P_W(\overline{QA}) \text{ y de aquí la existencia.}$$

Demostraremos ahora la equivalencia $\overline{Q'A} = P_W(\overline{QA}) \Leftrightarrow \overline{QQ'} \perp L$:

$$\overline{Q'A} = P_W(\overline{QA}) \Leftrightarrow \overline{QA} - \overline{Q'A} \perp W \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{QA} + \overline{AQ'} \perp W \Leftrightarrow \overline{QQ'} \perp W \Leftrightarrow \overline{QQ'} \perp L.$$

Veamos ahora la unicidad. Para ello consideremos la existencia de otro punto $Q'' \in L$ tal que $\overline{QQ''} \perp L$:

$$\overline{QQ'} \perp L \wedge \overline{QQ''} \perp L \Rightarrow \overline{QQ'} \perp W \wedge \overline{QQ''} \perp W \Rightarrow \overline{QQ'} - \overline{QQ''} \perp W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{QQ'} + \overline{Q''Q} \perp W \Rightarrow \overline{Q''Q'} \perp W \underset{Q'' \in L \wedge Q' \in L \Rightarrow \overline{Q''Q'} \in W}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \overline{Q''Q'} = \overline{0} \Leftrightarrow Q'' = Q'$$

y de aquí la unicidad.

Definición 11.1

Al punto $Q' = A - P_W(\overline{QA}) = A + P_W(\overline{AQ}) \in L$ se le denomina proyección ortogonal del punto $Q \in E_2$ sobre la recta L y lo representaremos por $P_L(Q)$.

Observaciones

Consecuencias inmediatas de la proposición 11.1 son:

1) Si $Q \in L$, entonces $P_L(Q) = Q$.
2) El punto $Q' = P_L(Q)$ es independiente del punto $A \in L$ utilizado en la definición de la recta L.

Definición 11.2

Consideremos una recta $L = A + W$ y un punto $Q \in E_2$ del plano afín euclídeo ordinario. Llamamos distancia del punto Q a la recta L al número real $\inf \{d(Q, P)/P \in L\}$ y la representamos por $d(Q, L)$.

Proposición 11.2

Consideremos una recta $L = A + W$, un punto $Q \in E_2$ del plano afín euclídeo ordinario y su proyección $Q' = P_L(Q)$ sobre L. Entonces:

$$d(Q, L) = d(Q, Q')$$

Demostración

Consideremos un punto genérico $P \in L$. Entonces:

$$P, Q' \in L \Rightarrow \overline{PQ'} \in W \underset{Q' = P_L(Q)}{\Rightarrow} \overline{PQ'} \perp \overline{QQ'} \Rightarrow \overline{PQ'} \perp \overline{Q'Q} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\overline{PQ}\|^2 = \|\overline{PQ'}\|^2 + \|\overline{Q'Q}\|^2 \Rightarrow \|\overline{PQ}\|^2 \geq \|\overline{Q'Q}\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\overline{PQ}\| \geq \|\overline{Q'Q}\| \Rightarrow d(Q, P) \geq d(Q, Q') \overset{Q' \in L}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow d(Q, Q') = \inf.\{d(Q, P)/P \in L\} = d(Q, L) \qquad \text{c.q.d.}$$

Observación

Consecuencia inmediata de lo visto en las proposiciones 11.1 y 2 es que

$$d(Q, L) = \left[d(P, Q)^2 - \frac{<\overline{PQ}, \overline{w}>^2}{\|\overline{w}\|^2} \right]^{1/2}, \qquad \forall P \in L$$

Ejercicio 6

Elegido un sistema de referencia cartesiano ortonormal $R = (O, B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2\})$ sobre el plano afín euclídeo ordinario, determinar las ecuaciones cartesianas en el sistema de referencia R, de todas las rectas cuya distancia al punto $P(p_1, p_2)$ sea igual a $d \neq 0$.

Solución

Denominaremos en general, a una recta solución del problema propuesto, $L = A + W$. Según esto $A \in L$ puede ser el punto $A = P_L(P)$ tal que $d(P, A) = d(P, L) = d$. Entonces siendo $A(a_1, a_2)$ en el sistema R

$$d(P,A) = \sqrt{(a_1 - p_1)^2 + (a_2 - p_2)^2} = d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 - p_1 = d \operatorname{sen} \alpha \\ a_2 - p_2 = d \cos \alpha \end{array}\right\} \quad \text{con } \alpha \in [0, 2\Pi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = p_1 + d \operatorname{sen} \alpha \\ a_2 = p_2 + d \cos \alpha \end{array}\right\} \quad \text{con } \alpha \in [0, 2\Pi),$$

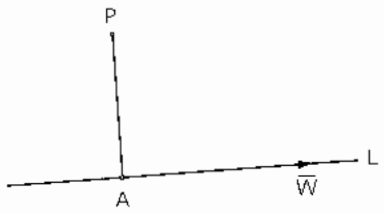
donde hemos eliminiado soluciones redundantes.

Consideramos ahora $W = L(\{\bar{w}\})$ tal que $\bar{w}(w_1, w_2)$, y estableciendo la condición adicional $\| \bar{w} \| = 1$

$$A = P_L(P) \Leftrightarrow \overline{AP} \perp L \Leftrightarrow \overline{PA} \perp W \Leftrightarrow (a_1 - p_1)w_1 + (a_2 - p_2)w_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w_1 d \operatorname{sen} \alpha + w_2 d \cos \alpha = 0 \overset{\substack{|\bar{w}| = w_1^2 + w_2^2 = 1 \\ d \neq 0}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} w_1 = \cos \alpha \\ w_2 = -\operatorname{sen} \alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow \bar{w}(\cos \alpha, -\operatorname{sen} \alpha)$$



Por tanto, teniendo en cuenta un ejercicio anterior, la ecuación cartesiana en el sistema de referencia R de una recta $L = A + W$ solución del problema será de la forma:

$$(\operatorname{sen} \alpha)x_1 + (\cos \alpha)x_2 + c = 0 \qquad \text{con } \alpha \in [0, 2\pi).$$

donde determinaremos $c \in \mathbb{R}$ a partir de la condición $A \in L$. Entonces:

$$A \in L \Leftrightarrow (\text{sen } \alpha)a_1 + (\cos \alpha)a_2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -a_1 \text{sen } \alpha - a_2 \cos \alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c = -(p_1 + d \text{ sen } \alpha)\text{sen}\alpha - (p_2 + d \cos \alpha)\cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c = -p_1 \text{sen } \alpha - p_2 \cos \alpha - d.$$

Por tanto, la ecuación cartesiana de L = A + W en el sistema de referencia R queda definitivamente:

$$L) \ (\text{sen } \alpha)x_1 + (\cos \alpha)x_2 - (p_1 \text{sen } \alpha + p_2 \cos \alpha + d) = 0 \qquad \text{con } \alpha \in [0, 2\pi).$$

Observaciones

1) Una ecuación cartesiana de una recta L en un sistema de referencia ortonormal R, que como ésta cumple la condición $a^2 + b^2 = \text{sen}^2\alpha + \cos^2 \alpha = 1$ se dice normalizada.
2) De la observación del resultado obtenido se desprende que la distancia de una recta L, dada por su ecuación normalizada $L) \ ax_1 + bx_2 + c = 0$, a un punto $P(p_1, p_2)$ en un sistema de referencia ortonormal R es $d(P, L) = |ap_1 + bp_2 + c|$.
3) En caso de que la ecuación $L) \ ax_1 + bx_2 + c = 0$ no esté normalizada tenemos, dividiendo todos los términos por $\sqrt{a^2 + b^2}$, la nueva ecuación normalizada

$$L) \ -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} x_1 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} x_2 + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

y entonces:

$$d(P, L) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

que es la fórmula general de la distancia de un punto $P(p_1, p_2)$ a una recta $L) \ ax_1 + bx_2 + c = 0$ del plano afín euclídeo ordinario E_2 en un sistema de referencia cartesiano ortonormal $\mathbb{R}$.

12. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

Definición 12.1

Consideremos en el plano afín euclídeo ordinario E_2, dos rectas $L = A + W$ y $L' = A' + W'$. Denominamos distancia entre las rectas L y L' al número real inf $\{d(P, P')/P \in L \wedge P' \in L'\}$ que representaremos por $d(L, L')$.

Observación

Consecuencia inmediata de esta definición es que

$$L \cap L' \neq \varnothing \Rightarrow d(L, L') = 0$$

Por tanto, atendiendo al resultado obtenido al estudiar las posiciones relativas de dos rectas en el plano afín ordinario, si la distancia $d(L, L')$ es distinta de cero, entonces L y L' son paralelas y no coincidentes.

Proposición 12.1

Consideremos dos rectas paralelas $L = A + W$ y $L' = A' + W$ del plano afín euclídeo ordinario. Entonces:

$$d(P, L') = d(L, L'), \qquad \forall P \in L$$

Demostración

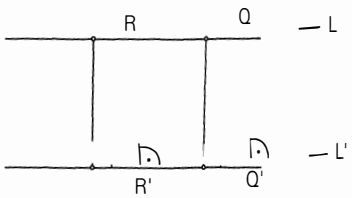
Veremos previamente que $d(R, L') = d(Q, L')$, $\forall R, Q \in L$.

Sea $R' = P_{L'}(R) \in L'$. Entonces,

$$R, Q \in L \Rightarrow \overline{RQ} \in W \Rightarrow \exists\, Q' = R' + \overline{RQ} \in L' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q' + \overline{R'R} = R' + \overline{R'R} + \overline{RQ} = R' + \overline{R'Q} = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{Q'Q} = \overline{R'R} \underset{R' = P_{L'}(R) \Rightarrow \overline{R'R} \perp L'}{\Rightarrow} \overline{Q'Q} \perp L' \text{ con } Q' \in L' \Rightarrow Q' = P_{L'}(Q)$$



Por tanto, $d(R, L') = \|\overline{RR'}\| = \|\overline{QQ'}\| = d(Q, L')$ c.q.d.
Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} d(L, L') &= \inf \{d(P, P')/P \in L \wedge P' \in L'\} = \\ &= \inf \{\inf \{d(P, P')/P' \in L'\}/P \in L\} = \\ &= \inf \{d(P, L')/P \in L\} = d(P, L'), \qquad \forall P \in L \end{aligned}$$

Nótese que esta última igualdad es consecuencia del resultado previo obtenido.

Ejercicio 7

Consideremos elegido un sistema de referencia cartesiano ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ en el plano afín euclídeo ordinario E_2. Hallar las rectas cuya distancia a una recta $L = A + W$ de ecuación cartesiana $x_1 + x_2 - 1 = 0$ en el sistema de referencia R, sea $\sqrt{2}$.

Solución

Como hemos visto $d(L, L') \neq 0 \Rightarrow L \| L'$. Así pues las posibles rectas L' solución de este ejercicio serán paralelas a la recta L. Su ecuación cartesiana en el sistema de referencia R ortonormal será por tanto de la forma

$$L') \; x_1 + x_2 - c = 0 \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Determinemos $c \in \mathbb{R}$. Considerando el punto $C(0, c) \in L'$ y el punto $A(0, 1) \in L$ en el sistema de referencia R y el vector director $\bar{w}(-1, 1)$ de L en la base B tenemos:

$$d(L', L) = d(C, L) = \left[d(A, C)^2 - \frac{<AC, \bar{w}>^2}{\|\bar{w}\|^2} \right]^{1/2} =$$

$$= \left[(c-1)^2 - \frac{(c-1)^2}{2} \right]^{1/2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c-1)^2 = 4 \Leftrightarrow c - 1 = \pm 2 \Leftrightarrow c = 3 \vee c = -1$$

Y de aquí tenemos las dos soluciones de ecuaciones cartesianas

$$L_1') \; x_1 + x_2 - 3 = 0 \qquad L_2') \; x_1 + x_2 + 1 = 0$$

en el sistema de referencia R.

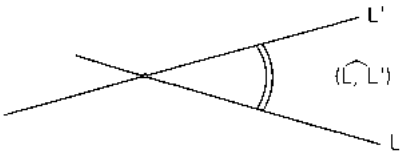
13. ANGULOS EN EL PLANO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO

Consideremos elegido un sistema de referencia cartesiano ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ en el plano afín euclídeo ordinario E_2.

Definición 13.1

Dadas dos rectas $L = A + L(\{\bar{u}\})$ y $L' = A' + L(\{\bar{u}'\})$ de E_2 se denomina ángulo entre L y L', y lo representaremos $(\widehat{L, L'})$, al ángulo

$$(\widehat{L, L'}) = \arccos \frac{|<\bar{u}, \bar{u}'>|}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{u}'\|} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Observación

1) Nótese que esta definición es independiente de los vectores directores de L y L' elegidos. En efecto:

$$\frac{|<\lambda\bar{u}, \lambda'\bar{u}'>|}{\|\lambda\bar{u}\| \, . \, \|\lambda'\bar{u}'\|} = \frac{|\lambda \, . \, \lambda'| \, . \, |<\bar{u}, \bar{u}'>|}{|\lambda| \, . \, |\lambda'| \, \|\bar{u}\| \, . \, \|\bar{u}'\|} =$$

$$= \frac{|<\bar{u}, \bar{u}'>|}{\|\bar{u}\| \, . \, \|\bar{u}'\|} \quad , \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) Siendo el sistema de referencia R ortonormal tenemos que

$$\cos(\widehat{L, L'}) = \frac{|<\bar{u}, \bar{u}'>|}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{u}'\|} = \frac{|u_1 u'_1 + u_2 u'_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2}}$$

donde $\bar{u}(u_1, u_2)$ y $\bar{u}'(u'_1, u'_2)$ en la base B asociada al sistema de referencia R.

Tema X

Curvas en el plano afín ordinario

1. CURVAS EN EL PLANO AFIN ORDINARIO

Sea el plano afín ordinario E_2 (eventualmente afín euclídeo) y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ de E_2.

Definición 1.1

Consideremos dos aplicaciones $f_1, f_2: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y la aplicación $f: D \subset \mathbb{R} \to E_2$ dada por:

$$f(t) = O + f_1(t)\bar{e}_1 + f_2(t)\bar{e}_2, \qquad \forall\, t \in D$$

La imagen C de D por la aplicación f se llama curva parametrizada

$$C = \{f(t) \in E_2 / t \in D\}$$

Las coordenadas de un punto cualquiera $f(t) \in C$ son $(f_1(t), f_2(t))$ en el sistema de referencia R.

Las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(t) \\ x_2 &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \; t \in D$$

se llaman ecuaciones paramétricas de la curva C y t es el parámetro del punto f(t) de C.

Definición 1.2

Sea una aplicación f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se denomina curva implícita al conjunto T de puntos $(x_1, x_2) \in E_2$ cuyas coordenadas en el sistema de referencia R verifican la ecuación $f(x_1, x_2) = 0$.

$$T = \{(x_1, x_2) \in E_2 / f(x_1, x_2)\} = 0$$

La ecuación $f(x_1, x_2) = 0$ se llama ecuación cartesiana de T.

Estas definiciones no son esencialmente distintas, y bajo ciertas condiciones se puede pasar de las ecuaciones paramétricas a las cartesianas y recíprocamente.

2. ESTUDIO GENERAL DE LAS CONICAS

Sea el plano afín ordinario E_2 y consideremos un sistema de referencia ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$ de E_2.

Definición 2.1

Se llama cónica al conjunto C de puntos de E_2 cuyas coordenadas (x_1, x_2) referidas al sistema R verifican la ecuación cartesiana:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_o = 0$$

donde a_{11}, a_{22}, a_{12} no son simultáneamente nulos.

Pretendemos hallar un nuevo sistema de referencia en el que la cónica tenga una ecuación más sencilla que nos facilite su estudio y clasificación.

Pasemos la ecuación cartesiana de la cónica a una expresión matricial:

$$[x_1\ x_2] \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + [a_1\ a_2] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_o = 0$$

donde la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es simétrica.

Consideremos la forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuya matriz respecto de la base ortonormal $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ es A; vendrá dada por la ecuación matricial:

$$\omega(\bar{x}) = X^T A X = [x_1\ x_2] \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Recordemos que para toda forma cuadrática real podemos encontrar una base ortonormal $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$, formada por vectores propios de la matriz asociada A, respecto de la cual la matriz de ω es una matriz diagonal, y sus elementos son precisamente los valores propios de la matriz A.

Respecto de esa base B', la ecuación matricial de ω es:

$$\omega(\bar{x}) = [\dot{x}_1\ \dot{x}_2] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \dot{x}_1^2 + \lambda_2 \dot{x}_2^2 \qquad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^2$$

donde el par ordenado $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ representa las coordenadas de $\bar{x}$ en la base ortonormal B' de $\mathbb{R}^2$.

Sabemos también que la matriz de paso de B a B' es una matriz ortogonal P que verifica:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = P^{-1} A P = P^T A P$$

Por tanto, si consideramos el nuevo sistema de referencia ortonormal $R' = (O, B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$ de E_2, las ecuaciones del cambio del sistema R por el R' son:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$$

donde los pares ordenados (x_1, x_2) y $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ representan las coordenadas de un punto genérico de E_2 en los sistemas de referencia R y R' respectivamente.

La ecuación de la cónica en este nuevo sistema R' será:

$$[\dot{x}_1\ \dot{x}_2] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + [a_1\ a_2] \cdot P \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + a_o = 0$$

Si llamamos $[a_1\ a_2] \cdot P = [b_1\ b_2]$ y efectuamos el producto de matrices resulta:

$$\lambda_1 \dot{x}_1^2 + \lambda_2 \dot{x}_2^2 + b_1 \dot{x}_1 + b_2 \dot{x}_2 + a_o = 0 \qquad (1)$$

ecuación de la cónica C en el sistema de referencia R'

Estudiaremos ahora dos casos distintos:

I. Ningún valor propio es nulo; $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$.
II. Un valor propio de A es nulo; $\lambda_2 = 0$.

Observemos que no puede ser $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ pues el menos uno de los coeficientes a_{11}, a_{22}, a_{12} es no nulo.

I. Supongamos $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$

Operando en la ecuación (1).

$$\lambda_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(\dot{x}_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} = 0$$

Si hacemos $\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{aligned}\right\}$

efectuamos una traslación en el sistema R' = (O, B' = $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$) es decir, un cambio del sistema de referencia R' por el R'' = (O', B' = $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$) donde el par $\left(-\frac{b_1}{2\lambda_1}, -\frac{b_2}{2\lambda_2} \right)$ representa las coordenadas del nuevo origen O' en el sistema R'.

Ahora, el par ordenado $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)$ representa las coordenadas en el nuevo sistema R" de un punto genérico de E_2.

La ecuación de la cónica C en el sistema de referencia R" resulta:

$$\lambda_1 \ddot{x}_1^2 + \lambda_2 \ddot{x}_2^2 + h = 0$$

donde hemos hecho: $h = a_o - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1} - \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2}$

Esta ecuación se llama ecuación reducida de la cónica C y representa una curva que admite el origen O' de R" como centro de simetría. Se dice en este caso que son cónicas con centro.

—Si $h \neq 0$ se dice que C es una cónica propia o no degenerada.
—Si $h = 0$ se dice que C es una cónica degenerada.

Estudiaremos estos dos casos por separado.

A) $h \neq 0$

1.º) Si $\lambda_1 \wedge \lambda_2$ son del mismo signo.

Supongamos por comodidad $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0$, en caso contrario multiplicaríamos la ecuación por –1.

—Si $h < 0$

Dividiendo la ecuación reducida por –h:

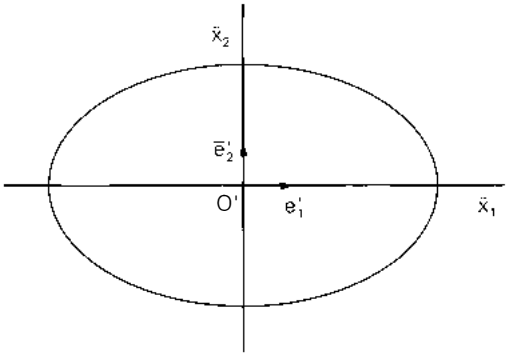
$$\frac{\lambda_1}{-h} \ddot{x}_1^2 + \frac{\lambda_2}{-h} \ddot{x}_2^2 - 1 = 0$$

Existen, por tanto, dos números reales positivos a, $b \in \mathbb{R}^+$ tales que $a^2 = -\dfrac{h}{\lambda_1} \wedge b^2 = -\dfrac{h}{\lambda_2}$ que permitan expresar la ecuación de la forma:

$$\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} = 1$$

ecuación de una elipse.

Su gráfica en el sistema de referencia R" es:



Si a = b, o lo que es igual $\lambda_1 = \lambda_2$, la cónica obtenida es una circunferencia de radio a. Su ecuación se escribe

$$\ddot{x}_1^2 + \ddot{x}_2^2 = a^2$$

—Si h > 0

Dividiendo la ecuación reducida por h:

$$\frac{\lambda_1}{h}\ddot{x}_1^2 + \frac{\lambda_2}{h}\ddot{x}_2^2 + 1 = 0$$

Igual que en el caso anterior existen dos números reales positivos a, b tales que:

$$a^2 = \frac{h}{\lambda_1} \qquad b^2 = \frac{h}{\lambda_2}$$

que permiten poner la ecuación de la cónica en la forma:

$$\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} = -1$$

Ningún punto de coordenadas $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)$ en el sistema R" verifica esta ecuación. Se dice que C es una elipse imaginaria.

Se dirá que es un círculo imaginario en el caso $\lambda_1 = \lambda_2$.

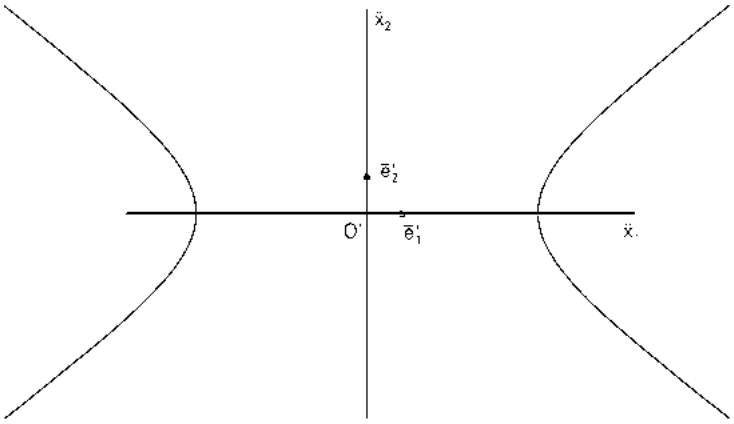
2.º) Si λ_1 y λ_2 son de distinto signo.

Podemos suponer, sin perder generalidad $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ y $h < 0$.

Existen dos números reales positivos a, b / $a^2 = -\frac{h}{\lambda_1}$, $b^2 = \frac{h}{\lambda_2}$ que sustituidos en la ecuación reducida de la cónica resulta:

$$\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de una hipérbola en el sistema de referencia R" cuya representación gráfica es:



B) h = 0

La ecuación reducida en este caso es:

$$\lambda_1 \ddot{x}_1^2 + \lambda_2 \ddot{x}_2^2 = 0$$

1.º) Si λ_1 y λ_2 son de distinto signo.

Supongamos $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0$, entonces existen a, b ϵ $\mathbb{R}^+$ tales que $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_2 = -b^2$ y llevado a la ecuación reducida:

$$a^2 \ddot{x}_1^2 - b^2 \ddot{x}_2^2 = 0$$

o equivalentemente:

$$(a\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_2)(a\ddot{x}_1 - b\ddot{x}_2) = 0$$

Es una cónica degenerada que representa dos rectas distintas que pasan por el origen de coordenadas O'.

2.º) Si λ_1 y λ_2 son del mismo signo.
En este caso

$$\exists\ a, b \in \mathbb{R}^+ / \lambda_1 = a^2 \wedge \lambda_2 = b^2$$

La ecuación se escribe:

$$a^2\ddot{x}_1^2 + b^2\ddot{x}_2^2 = 0$$

El único punto de E_2 cuyas coordenadas $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)$ en el sistema de referencia R" verifican la ecuación es el origen O'.
Se dice que la cónica degenera en dos rectas imaginarias.

II. Sean $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$
La ecuación (1) de la cónica en el sistema de referencia R' será ahora:

$$\lambda_1\dot{x}_1^2 + b_1\dot{x}_1 + b_2\dot{x}_2 + a_o = 0$$

Supondremos $\lambda_1 > 0$.
Operando en la ecuación:

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + b_2\dot{x}_2 + a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} = 0$$

llamando $h = a_o - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1}$

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + b_2\dot{x}_2 + h = 0 \qquad (2)$$

—Si $b_2 \neq 0$ se dice que C es una cónica propia o no degenerada.
—Si $b_2 = 0$ se dice que C es una cónica degenerada.

Estudiemos estos dos casos por separado.

A) $b_2 \neq 0$

Podemos expresar la ecuación de C:

$$\lambda_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + b_2 \left(\dot{x}_2 + \frac{h}{b_2} \right) = 0$$

Si efectuamos la traslación dada por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_2 + \frac{h}{b_2} \end{aligned}\right\}$$

es decir, un cambio del sistema de referencia R' por el R" = (O', B' = = $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$) donde el par ordenado $\left(-\frac{b_1}{2\lambda_1}, -\frac{h}{b_2} \right)$ representa las coordenadas del nuevo origen O' respecto de R', la cónica se escribe

$$\lambda_1 \ddot{x}_1^2 + b_2 \ddot{x}_2 = 0$$

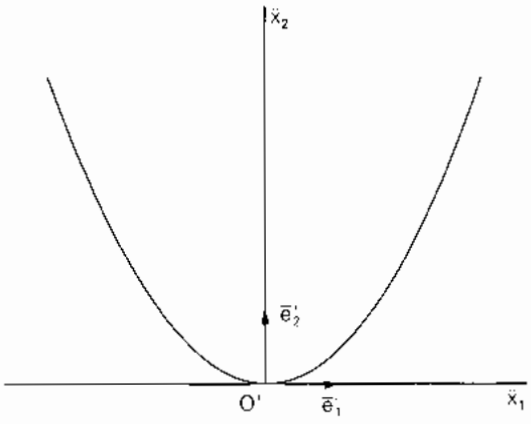
Ahora, el par ordenado $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)$ representa las coordenadas de un punto genérico de E_2 en el nuevo sistema ortonormal R".

Dividiendo por λ_1 y llamando $\frac{b_2}{\lambda_1} = -2p$

resulta la ecuación

$$\ddot{x}_1^2 - 2p\ddot{x}_2 = 0$$

que representa una parábola.



B) $b_2 = 0$

La ecuación (2) de C en el sistema de referencia R' queda:

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + h = 0$$

Si consideramos el nuevo sistema de referencia R" = (O', B' = $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$) de E_2, donde el par ordenado $\left(-\frac{b_1}{2\lambda_1}, 0\right)$ representa las coordenadas de O' en el sistema de referencia R', siendo las ecuaciones del cambio:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= \dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_2\end{aligned}\right\}$$

denotando los pares ordenados $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2)$ las coordenadas de un punto genérico de E_2 en los sistemas de referencia R' y R" respectivamente.

La ecuación de C en el nuevo sistema R" resulta:

$$\lambda_1 \ddot{x}_1^2 + h = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}_1^2 = -\frac{h}{\lambda_1}$$

llamando $p = -\frac{h}{\lambda_1}$: $\ddot{x}_1^2 = p$

—Si $h < 0 \Rightarrow p > 0 : \ddot{x}_1 = +\sqrt{p}$ $\ddot{x}_1 = -\sqrt{p}$ la cónica degenera en dos rectas paralelas y distintas.

—Si $h = 0 \Rightarrow p = 0 : \ddot{x}_1^2 = 0$ coincide con la recta doble de ecuación $\ddot{x}_1 = 0$.

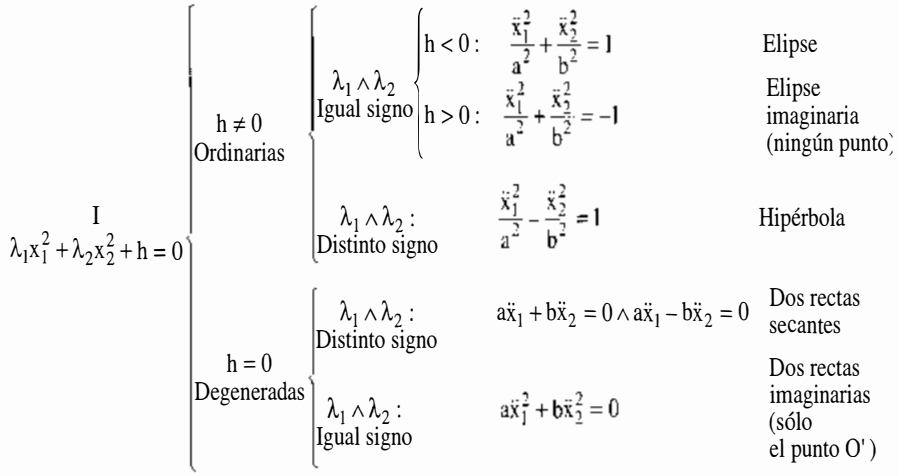
—Si $h > 0 \Rightarrow p < 0 : \ddot{x}_1^2 = p$.

No hay ningún punto de E_2 que verifique esta ecuación.
Se dice en este caso que C degenera en dos rectas imaginarias paralelas.

ESQUEMA RESUMEN

$$\lambda_1 \dot{x}_1^2 + \lambda_2 \dot{x}_2^2 + b_1 \dot{x}_1 + b_2 \dot{x}_2 + a_o = 0$$

I. $\lambda_1 \neq 0 \wedge \lambda_2 \neq 0$ Cónicas con centro.
II. $\lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 = 0$.



$$\text{II}\quad \dot{x}_1^2 + b_1\dot{x}_1 + b_2\dot{x}_2 + a_0 = 0 \begin{cases} b_2 \neq 0: \text{ Ordinarias} & \ddot{x}_1^2 - 2p\ddot{x}_2 = 0 \quad \text{Parábola} \\ b_2 = 0 \text{ Degeneradas} \begin{cases} h<0: & \ddot{x}_1 = \sqrt{p} \;\; \ddot{x}_1 = -\sqrt{p} \quad \text{Dos rectas paralelas} \\ h=0: & \ddot{x}_1^2 = 0 \quad \text{Recta doble} \\ h>0: & \ddot{x}_1^2 = p < 0: \quad \text{Dos rectas imaginarias paralelas (ningún punto)} \end{cases} & \lambda_1\ddot{x}_1^2 + h = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1

En el plano afín ordinario consideremos la cónica de ecuación $C \equiv x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 6x_1 - 8x_2 + 9 = 0$ referida a un sistema ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$. Obtener su ecuación reducida y clasificarla.

Solución

Su ecuación matricial es:

$$[x_1\ x_2] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + [-6\ -8] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 9 = 0$$

Consideremos la forma cuadrática ω: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\omega(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 = [x_1\ x_2] \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

y diagonalicémosla:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 0$$

Será por tanto una cónica del tipo parábola.

Los subespacios propios correspondientes a λ_1 y λ_2 son

$V(\lambda_1) = L(\{(1, -2)\})$

$V(\lambda_2) = L(\{(2, 1)\})$

y los vectores propios $\overline{v}_1 = (1, -2)$ y $\overline{v}_2 = (2, 1)$
además

$$\overline{v}_1 \perp \overline{v}_2 \wedge \| \overline{v}_1 \| = \| \overline{v}_2 \| = \sqrt{5}$$

Luego el sistema $B' = \left\{ \overline{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right), \overline{e}'_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\}$ es una base ortonormal en la cual la forma cuadrática ω es diagonal

$$\omega(\overline{x}) = \lambda_1 \dot{x}_1^2 + \lambda_2 \dot{x}_2^2 = 5\dot{x}_1^2$$

La matriz P del cambio de coordenadas es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Luego en el nuevo sistema de referencia $R' = (O, B' \doteq \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2\})$ la cónica es

$$C \equiv 5\dot{x}_1^2 + [-6 \ -8] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + 9 = 0$$

que desarrollado:

$$5\dot{x}_1^2 + \frac{10}{\sqrt{5}}\dot{x}_1 - \frac{20}{\sqrt{5}}\dot{x}_2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\dot{x}_1 + \frac{10/\sqrt{5}}{2 \cdot 5} \right)^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}\dot{x}_2 + 9 - \frac{(10/\sqrt{5})^2}{4 \cdot 5} = 0$$

y simplificado

$$5\left(\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}\dot{x}_2 + 8 = 0 \wedge b_2 = \frac{-20}{\sqrt{5}} \neq 0 \Rightarrow$$

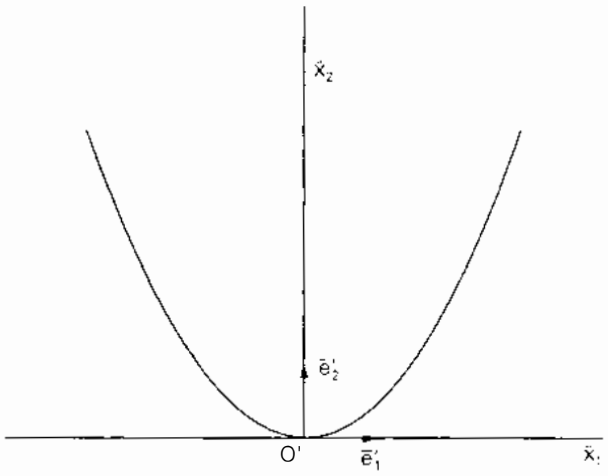
$$\Rightarrow 5\left(\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}\left(\dot{x}_2 - \frac{8}{20/\sqrt{5}}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}\left(\dot{x}_2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$$

haciendo el cambio de sistema de referencia dado por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_2 - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow O' = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \wedge R'' = (O', B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$$

en R": $5\ddot{x}_1^2 - \frac{20}{\sqrt{5}}\ddot{x}_2 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}\ddot{x}_2$ ecuación reducida de la parábola



Ejercicio 2

Estudiar y clasificar la cónica de ecuación R = (O, B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$).
$x_1^2 - 2x_1x_2 \cos\alpha + x_2^2 + x_1 + x_2 - 1 = 0$ según los valores de $\alpha \in [0, \Pi]$

Solución

La forma cuadrática asociada es:

$$\omega(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 \cos\alpha + x_2^2$$

y su matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

—Si $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 0$ y la matriz es diagonal, la cónica tiene por ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2 - 1 = 0$. Considerando $\left.\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_1 + ½ \\ \dot{x}_2 = x_2 + ½ \end{matrix}\right\}$ y operando:

$$(x_1 + ½)^2 + (x_2 + ½)^2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = \frac{3}{2}$$

ecuación de una circunferencia en el sistema R' = (O' = (–½, –½), B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$).

—Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$ y diagonalizaremos la matriz A

$$|A - \lambda I| = (1 - \lambda)^2 - \cos^2\alpha = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1 - \cos\alpha \\ \lambda_2 = 1 + \cos\alpha \end{matrix}\right\}$$

$V(\lambda_1) = L(\{(1, 1)\})$, $\bar{v}_1 = (1, 1)$,
$V(\lambda_2) = L(\{(1, -1)\})$, $\bar{v}_2 = (1, -1)$, $\quad \|\bar{v}_1\| = \|\bar{v}_2\| = \sqrt{2}$

$B' = \left\{ \bar{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \bar{e}'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$ es una base ortonormal en la que $\omega(\bar{x}) = (1 - \cos\alpha)\,\dot{x}_1^2 + (1 + \cos\alpha)\dot{x}_2^2$.

La matriz del cambio de coordenadas es:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La ecuación de C en $R' = (O, B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$ es:

$$(1 - \cos\alpha)\,\dot{x}_1^2 + (1 + \cos\alpha)\dot{x}_2^2 + \sqrt{2}\,\dot{x}_1 - 1 = 0$$

Distinguimos ahora tres casos: $\alpha = 0$, $\alpha = \Pi$, $\alpha \neq 0, \Pi$.

1.º) $\alpha \neq 0, \Pi \Rightarrow \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ y del mismo signo.

$$(1 - \cos\alpha)\left(\dot{x}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2(1 - \cos\alpha)} \right)^2 + (1 + \cos\alpha)\dot{x}_2^2 - 1 - \frac{2}{4(1 - \cos\alpha)} = 0 \quad (1)$$

$$\text{con} \left.\begin{array}{l} \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2(1 - \cos\alpha)} \\ \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 \end{array}\right\},$$

$$O' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2(1 - \cos\alpha)}, 0 \right) \wedge R'' = (O'; B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$$

$$(1) \Leftrightarrow (1 - \cos\alpha)\ddot{x}_1^2 + (1 + \cos\alpha)\ddot{x}_2^2 = 1 + \frac{2}{4(1 - \cos\alpha)}$$

que es la ecuación de una elipse.

2.º) $\alpha = \pi$ $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 1 - \cos\pi = 2\\ \lambda_2 = 1 + \cos\pi = 0\end{array}\right\}$

La cónica es:

$$2\dot{x}_1^2 + \sqrt{2}\,\dot{x}_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\dot{x}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2\,.\,2}\right)^2 - 1 - \frac{(\sqrt{2})^2}{4\,.\,2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\dot{x}_1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \qquad (2)$$

$$\text{con} \left.\begin{array}{l}\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_2\end{array}\right\} \wedge O' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right) \wedge R'' = (O', B')$$

$$(2) \Leftrightarrow 2\ddot{x}_1^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \ddot{x}_1^2 = \frac{5}{8}$$

que son dos rectas paralelas.

3.º) $\alpha = 0$ $\left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 1 - \cos 0 = 0\\ \lambda_2 = 1 + \cos 0 = 2\end{array}\right\}$

la cónica es:

$$2\dot{x}_2^2 + \sqrt{2}\,\dot{x}_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\dot{x}_2^2 + \sqrt{2}\left(\dot{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

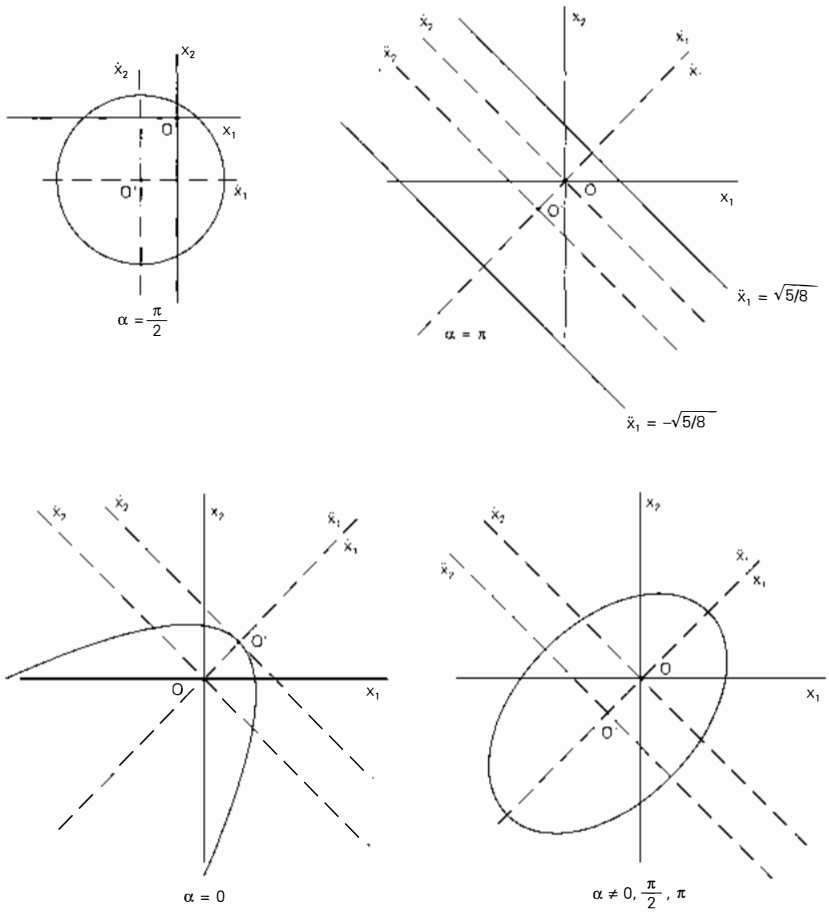
haciendo

$$\left.\begin{array}{l}\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_2\end{array}\right\} \qquad O' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \wedge R'' = (O', B')$$

la ecuación queda:

$$2\ddot{x}_2^2 + \sqrt{2}\,\ddot{x}_1 = 0 \Leftrightarrow \ddot{x}_2^2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ddot{x}_1$$

que representa una parábola.



3. DEFINICION METRICA DE LAS CONICAS NO DEGENERADAS

Consideremos en el plano afín euclídeo E_2 un sistema de referencia ortonormal R = (O, B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$).

CIRCUNFERENCIA

Se denomina circunferencia C de centro el punto $A \in E_2$ y radio $r \in \mathbb{R}^+$ al conjunto de los puntos $P \in E_2$ cuya distancia a A es la constante r.

$$C = \{P \in E_2 / d(A, P) = r\}$$

Se llama diámetro a toda recta que pasa por el punto A.

Todo diámetro corta a la circunferencia en dos puntos.

Sean (a, b) las coordenadas del punto A en el sistema de referencia R y (x_1, x_2) las de un punto genérico P de la circunferencia C.

$$P \in C \Leftrightarrow d(P, A) = r \Leftrightarrow \left\|\overline{AP}\right\| = r \Leftrightarrow \left\|(x_1 - a,\ x_2 - b)\right\| = r \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2} = r \Leftrightarrow (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = r^2$$

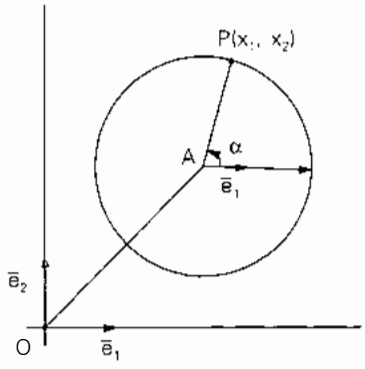
llamada ecuación cartesiana de la circunferencia C.

Ejercicio

Obtener las ecuaciones paramétricas de una circunferencia.

Solución

Sean P de coordenadas (x_1, x_2) un punto genérico de C; $\overline{OP} = (x_1, x_2) =$ $= \overline{OA} + \overline{AP}$.



Para cada $P \in C$ sea α el ángulo de los vectores $\bar{e}_1$ y $\overline{AP}$.

P recorrerá una sola vez la circunferencia si $\alpha \in [0, 2\pi)$ y además las coordenadas de $\overline{AP}$, por ser $r = \|\overline{AP}\|$ serán $\overline{AP} = (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha)$.
y por tanto: $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP}$

$$(x_1, x_2) = (a, b) + (r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = a + r \cos \alpha \\ x_2 = b + r \operatorname{sen} \alpha \end{array}\right\} \alpha \in [O, 2\pi)$$

ELIPSE

Se denomina elipse al lugar geométrico C de los puntos $P \in E_2$ tales que la suma de sus distancias a dos puntos dados llamados focos es una constante.

Sean F y F' los focos y sea $2a \in \mathbb{R}^+$

$$C = \{P \in E_2 / d(P, F) + d(P, F') = 2a\}$$

Se llama distancia focal al número $d(F, F') = 2c$.

Observemos que $\forall P \in E_2 : d(F, F') \leq d(F, P) + d((F', P)$ en particular, si $P \in C : 2c = d(F, F') \leq d(F, P) + d((F', P) = 2a$
luego: $c \leq a$.

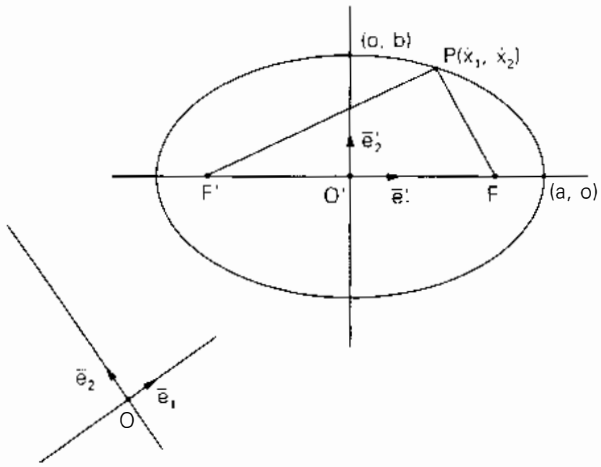
—Si fuera $c > a$, la elipse no tendría ningún punto.
—Si fuera $c = a$, $d(F, F') = d(F, P) + d(F', P) \Leftrightarrow$ los puntos F, F' y P están alineados. En este caso la elipse estaría formada por el segmento de recta comprendido entre los focos F y F'.
—Si $F = F' \Rightarrow c = 0 \wedge P \in C \Leftrightarrow d(P, F) + d(P, F') = 2d(P, F) = 2a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow d(P, F) = a \Rightarrow$ C es una circunferencia de centro el punto F y radio a.

Luego obtendremos una verdadera elipse cuando $a > c$.

Se llama centro de la elipse al punto medio de sus focos, eje focal o eje mayor a la recta que determinan sus focos y eje menor o no focal a la recta perpendicular al eje focal por su centro.

Para determinar la ecuación cartesiana de la elipse utilizaremos el sistema de referencia ortogonal $R' = (O', B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$ donde O' es el centro de la elipse y $\bar{e}'_1$, $\bar{e}'_2$ son los vectores directores de los ejes mayor y menor respectivamente.

En el sistema R' sean (–c, 0) y (c, 0) las coordenadas de F' y F respectivamente y $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ las de un punto genérico de la elipse C.



$$P \in C \Leftrightarrow d(P, F) + d(P, F') = 2a \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{PF}\right\| + \left\|\overrightarrow{PF'}\right\| = 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\|(\dot{x}_1 - c, \dot{x}_2)\right\| + \left\|(\dot{x}_1 + c, \dot{x}_2)\right\| = 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(\dot{x}_1 - c)^2 + \dot{x}_2^2} + \sqrt{(\dot{x}_1 + c)^2 + \dot{x}_2^2} = 2a \Leftrightarrow$$

elevando al cuadrado y simplificando:

$$\Leftrightarrow (a^2 - c^2)\dot{x}_1^2 + a^2\dot{x}_2^2 = a^4 - a^2c^2$$

y al ser a > c, llamando $a^2 - c^2 = b^2$ resulta al final:

$$\frac{\dot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\dot{x}_2^2}{b^2} = 1$$

que se llama ecuación cartesiana de la elipse referida a sus ejes.

Los puntos (a, 0) y (–a, 0) son los de corte con el eje focal y los (0, b) y (0, –b) con el eje no focal, y se llaman vértices.

Es inmediato comprobar que las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\cos\alpha \\ x_2 &= b\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{aligned}\right\} \alpha \in [0, 2\pi)$$

En efecto, sin más que sustituir estas expresiones en la ecuación de la elipse referida a sus ejes:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{b^2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha}{b^2} = \cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\,\alpha = 1$$

HIPERBOLA

Se denomina hipérbola al lugar geométrico H de los puntos $P \in E_2$ tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos dados llamados focos es igual a una constante positiva que denominaremos 2a.

Sean F y F' los focos y $2a \in \mathbb{R}^+$

$$H = \{P \in E_2 / |\, d(P, F) - d(P, F') \,| = 2a\}$$

Se llama distancia focal al número d(F, F') = 2c.

Observemos que

$$\forall\, A, B, C \in E : |\, d(A, B) - d(B, C) \,| \leq d(A, C)$$

en nuestro caso:

$$|\, d(F, P) - d(P, F') \,| \leq d(F, F') \Rightarrow a \leq c$$

Si a = c : $|\,d(F, P) - d(P, F')\,| = d(F, F')$, condición que verifican los puntos de la recta determinada por los focos y situados fuera del segmento F, F'.

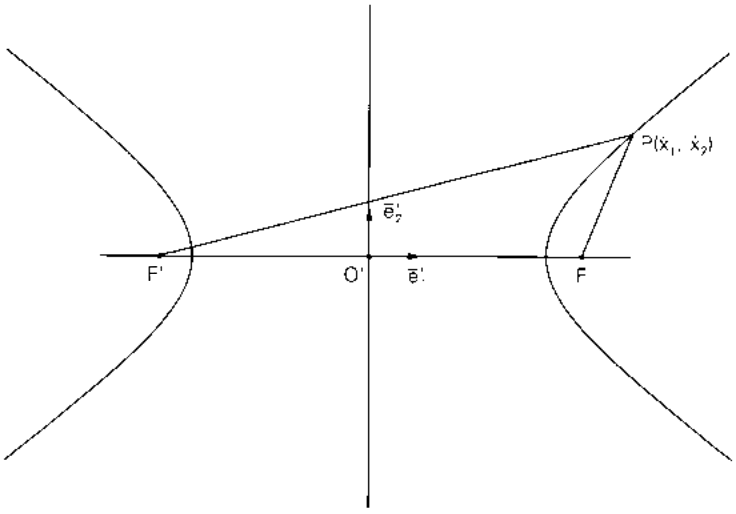
Si a > c la hipérbola no tendría ningún punto.

Luego en lo sucesivo supondremos a < c.

Se llama centro de la hipérbola el punto medio de sus focos, eje focal a la recta que determinan sus focos y eje no focal de la hipérbola a la recta perpendicular al eje focal por su centro. Los dos puntos de intersección del eje focal con la hipérbola se llaman vértices, son simétricos respecto al centro y su distancia a él es precisamente a.

Para determinar la ecuación cartesiana de la hipérbola utilizaremos el sistema de referencia ortogonal $R' = (O', B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$ donde O' es el centro de la hipérbola y $\bar{e}'_1$ y $\bar{e}'_2$ son los vectores directores de sus ejes.

En el sistema R' sean (–c, 0) y (c, 0) las coordenadas de F' y F respectivamente, (–a, 0) y (a, 0) serán las coordenadas de los vértices. Supongamos $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ las coordenadas de un punto P genérico de la hipérbola H.



$$P \in H \Leftrightarrow |d(P, F) - d(P, F')| = 2a \Leftrightarrow d(P, F) - d(P, F') = \pm 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(\dot{x}_1 - c)^2 + \dot{x}_2^2} - \sqrt{(\dot{x}_1 + c)^2 + \dot{x}_2^2} = \pm 2a$$

elevando al cuadrado dos veces y simplificando se obtiene:

$$(c^2 - a^2)\dot{x}_1^2 - a^2\dot{x}_2^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

el ser c > a, llamando $b^2 = c^2 - a^2$ y resulta:

$$\frac{\dot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\dot{x}_2^2}{b^2} = 1$$

llamada ecuación cartesiana de la hipérbola referida a sus ejes.

Las ecuaciones paramétricas de la hipérbola son:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a \operatorname{ch} t = a\frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ x_2 &= b \operatorname{sh} t = b\frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{aligned}\right\} \forall\, t \in \mathbb{R}$$

PARABOLA

Se denomina parábola al lugar geométrico C de los puntos $P \in E_2$ que equidistan de un punto F llamado foco y de una recta r llamada directriz.

$$C = \{P \in E_2 / d(P, F) = d(P, r)\}$$

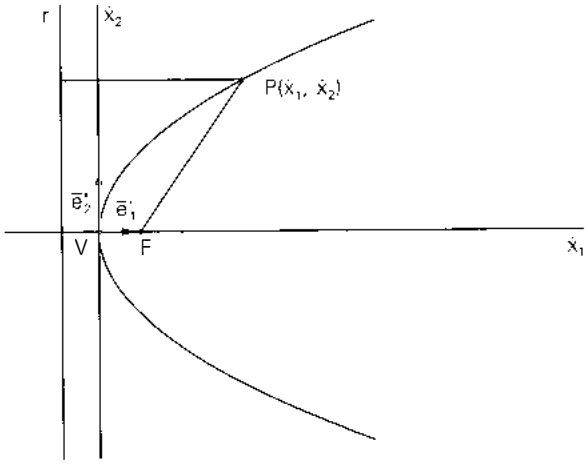
Se llama eje de la parábola a la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. El punto de intersección del eje con la parábola se llama vértice de ésta y lo denotaremos por V. Se llama parámetro de la parábola y lo representaremos por p a la distancia del foco a la directriz p = d(F, r).

Por estar V y F en el eje de la parábola que es perpendicular a la directriz será: d(V, F) = d(V, r) = p/2.

Para determinar la ecuación cartesiana de la parábola utilizaremos el siguiente sistema de referencia ortogonal:

$$R' = (O', B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\})$$

donde $O' = V$, $\bar{e}'_1 = \overrightarrow{VF}$ y $\bar{e}'_2$ es el vector director de la recta r.



En este sistema las coordenadas del foco son $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ y la ecuación de la directriz $r \equiv \dot{x}_1 = -\frac{p}{2}$ siendo $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ las coordenadas de un punto cualquiera de E_2 en el sistema R'.

Un punto P de coordenadas $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ pertenece a la parábola si

$$d(P, F) = d(P, r) \Leftrightarrow \sqrt{\left(\dot{x}_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + \dot{x}_2^2} = \frac{\dot{x}_1 + \frac{p}{2}}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\dot{x}_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + \dot{x}_2^2 = \left(\dot{x}_1 + \frac{p}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \dot{x}_2^2 = 2p\dot{x}_1$$

que es la ecuación cartesiana de la parábola.

Ejercicio 3

En el plano afín ordinario consideremos un sistema de referencia ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$.

Hallar la ecuación de la parábola C que tiene por foco el punto F(–1, 2) y por directriz la recta r de ecuación $x_1 + x_2 + 1 = 0$.

1.º) Respecto del sistema de referencia R.
2.º) Referida a sus ejes.

Solución

1.º) Utilizando la definición de parábola

$$P(x_1, x_2) \in C \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r) \Leftrightarrow \sqrt{(x_1+1)^2 + (x_2-2)^2} = \frac{x_1 + x_2 + 1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1+1)^2 + (x_2-2)^2 = \frac{(x_1 + x_2 + 1)^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 10x_2 + 10 = 0$$

ecuación de C en el sistema R.

2.º) Sabemos que referida a sus ejes, la ecuación de la parábola es $\dot{x}_2^2 = 2p\dot{x}_1$ donde p = d(F, r).

Hallamos $p = \dfrac{-1 + 2 + 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

luego en R', C tiene por ecuación $\dot{x}_2^2 = 2\sqrt{2}\,\dot{x}_1$.

Veamos cuál es el sistema R'.

El eje focal es la recta r' perpendicular a r y que pase por F : $r' \perp r \wedge F \in r' \Rightarrow r' \equiv x_1 - x_2 + 3 = 0$ y su vector director $\bar{e}'_1 = (1, 1)$.

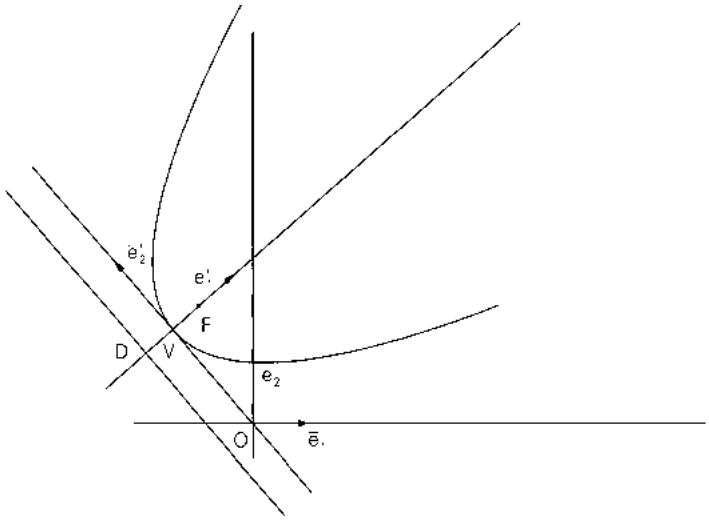
El otro eje es paralelo a la directriz r y tendrá por vector director $\bar{e}'_2 = (1, -1)$.

Si D es el punto de intersección de $r \wedge r'$, el vértice V que es el nuevo origen es el punto medio de D y F:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x_1 + x_2 + 1 = 0 \\ r' \equiv x_1 - x_2 + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D = (-2, 1) \text{ y por tanto } V = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Por tanto

$$R' = \left(O' = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right), B' = \{ \bar{e}'_1 = (1, 1), \bar{e}'_2 = (1, -1) \} \right)$$



Ejercicio 4

En el sistema de referencia ortonormal R = (O, B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$) consideremos la cónica C de ecuación $2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 3 = 0$.

1.º) Clasificarla.
2.º) Hallar su centro.
3.º) Hallar sus ejes y sus vértices.

Solución

1.º) La forma cuadrática asociada es $\omega(\bar{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ y su matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Los valores y vectores propios son:

$$\lambda_1 = 3 \Rightarrow V(\lambda_1) = L(\{(2, 1)\}), \qquad \bar{e}'_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow V(\lambda_2) = L(\{(1, -2)\}), \qquad \bar{e}'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

La matriz de paso de B a B' = $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$ es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Además

$$[b_1\ b_2] = [a_1\ a_2]\,P = [-12\ \ -12]\,P = \left[\frac{-36}{\sqrt{5}}\ \ \frac{12}{\sqrt{5}}\right]$$

Luego en R' = (O, B') la cónica C tiene por ecuación:

$$3\dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_2^2 - \frac{36}{\sqrt{5}}\dot{x}_1 + \frac{12}{\sqrt{5}}\dot{x}_2 + 3 = 0$$

Operando en esta ecuación:

$$3\left(\dot{x}_1 - \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(\dot{x}_2 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 15 = 0$$

y efectuando la traslación

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \dot{x}_1 - \frac{6}{\sqrt{5}} \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_2 - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\}, \quad O' = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

en el sistema R" = (O', B'), C se puede poner:

$$3\ddot{x}_1^2 - 2\ddot{x}_2^2 - 15 = 0$$

o equivalentemente:

$$\frac{\ddot{x}_1^2}{5} - \frac{\ddot{x}_2^2}{15/2} = 1$$

que es la ecuación reducida de una hipérbola.

2.º) Sabemos que el centro de la hipérbola es $O' = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ para hallar sus coordenadas respecto de R basta tener en cuenta que:

(1) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} 6/\sqrt{5} \\ 3/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego el centro de la hipérbola es el punto (3, 0) en el sistema de referencia R.

3.º) Los vértices son los puntos de coordenadas V(a, 0) y V'(–a, 0) respecto de R" $\wedge$ $a = \sqrt{5}$.

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \dot{x}_1 - \frac{6}{\sqrt{5}} \\ \ddot{x}_2 &= \dot{x}_2 - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \ddot{x}_1 + \frac{6}{\sqrt{5}} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x}_2 + \frac{3}{\sqrt{5}} \end{aligned} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ las coordenadas de los vértices respecto de R' son:

$$V = \left(\frac{11}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{y} \quad V' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

Utilizando de nuevo la relación matricial (1):

$V = (5, 1)$ y $V' = (1, -1)$ respecto de R.

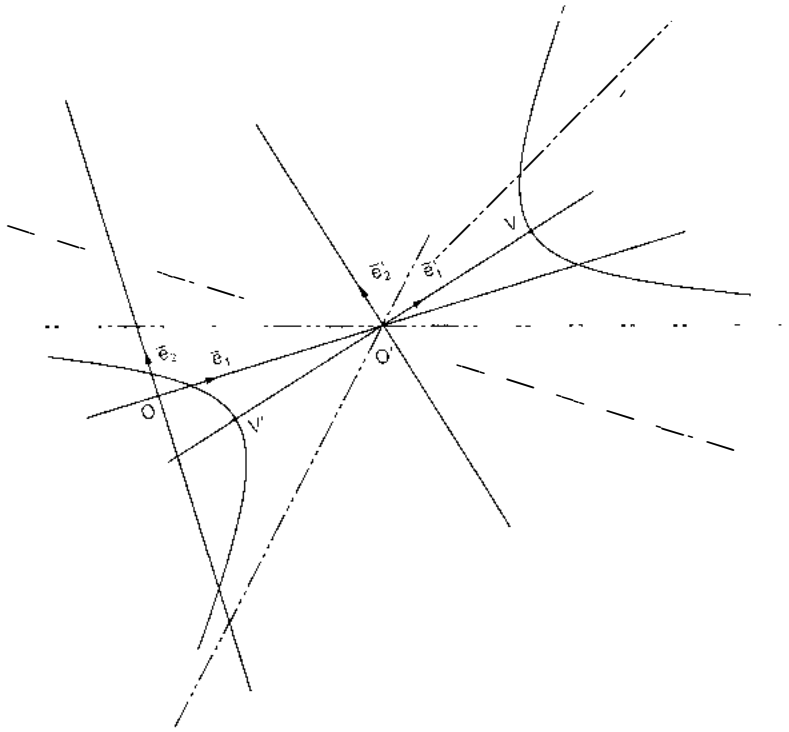
El eje focal es la recta que pasa por V y V', siendo su ecuación en R:

$$x_1 - 2x_2 - 3 = 0$$

El otro eje es la recta perpendicular al eje focal por el centro, cuya ecuación en R viene definida por:

$$2x_1 + x_2 - 6 = 0$$

Su representación gráfica será:



Tema XI

El espacio afín ordinario

1. EL ESPACIO AFIN ORDINARIO

Decimos que un conjunto E_3 está dotado de una estructura de espacio afín asociado al $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ si se define una aplicación $f: E_3 \times E_3 \to \mathbb{R}^3$ tal que cumpla los siguientes axiomas:

i) $\forall P \in E_3, \quad \forall \overline{v} \in \mathbb{R}^3 : \exists Q \in E_3 / f(P, Q) = \overline{v}$

ii) $\forall P, Q \in E_3 / f(P, Q) = \overline{0} : P = Q$

iii) $\forall P, Q, R \in E_3 : f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ (Relación de CHASLES).

E_3 recibe entonces el nombre de espacio afín ordinario y los elementos de E_3 se llaman puntos.

Observación

Evidentemente esta definición es totalmente análoga a la del plano afín ordinario con las únicas particularidades de que el conjunto E_2 es ahora el E_3 y en lugar del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ utilizamos ahora el $\mathbb{R}^3$.

En realidad, ambas definiciones responden a un tipo más general de estructura que denominamos espacio afín y que utiliza en su definicicón un conjunto E y un K-espacio vectorial V.

De esta analogía se desprende inmediatamente que en el espacio afín ordinario E_3 se cumplen las mismas propiedades de carácter general que enunciábamos para el plano afín ordinario.

Asimismo, sin necesidad de volver a enunciarlas adoptaremos para E_3 las mismas convenciones que para E_2.

2. SISTEMAS DE REFERENCIA CARTESIANOS. COORDENADAS DE UN PUNTO

Definición 2.1

Llamamos sistema de referencia cartesiano en el espacio afín ordinario E_3 a un par $R = (O, B)$ formado por un punto $O \in E_3$ y una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^3$.

Al punto $O \in E_3$ se le donomina origen del sistema de referencia cartesiano R.

Definición 2.2

Llamamos coordenadas cartesianas de un punto $P \in E_3$ respecto al sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ a las coordenadas del vector $\overline{OP} \in \mathbb{R}^3$ respecto a la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Según esto $P = O + \overline{OP} = O + x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ donde $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ son las coordenadas cartesianas del punto $P \in E_3$ en el sistema de referencia $R = (O, B)$ y cuando no haya lugar a confusión escribiremos abreviadamente $P(x_1, x_2, x_3)$.

Observación

La expresión matricial que nos da el cambio de sistemas de referencia cartesianos en E_3 es análoga a la obtenida para E_2 con los simples cambios debidos a la dimensión del $\mathbb{R}$-espacio vectorial asociado.

3. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO AFIN ORDINARIO

Los conceptos de recta y plano en el espacio afín ordinario pertenecen a uno más general de subespacio afín que definimos a continuación.

Definición 3.1

Consideremos un punto $A \in E_3$ del espacio afín ordinario y un subespacio vectorial W del $\mathbb{R}$-espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^3$. Llamamos subespacio

afín o variedad lineal afín que pasa por A y tiene dirección W al conjunto de puntos

$$L = \{A + \bar{x} \,/\, \bar{x} \in W\} \quad \subset E_3$$

que se representa abreviadamente por L = A + W.

Los subespacios afines cuya dirección tiene dimensión uno se llaman rectas.

Los subespacios afines cuya dirección tiene dimensión dos se llaman planos.

Definición 3.2

Elegido un sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ en el espacio afín ordinario, llamamos ejes de referencia correspondientes al sistema de referencia R a las rectas $O + L(\{\bar{e}_1\})$, $O + L(\{\bar{e}_2\})$ y $O + L(\{\bar{e}_3\})$ y planos de referencia correspondientes al sistema de referencia R a los planos $O + L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\})$, $O + L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\})$ y $O + L(\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\})$.

4. ECUACIONES VECTORIAL, PARAMETRICAS Y CARTESIANAS DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO AFIN ORDINARIO

Consideremos una recta L = A + W del espacio afín ordinario en el que suponemos elegido un sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$. Sea $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ un vector director de L tal que $W = L(\{\bar{w}\})$ y P un punto genérico de E_3. Entonces:

$$P \in A + W \Leftrightarrow \overline{AP} \in W \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \overline{AP} = \lambda \,.\, \bar{w} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P = A + \lambda \,.\, \bar{w} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.1

Llamamos ecuación vectorial de la recta L = A + W que pasa por el punto $A \in E_3$ y tiene dirección $W = L(\{\bar{w}\})$ a la expresión

$$P = A + \lambda \,.\, \bar{w} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Supongamos ahora $P(x_1, x_2, x_3)$, $A(a_1, a_2, a_3)$ en el sistema de referencia cartesiano R elegido y $\bar{w}(w_1, w_2, w_3)$ en la base B asociada a R. Entonces:

$$P = A + \lambda \cdot \bar{w} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{AP} = \lambda \cdot \bar{w} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \overset{\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OP} = \overline{OA} + \lambda \cdot \bar{w} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda w_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda w_3 \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.2

Llamamos ecuaciones paramétricas de la recta L = A + W en el sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ a las expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda w_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda w_3 \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eliminando ahora en el sistema de ecuaciones paramétricas de la recta L respecto al sistema de referencia R al parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ indeterminado, obtendremos un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{array}\right\}$$

que establece las condiciones necesarias y suficientes para que un punto $P(x_1, x_2, x_3)$ del espacio afín ordinario pertenezca a la recta L.

Definición 4.3

Al sistema de ecuaciones así obtenido

$$\left.\begin{array}{r} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{array}\right\}$$

lo denominamos sistema de ecuaciones cartesianas de la recta L = A + W en el sistema de referencia cartesiano R.

Ejercicio 1

Realizar la transformación razonada de las ecuaciones paramétricas de una recta L = A + W en las ecuaciones cartesianas, en el sistema de referencia R = (O, B = $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$).

Solución

1) Consideremos las ecuaciones paramétricas de L en R:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda w_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda w_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Despejando formalmente λ en las tres ecuaciones e igualando tenemos:

$$\lambda = \frac{x_1 - a_1}{w_1} = \frac{x_2 - a_2}{w_2} = \frac{x_3 - a_3}{w_3} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

De la observación de este resultado tenemos los siguientes casos:

a) $w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0$, $w_3 \neq 0$. Entonces:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x_1 - a_1}{w_1} = \frac{x_2 - a_2}{w_2} = \frac{x_3 - a_3}{w_3}$$

que es el sistema de ecuaciones cartesianas de L respecto a R en este caso, y simplemente operando y reordenando términos queda en su forma general.

b) $w_1 \neq 0$, $w_2 \neq 0$, $w_3 = 0$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda w_2 \\ x_3 &= a_3 + \lambda w_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \underset{w_3 = 0}{\Leftrightarrow} \left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 &= a_2 + \lambda w_2 \\ x_3 &= a_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x_1 - a_1}{w_1} &= \frac{x_2 - a_2}{w_2} \\ x_3 &= a_3 \end{aligned}\right\}$$

y ahora basta operar y reordenar términos para obtener las ecuaciones cartesianas de L respecto a R, en su forma general.

c) $w_1 \neq 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda w_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda w_3 \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \underset{w_2 = w_3 = 0}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda w_1 \\ x_2 = a_2 \\ x_3 = a_3 \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = a_2 \\ x_3 = a_3 \end{array}\right\}$$

que son las ecuaciones cartesianas de L respecto a R, ya en su forma general.

El resto de los casos posibles se reducen a uno de los ya estudiados simplemente cambiando adecuadamente el orden de las ecuaciones.

Observación

Cuando la recta L está definida por dos puntos distintos A, B $\in E_3$ el vector $\overline{AB} \in \mathbb{R}^3$ es vector director de la recta L y entonces haciendo uso de esta observación, se deducen con facilidad las distintas ecuaciones de la recta $L = A + L(\{\overline{AB}\})$.

Consideremos ahora un plano $\Pi = A + W$ del espacio afín ordinario E_3 en el que suponemos elegido un sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$. Sea $W = L(\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\})$ y P un punto genérico de E_3. Entonces:

$$P \in A + W \Leftrightarrow \overline{AP} \in W \Leftrightarrow \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \,/\, \overline{AP} = \lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow P = A + \lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Definición 4.4

Llamamos ecuación vectorial del plano $\Pi = A + W$ que pasa por el punto $A \in E_3$ y tiene dirección $W = L(\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\})$ a la expresión

$$P = A + \lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Supongamos ahora $P(x_1, x_2, x_3)$, $A(a_1, a_2, a_3)$ en el sistema de referencia cartesiano R elegido y $\bar{w}_1(w_{11}, w_{12}, w_{13})$, $\bar{w}_2(w_{21}, w_{22}, w_{23})$ en la base B asociada a R. Entonces:

$$P = A + \lambda_1\bar{w}_1 + \lambda_2\bar{w}_2 \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AP} = \lambda_1\bar{w}_1 + \lambda_2\bar{w}_2 \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \overset{\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OP} = \overline{OA} + \lambda_1\bar{w}_1 + \lambda_2\bar{w}_2 \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda_1 w_{11} + \lambda_2 w_{21} \\ x_2 = a_2 + \lambda_1 w_{12} + \lambda_2 w_{22} \\ x_3 = a_3 + \lambda_1 w_{13} + \lambda_2 w_{23} \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.5

Llamamos ecuaciones paramétricas del plano $\Pi = A + W$ en el sistema de referencia cartesiano R a las expresiones

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 + \lambda_1 w_{11} + \lambda_2 w_{21} \\ x_2 = a_2 + \lambda_1 w_{12} + \lambda_2 w_{22} \\ x_3 = a_3 + \lambda_1 w_{13} + \lambda_2 w_{23} \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Eliminando ahora en el sistema de ecuaciones paramétricas del plano Π respecto al sistema de referencia R los parámetros $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ indeterminados obtendremos una ecuación

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

que establece la condición necesaria y suficiente para que un punto $P(x_1, x_2, x_3)$ del espacio afín ordinario pertenezca al plano Π.

Definición 4.6

A la ecuación así obtenida

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

la denominamos ecuación cartesiana del plano $\Pi = A + W$ en el sistema de referencia cartesiano R.

Ejercicio 2

Realizar la transformación razonada de unas ecuaciones paramétricas de un plano $\Pi = A + W$ en una ecuación cartesiana de Π, en el sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$.

Solución

Consideremos las ecuaciones paramétricas de Π en R:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \lambda_1 w_{11} + \lambda_2 w_{21} \\ x_2 &= a_2 + \lambda_1 w_{12} + \lambda_2 w_{22} \\ x_3 &= a_3 + \lambda_1 w_{13} + \lambda_2 w_{23} \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 - a_1 &= \lambda_1 w_{11} + \lambda_2 w_{21} \\ x_2 - a_2 &= \lambda_1 w_{12} + \lambda_2 w_{22} \\ x_3 - a_3 &= \lambda_1 w_{13} + \lambda_2 w_{23} \end{aligned}\right\} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AP} = \lambda_1 \bar{w}_1 + \lambda_2 \bar{w}_2 \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \overset{\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\} \text{ libre}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & w_{11} & w_{21} \\ x_2 - a_2 & w_{12} & w_{22} \\ x_3 - a_3 & w_{13} & w_{23} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} w_{12} & w_{22} \\ w_{13} & w_{23} \end{vmatrix}(x_1 - a_1) + \begin{vmatrix} w_{13} & w_{23} \\ w_{11} & w_{21} \end{vmatrix}(x_2 - a_2) + \begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{vmatrix}(x_3 - a_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} w_{12} & w_{22} \\ w_{13} & w_{23} \end{vmatrix} x_1 + \begin{vmatrix} w_{13} & w_{23} \\ w_{11} & w_{21} \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} a_1 & w_{11} & w_{21} \\ a_2 & w_{12} & w_{22} \\ a_3 & w_{13} & w_{23} \end{vmatrix} = 0$$

que resulta ser una ecuación cartesiana del plano Π en el sistema de referencia R, ya en su forma general.

Observación

Cuando el plano Π está definido por tres puntos no alineados A, B, C ∈ E_3, la dirección de Π tiene como base el par de vectores $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ∈ $\mathbb{R}^3$. Entonces, haciendo uso de esta observación se deducen con facilidad las distintas ecuaciones del plano Π = A + L({$\overline{AB}$, $\overline{AC}$}).

Ejercicio 3

Consideremos elegido un sistema de referencia R = (O, B = {$\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$}) en el espacio afín ordinario E_3, y los puntos A(1, 0, 2), B(0, 0, 1), C(1, 0, 0) de E_3. Hallar unas ecuaciones vectoriales, paramétricas y cartesianas del plano Π definido por estos tres puntos.

Solución

Sea P(x_1, x_2, x_3) un punto genérico de E_3. Entonces:

$$P = A + \lambda_1 \overrightarrow{AB} + \lambda_2 \overrightarrow{AC} \qquad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

es una ecuación vectorial del plano Π.

Teniendo en cuenta que:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = \bar{e}_3 - (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_3) = -\bar{e}_1 - \bar{e}_3 \\ \overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA} = \bar{e}_1 - (\bar{e}_1 + 2\bar{e}_3) = -2\bar{e}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &\overline{AB}\ (-1, 0, -1) \\ &\overline{AC}\ (0, 0, -2) \end{aligned}\right\}$$

unas ecuaciones paramétricas de Π en el sistema de referencia R son:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - \lambda_1 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

La ecuación cartesiana la obtendremos a partir de la condición de dependencia lineal de $\overline{AP}$ respecto de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Entonces:

$$\overline{AP} = \lambda_1 \overline{AB} + \lambda_2 \overline{AC} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - 1 & -1 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 - 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

que es la ecuación cartesiana buscada.

Resulta pues que $\Pi = O + L(\{\overline{e}_1, \overline{e}_3\})$. Este resultado se podía haber adelantado sin más que considerar que la segunda coordenada de los tres puntos dados en el sistema de referencia R era nula.

5. PARALELISMO DE RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO AFIN ORDINARIO

Definición 5.1

Consideremos dos subespacios afines (rectas o planos) $L = A + W$, $L' = A' + W'$ en el espacio afín ordinario E_3. Decimos que $L = A + W$ y $L' = A' + W'$ son paralelos si se cumple que $W \subset W'$ o $W' \subset W$.

En general se representa por $L \parallel L'$ el paralelismo entre los subespacios L y L', pero en el caso en que las dimensiones son distintas también se suele representar por $L \langle | L'$ ($L \parallel L' \wedge \dim(W) = 1 \wedge \dim(W') = 2$).

Observación

Del análisis de la definición se desprende que consideramos como casos de paralelismo los de las rectas coincidentes, planos coincidentes y recta contenida en un plano.

Ejercicio 4

Consideremos elegido un sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\})$ en el espacio afín ordinario E_3, una recta $L = A + W$ tal que

$W = L(\{\bar{w}\})$ con $\bar{w}(w_1, w_2, w_3)$, y dos planos $\Pi' = A' + W'$ y $\Pi'' = A'' + W''$ de ecuaciones cartesianas respectivas

$\Pi')\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0$
$\Pi'')\ a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 + d'' = 0$

en el sistema de referencia R. Deducir las condiciones de paralelismo entre la recta L y el plano Π' y entre los planos Π' y Π''.

Solución

Teniendo en cuenta la definición tenemos:

a)

$$L \langle | \Pi' \underset{\substack{\dim(W) = 1 \\ \dim(W') = 2}}{\Leftrightarrow} W = L(\{\bar{w}\}) \subset W' \Leftrightarrow \bar{w} \in W' \Leftrightarrow A' + \bar{w} \in \Pi'$$

Sea $A'(a'_1, a'_2, a'_3)$. Entonces $A' + \bar{w} = (a'_1 + w_1, a'_2 + w_2, a'_3 + w_3)$ en R

$$L \langle | \Pi' \Leftrightarrow A' + \bar{w} \in \Pi' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a'(a'_1 + w_1) + b'(a'_2 + w_2) + c'(a'_3 + w_3) + d' = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a'w_1 + b'w_2 + c'w_3 + \overbrace{(a'a'_1 + b'a'_2 + c'a'_3 + d')}^{A' \in \Pi'} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a'w_1 + b'w_2 + c'w_3 = 0$$

que es la condición buscada de paralelismo de recta y plano.

b) Obtendremos en primer lugar una base de W' dirección del plano Π', mediante unas ecuaciones paramétricas de Π' en el sistema de referencia R.

En efecto, consideremos $c' \neq 0$ sin perder generalidad:

$$a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 \\ x_2 = \lambda_2 \\ x_3 = -\dfrac{d'}{c'} - \lambda_1 \dfrac{a'}{c'} - \lambda_2 \dfrac{b'}{c'} \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Por tanto, $W' = L(\{\bar{w}_1'(c', 0, -a'), \bar{w}_2'(0, c', -b')\})$ dirección de Π'.

Análogamente $W'' = L(\{\bar{w}_1''(c'', 0, -a''), \bar{w}_2''(0, c'', -b'')\})$ dirección de Π''.

Teniendo en cuenta ahora la definición de paralelismo:

$$\Pi \parallel \Pi'' \underset{\dim(W') = \dim(W)}{\Leftrightarrow} W' = W'' \Leftrightarrow$$

$$\overset{\bar{w}_1' \neq \bar{0}}{\overset{\bar{w}_2' \neq \bar{0}}{\Leftrightarrow}} L(\{\bar{w}_1'(c', 0, -a'), \bar{w}_2'(0, c', -b')\}) = L(\{\bar{w}_1''(c'', 0, -a''), \bar{w}_2''(0, c'', -b'')\}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c', 0, -a') = \lambda(c'', 0, -a'') \wedge (0, c', -b') = \mu(0, c'', -b'') \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} - \{0\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a', b', c') = \lambda \,.\, (a'', b'', c'') \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

que es una condición buscada de paralelismo de planos.

Observación

Nótese que, como resultado intermedio de este ejercicio, hemos obtenido una base de la dirección W de un plano Π dado por una ecuación cartesiana en el sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3. Es decir:

$$\Pi)\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \quad \text{con } c \neq 0 \Rightarrow \Rightarrow W = L(\{\bar{w}_1(c, 0, -a), \bar{w}_2(0, c, -b)\})$$

Para los casos $a \neq 0 \vee b \neq 0$ se obtienen los correspondientes $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in W$ con una simple permutación circular de subíndices en x_1, x_2, x_3.

6. POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANO EN EL ESPACIO AFIN ORDINARIO

Consideremos la recta L y el plano Π de ecuaciones cartesianas respectivas

$$L)\ \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{cases} \qquad \Pi)\ a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 + d'' = 0$$

en el sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ del espacio afín ordinario E_3.

Proposición 6.1

Considerando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

tenemos:

1) $L \cap \Pi = \varnothing \Leftrightarrow r(A) = 2 \neq r(B) = 3$. (L y Π no tienen ningún punto en común).
2) $L \cap \Pi = P \Leftrightarrow r(A) = 3 = r(B)$. (L y Π tienen un sólo punto en común.
3) $L = L \cap \Pi \Leftrightarrow r(A) = 2 = r(B)$. (L está contenida en Π).

Demostración

$L \cap \Pi$ es el conjunto de puntos del espacio afín ordinario cuyas coordenadas en el sistema de referencia R son solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \\ a''x_1 + b''x_2 + c''x_3 + d'' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que por ser L una recta, y sus puntos solución del sistema de ecuaciones cartesianas de L:

$$r\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$$

Basta aplicar el teorema de ROUCHÉ-FROBENIUS para concluir que,

1) $r(A) = 2 \neq r(B) = 3 \Leftrightarrow$ (1) incompatible $\Leftrightarrow L \cap \Pi = \varnothing$.
2) $r(A) = 3 = r(B) \Leftrightarrow$ (1) compatible determinado $\Leftrightarrow L \cap \Pi = P$ (un sólo punto).
3) $r(A) = 2 = r(B) \Leftrightarrow$ (1) compatible indeterminado y la ecuación del plano Π es combinación lineal del sistema de ecuaciones de $L \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow L = L \cap \Pi$.

7. POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS EN EL ESPACIO AFIN ORDINARIO

Consideremos dos planos Π y Π' de ecuaciones cartesianas respectivas

$$\Pi)\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \qquad \Pi')\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0$$

en el sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ del espacio afín ordinario E_3.

Proposición 7.1

Considerando la matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

tenemos:

1) $\Pi \cap \Pi' = \varnothing \Leftrightarrow r(A) = 1 \neq r(B) = 2$. ($\Pi$ y Π' no tienen ningún punto en común).
2) $\Pi \cap \Pi' = L \Leftrightarrow r(A) = 2 = r(B)$. ($\Pi$ y Π' tienen una recta en común.
3) $\Pi = \Pi' = \Pi \cap \Pi' \Leftrightarrow r(A) = 1 = r(B)$. ($\Pi$ y Π' coinciden).

Demostración

$\Pi \cap \Pi'$ es el conjunto de puntos del espacio afín ordinario cuyas coordenadas en el sistema de referencia R son solución del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius tenemos:

1) $r(A) = 1 \neq r(B) = 2 \Leftrightarrow$ (2) incompatible $\Leftrightarrow \Pi \cap \Pi' = \varnothing$.
2) $r(A) = 2 = r(B) \Leftrightarrow$ (2) compatible indeterminado (el conjunto de soluciones depende de un parámetro real) $\Leftrightarrow \Pi \cap \Pi' = L$ (una recta).
3) $r(A) = 1 = r(B) \Leftrightarrow$ (2) compatible indeterminado (el conjunto de soluciones depende de dos parámetros reales) $\Leftrightarrow \Pi \cap \Pi' = \Pi = \Pi'$ (un plano).

Obsevación

Teniendo en cuenta esta proposición y el resultado obtenido en el ejercicio anterior, $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, obtenemos una nueva caracterización del paralelismo de planos en el espacio afín ordinario, atendiendo ahora a sus posiciones relativas: «Dos planos Π y Π' son paralelos en el espacio afín ordinario si y sólo si no tienen ningún punto en común o son coincidentes».

8. HAZ DE PLANOS

Proposición 8.1

Consideremos los planos Π y Π' de ecuaciones cartesianas respectivas

$$\Pi)\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \qquad \Pi')\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0$$

en el sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ del espacio afín ordinario E_3. Supongamos que $\Pi \cap \Pi' = L$ (una recta). Entonces un plano θ contendrá dicha recta L si y sólo si su ecuación cartesiana en el sistema de referencia R es una combinación lineal no nula de las ecuaciones cartesianas respectivas de Π y Π', de forma que:

$$\theta)\ \lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d) + \gamma(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d') = 0$$
$$\text{con } (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Demostración

Esta demostración es totalmente análoga a la de la proposición 7.1 del Tema IX que estudia el haz de rectas en el plano afín ordinario E_2, con la única particularidad propia de la dimensión.

Definición 8.1

El conjunto de planos que contienen la recta $L = \Pi \cap \Pi'$ y que en las condiciones de la proposición anterior tienen una ecuación cartesiana en el sistema de referencia R de la forma

$$\lambda(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d) + \gamma(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d') = 0$$
$$\text{con } (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

se denomina haz de planos de base la recta L.

Observación

Como ocurría en el caso del plano afín ordinario, ahora deberíamos de estudiar las aplicaciones afines (aplicaciones de E_3 en sí mismo que transforman subespacios afines en subespacios afines y conservan el paralelismo).

Ejercicio 5

Consideremos en el espacio afín ordinario E_3 una recta L de ecuaciones cartesianas

$$L) \quad \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$

en un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

a) Deteminar el plano Π que contiene a la recta L y pasa por el origen del sistema de referencia R.

b) Determinar el plano Π' que contiene a la recta L y es paralelo a otra recta L' que contiene a los puntos $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 1, 0)$ de E_3.

Solución

a) Determinemos previamente el haz de planos que contiene a la recta L. Un plano genérico de este haz es:

$$\theta) \ \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + 1) + \gamma(2x_1 + x_2 - 1) = 0 \quad \text{con } (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ (\lambda + 2\gamma)x_1 + (\lambda + \gamma)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - \gamma) = 0 \quad \text{con } (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

en el sistema de referencia R.

Utilizando ahora la condición $O \in \Pi$ tenemos:

$$O \in \Pi \Leftrightarrow \ (\lambda + 2\gamma) \cdot 0 + (\lambda + \gamma) \cdot 0 + \lambda \cdot 0 + (\lambda - \gamma) = 0 \Leftrightarrow \ \lambda = \gamma$$
$$\text{con } (\lambda, \gamma) \neq (0, 0)$$

Por tanto

$$\Pi) \ 3\lambda x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda x_3 = 0 \qquad \text{con } \lambda \neq 0 \Leftrightarrow \ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

que es la ecuación del plano Π buscado.

b) Un vector director de la recta L' = A' + W' será:

$$P, Q \in L' \Rightarrow \overline{PQ} \in W' \qquad \text{con } \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP} \Rightarrow \overline{PQ}\,(-1, 1, 0) \text{ en la base B.}$$

El plano Π' pertenecerá al haz de planos de base la recta L, cuya ecuación hemos hallado en el apartado a):

$$\theta)\ (\lambda + 2\gamma)x_1 + (\lambda + \gamma)x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - \gamma) = 0 \qquad \text{con } (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

en el sistema de referencia R.

Aplicando ahora la condición de paralelismo $L \langle | \Pi'$ y haciendo uso a este respecto del resultado obtenido en el ejercicio anterior, tenemos:

$$L \langle | \Pi' \Leftrightarrow (\lambda + 2\gamma) \cdot (-1) + (\lambda + \gamma) \cdot 1 + \lambda \cdot 0 = 0$$
$$\text{con } (\lambda, \gamma) \neq (0, 0) \Leftrightarrow \gamma = 0,\ \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por tanto:

$$\Pi')\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + \lambda x_3 + \lambda = 0 \qquad \text{con } \lambda \neq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$$

que es la ecuación del plano Π' buscado.

9. EL ESPACIO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO

Introduciremos a continuación una métrica en el espacio afín ordinario.

Definición 9.1

Denominamos espacio afín euclídeo ordinario al espacio afín ordinario E_3 en el que el $\mathbb{R}$-espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^3$ es euclídeo y el producto escalar en él definido es el usual.

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i, \qquad \forall\, \overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \qquad \forall\, \overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$$

Proposición 9.1

Consideremos el espacio afín euclídeo ordinario E_3 y la norma $\| \ \|$ asociada al producto escalar usual definido en $\mathbb{R}^3$. Entonces la aplicación

$$d : E_3 \times E_3 \to \mathbb{R} \text{ tal que } d(P, Q) = \| \overline{PQ} \| \qquad \forall P, Q \in E_3$$

es una distancia sobre E_3.

Así E_3 queda estructurado como un espacio métrico.

Demostración

Esta demostración es totalmente análoga a la correspondiente proposición 8.1 del Tema IX.

Definición 9.2

A la distancia o métrica d definida sobre E_3 en la proposición 9.1 se le denomina distancia o métrica euclídea.

10. SISTEMAS DE REFERENCIA EN EL ESPACIO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO

Definición 10.1

Un sistema de referencia cartesiano $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ del espacio afín euclídeo ordinario se dice ortogonal (ortonormal) si la base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ asociada es ortogonal (ortonormal).

A los sistemas de referencia cartesianos ortonormales también se les denomina rectangulares.

Proposición 10.1

Sea $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ un sistema de referencia cartesiano ortonormal del espacio afín euclídeo ordinario E_3 y consideremos dos puntos

cualesquiera $P(x_1, x_2, x_3) \in E_3$ y $Q(y_1, y_2, y_3) \in E_3$ en dicho sistema de referencia R. Entonces:

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(y_i - x_i)^2}$$

Demostración

Esta demostración es análoga a la de la correspondiente proposición 9.1 del Tema IX con la única particularidad del cambio de dimensión.

11. ORTOGONALIDAD EN EL ESPACIO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO

La formalización de la noción de perpendicularidad u ortogonalidad en el espacio físico exige, como veremos, el enunciado de dos definiciones, aplicables alternativamente según los casos.

Definición 11.1

Decimos que un plano $\Pi = A + W$ del espacio afín euclídeo ordinario E_3 es ortogonal a un vector no nulo $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ cuando la dirección W de Π y el vector $\bar{v}$ son ortogonales.

Ejercicio 6

Dado un plano $\Pi = A + W$ definido por su ecuación cartesiana

$$\Pi)\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

en un sistema de referencia ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ y el vector no nulo $\bar{v}(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ en la base B asociada a R. Hallar una condición necesaria y suficiente para que el plano Π sea ortogonal al vector $\bar{v}$.

Solución

Supondremos sin pérdida de generalidad que $c \neq 0$. Entonces aplicando el resultado intermedio obtenido en un ejercicio anterior

$$\Pi \perp \bar{v} \Leftrightarrow W \perp \bar{v} \underset{\uparrow}{\Leftrightarrow} \bar{w}_1 \perp \bar{v} \wedge \bar{w}_2 \perp \bar{v} \overset{\text{R ortonormal}}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}}$$

$$W = L(\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}) \quad \text{con } \bar{w}_1(c, 0, -a),\ \bar{w}_2(0, c, -b)$$

$$\Leftrightarrow cv_1 - av_3 = 0 \wedge cv_2 - bv_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} c & v_3 \\ a & v_1 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} c & v_3 \\ b & v_2 \end{vmatrix} = 0 \underset{c \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (v_1, v_3) = \lambda(a, c) \\ (v_2, v_3) = \mu(b, c) \end{matrix}\right\} \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} v_1 = \lambda \cdot a \\ v_3 = \lambda \cdot c \\ v_2 = \mu \cdot b \\ v_3 = \mu \cdot c \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda = \mu \\ v_1 = \lambda \cdot a \\ v_2 = \lambda \cdot b \\ v_3 = \lambda \cdot c \end{matrix}\right\} \underset{\bar{v} \neq \bar{0}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (v_1, v_2, v_3) = \lambda \cdot (a, b, c) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

que es la condición buscada.

Observación

Según este resultado, el vector de coordenadas (a, b, c) en la base B es ortogonal al plano de ecuación cartesiana

$$\Pi)\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

en el sistema de referencia R.

Definición 11.2a

Decimos que dos subespacios afines $L = A + W$ y $L' = A' + W'$ (rectas o planos) del espacio afín euclídeo E_3, cuyas dimensiones cumplen la condición $\dim(W) + \dim(W') \leq 3$, son ortogonales si sus direcciones respectivas son ortogonales, es decir

$$L \perp L' \Leftrightarrow W \perp W'$$

Observación

Dos son los casos posibles de aplicación de la definición dada:

1) L y L' son rectas: En este caso la ortogonalidad de L y L' está caracterizada por la ortogonalidad de dos vectores directores respectivos, condición de fácil aplicación.
2) L y L' son una recta y un plano respectivamente: En este caso, es aplicable la condición de ortogonalidad de un plano y un vector no nulo encontrada en el ejercicio anterior.

Definición 11.2b

Decimos que dos planos $\Pi = A + W$ y $\Pi' = A' + W'$ ($\dim(W) + \dim(W') = 4 > 3$) del espacio afín euclídeo ordinario E_3 son ortogonales si se cumple la condición $W^{\perp} \perp W'^{\perp}$, es decir

$$\Pi \perp \Pi' \Leftrightarrow W^{\perp} \perp W'^{\perp}$$

Consecuencia inmediata de la definición y del resultado obtenido en el ejercicio anterior sobre la ortogonalidad de un plano y un vector no nulo es:

Dados dos planos por sus ecuaciones cartesianas respectivas en un sistema de referencia ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3

$$\Pi)\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \qquad \Pi')\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0$$

entonces:

$$\Pi \perp \Pi' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

12. PROYECCION ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN SUBESPACIO AFIN DEL ESPACIO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO. DISTANCIA DE UN PUNTO A UN SUBESPACIO AFIN

Los dos problemas estudiados en esta cuestión resultan tener una solución común.

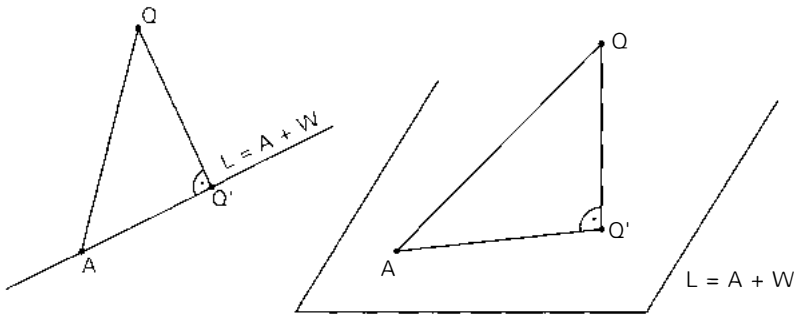
Los dos tipos de subespacios afines a tener en cuenta en esta cuestión son las rectas y los planos de E_3. El desarrollo de la cuestión es totalmente análogo en ambos casos al de la cuestión correspondiente del plano ordi-

nario, con una sencilla excepción en el caso de los planos debida a su dimensión.

Proposición 12.1

Consideremos un subespacio afín (recta o plano) $L = A + W$ y un punto $Q \in E_3$ en el espacio afín euclídeo ordinario. Entonces existe un único punto $Q' \in L$ tal que $\overline{Q'A} = P_W(\overline{QA})$ y equivalentemente $\overline{QQ'} \perp L$.

Demostración



a) En el caso de que L es una recta esta demostración es totalmente análoga a la de la correspondiente proposición 11.1 del Tema IX.

b) Veamos el caso en que L es un plano:

Demostraremos previamente la existencia de $Q' \in L$:

Sea $W = L(\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\})$ donde $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\} \subset \mathbb{R}^3$ es un sistema de vectores ortogonal.

Teniendo en cuenta la teoría de ortogonalidad en espacios vectoriales euclídeos, tenemos que

$$P_W(\overline{QA}) = \frac{<\overline{QA}, \bar{w}_1>}{\|\bar{w}_1\|^2} \cdot \bar{w}_1 + \frac{<\overline{QA}, \bar{w}_2>}{\|\bar{w}_2\|^2} \cdot \bar{w}_2 \in W$$

y entonces:

$$Q' = A - P_W(\overline{QA}) \in L \Leftrightarrow \overline{Q'A} = P_W(\overline{QA})$$

y de aquí la existencia.

Demostraremos ahora la equivalencia $\overline{Q'A} = P_W(\overline{QA}) \Leftrightarrow \overline{QQ'} \perp L$:

$$\overline{Q'A} = P_W(\overline{QA}) \Leftrightarrow \overline{QA} - \overline{Q'A} \perp W \Leftrightarrow \overline{QA} + \overline{AQ'} \perp W \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{QQ'} \perp W \Leftrightarrow \overline{QQ'} \perp L$$

Veamos ahora la unicidad. Para ello consideremos la existencia de otro punto $Q'' \in L$ tal que $\overline{QQ''} \perp L$:

$$\overline{QQ'} \perp L \wedge \overline{QQ''} \perp L \Rightarrow \overline{QQ'} \perp W \wedge \overline{QQ''} \perp W \Rightarrow \overline{QQ'} - \overline{QQ''} \perp W \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{QQ'} + \overline{Q''Q} \perp W \Rightarrow \overline{Q''Q'} \perp W \underset{Q'' \in L \wedge Q' \in L \Rightarrow \overline{Q''Q'} \in W}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \overline{Q''Q'} = \overline{0} \Rightarrow Q'' = Q'$$

y de aquí la unicidad.

Definición 12.1

Al punto $Q' = A + P_W(\overline{QA}) \in L$ se le denomina proyección ortogonal del punto $Q \in E_3$ sobre el subespacio afín L (recta o plano) y lo representamos por $P_L(Q)$.

Observaciones

Consecuencias inmediatas de la proposición 12.1 son:

1) Si $Q \in L$, entonces $P_L(Q) = Q$.
2) El punto $Q' = P_L(Q)$ es independiente del punto $A \in L$ utilizado en la definición del subespacio afín L.

Definición 12.2

Consideremos un subespacio afín (recta o plano) $L = A + W$ y un punto $Q \in E_3$ del espacio afín euclídeo ordinario. Llamamos distancia del punto Q al subespacio afín L al número real inf $\{d(Q, P) / P \in L\}$ y la representaremos por $d(Q, L)$.

Proposición 12.2

Consideremos un subespacio afín L = A + W (recta o plano), un punto $Q \in E_3$ del espacio afín euclídeo ordinario y su proyección $Q' = P_L(Q)$ sobre L. Entonces:

$$d(Q, L) = d(Q, Q')$$

Demostración

Esta demostración es totalmente análoga en ambos casos (recta o plano) a la demostración de la correspondiente proposición 11.2 del Tema IX.

Observación

Consecuencia inmediata de lo visto en las proposiciones 12.1 y 12.2 es que:

a) Cuando L es una recta con dirección $W = L(\{\bar{w}_1\})$

$$d(Q, L) = \left[d(P, Q)^2 - \frac{<\overline{PQ}, \bar{w}>^2}{\|\bar{w}\|^2} \right]^{1/2}, \qquad \forall P \in L.$$

b) Cuando L es una plano con dirección $W = L(\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\})$ y $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\} \subset \mathbb{R}^3$ un sistema ortogonal de vectores

$$d(Q, L) = \left[d(P, Q)^2 - \sum_{i=1}^{2} \frac{<\overline{PQ}, \bar{w}_i>^2}{\|\bar{w}_i\|^2} \right]^{1/2}, \qquad \forall P \in L.$$

Ejercicio 7

Consideremos un sistema de referencia cartesiano ortonormal R = (O, $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$) en el espacio afín euclído ordinario E_3. Sea un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ y un plano de ecuación cartesiana Π) $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ en dicho sistema de referencia R. Determinar la distancia del punto $P \in E_3$ al plano Π.

Solución

Teniendo en cuenta la proposición 12.1 y la observación del ejercicio anterior tenemos:

$$P' = P_{\Pi}(P) \Leftrightarrow \overline{PP'} \perp \Pi \Leftrightarrow d(P, \Pi) = d(P, P').$$

Hallemos las coordenadas de $P' \in \Pi$ en el sistema de referencia R.

$$\overline{PP'} \perp \Pi \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1' - p_1 = \lambda a \\ p_2' - p_2 = \lambda b \\ p_3' - p_3 = \lambda c \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p_1' = p_1 + \lambda a \\ p_2' = p_2 + \lambda b \\ p_3' = p_3 + \lambda c \end{array}\right\} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} P' \in \Pi &\Leftrightarrow ap_1' + bp_2' + cp_3' + d = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a(p_1 + \lambda a) + b(p_2 + \lambda b) + c(p_3 + \lambda c) + d = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ap_1 + bp_2 + cp_3 + d + \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$d(P, \Pi) = d(P, P') = \|\overline{PP'}\| = \|\lambda(a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 + c\bar{e}_3)\| \overset{\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \text{ ortonormal}}{=}$$

$$= |\lambda| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow d(P, \Pi) = \left|\frac{ap_1 + bp_2 + cp_3 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$$

que es la expresión buscada.

13. DISTANCIA ENTRE DOS SUBESPACIOS AFINES PARALELOS

Definición 13.1

Consideremos en el espacio afín euclído ordinario E_3, dos subespacios afines $L = A + W \wedge L' = A' + W'$. Denominamos distancia entre los subes-

pacios afines L y L' al número real inf $\{d(P, P') / P \in L \wedge P' \in L'\}$ que representamos por d(L, L').

Observación

Consecuencia inmediata de esta definición es que

$$L \cap L' \neq \varnothing \Rightarrow d(L, L') = 0$$

Por tanto, atendiendo al resultado obtenido al estudiar las posiciones relativas de recta y plano y de dos planos en el espacio afín ordinario, si la distancia entre una recta y un plano o entre dos planos d(L, L') es distinta de cero entonces L y L' son paralelos y no coincidentes.

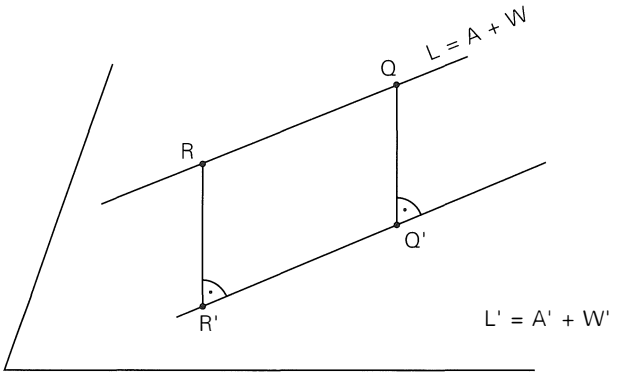
Proposición 13.1

Consideremos dos subespacios afines L = A + W y L' = A' + W' paralelos en el espacio afín ordinario y tal que

$$\dim (W) \leq \dim (W'), (W \subset W').$$

Entonces:

$$d(L, L') = d(P, L'), \quad \forall P \in L.$$



Demostración

Veamos previamente que

$$d(R, L') = d(Q, L'), \quad \forall R, Q \in L.$$

Sea $R' = P_{L'}(R) \in L'$. Entonces

$$R, Q \in L \Rightarrow \overline{RQ} \in W \underset{W \subset W'}{\Rightarrow} \overline{RQ} \in W' \Rightarrow \exists\, Q' = R' + \overline{RQ} \in L' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q' + \overline{R'R} = R' + \overline{R'R} + \overline{RQ} = R' + \overline{R'Q} = Q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{Q'Q} = \overline{R'R} \underset{R' = P_{L'}(R) \Rightarrow \overline{R'R} \perp L'}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \overline{Q'Q} \perp L' \quad \text{con } Q' \in L' \Rightarrow Q' = P_{L'}(Q).$$

Por tanto, $d(R, L') = \|\overline{RR'}\| = \|\overline{QQ'}\| = d(Q, L')$ c.q.d.
Entonces, tenemos:

$$d(L, L') = \inf \{d(P, P') / P \in L \wedge P' \in L'\} =$$
$$= \inf \{\inf \{d(P, P') / P' \in L'\} / P \in L\} =$$
$$= \inf \{d(P, L') / P \in L\} = d(P, L'), \quad \forall P \in L$$

Nótese que esta última igualdad es consecuencia del resultado previo obtenido.

Observación

Del desarrollo de esta proposición se deduce que es aplicable en los siguientes casos principales:

a) rectas paralelas
b) planos paralelos
c) recta y plano paralelos

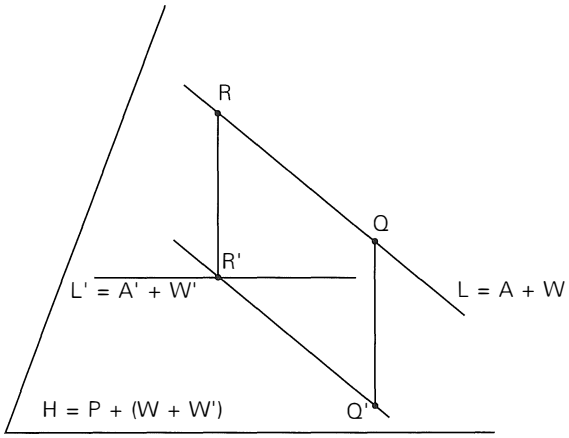
14. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Proposición 14.1

Consideremos dos subespación afines $L = A + W$ y $L' = A' + W'$ del espacio afín euclídeo ordinario E_3. Consideremos un punto cualquiera $P \in L'$

y el subespacio afín auxiliar H = P + W" de dirección W" = W + W'. Entonces:

$$d(L, L') = d(L, H)$$



Demostración

Demostraremos previamente que

$$\forall\, Q \in L, \forall\, Q' \in H : \exists\, R \in L \wedge R' \in L' \,/\, d(Q, Q') = d(R, R').$$

$$P, Q' \in H \underset{W" = W + W'}{\Rightarrow} \overline{PQ'} = \bar{u} + \bar{v} \quad \text{con } \bar{u} \in W \wedge \bar{v} \in W' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P + \overline{PQ'} = P + \bar{u} + \bar{v} \Rightarrow Q' = P + \bar{u} + \bar{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q' - \bar{u} = P + \bar{v} \underset{P \in L' \wedge \bar{v} \in W'}{\in} L'.$$

Sea

$$R' = Q' - \bar{u} = P + \bar{v} \in L' \wedge R = Q - \bar{u} \overset{Q \in L \wedge \bar{u} \in W}{\in} L.$$

Entonces $\overline{R'Q'} = \overline{RQ} = \bar{u}$.

$$\overline{RR'} = \overline{RQ'} + \overline{Q'R'} = \overline{RQ'} + \overline{QR} = \overline{QQ'} \Rightarrow \|\overline{RR'}\| = \|\overline{QQ'}\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(R, R') = d(Q, Q') \qquad \text{c.q.d.}$$

Considerando ahora los conjuntos

$$C_H = \{d(Q, Q') / Q \in L \wedge Q' \in H\} \wedge C_{L'} = \{d(R, R') / R \in L \wedge R' \in L'\}$$

veremos que son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} C_{L'} \subset C_H \text{ es consecuencia inmediata de } L' \subset H \\ C_H \subset C_{L'} \text{ es consecuencia inmediata del resultado previo obtenido} \end{array}\right\} \Rightarrow C_{L'} = C_H$$

Y de aquí concluimos que:

$$d(L, H) = \inf (C_H) = \inf (C_{L'}) = d(L, L')$$

que es el resultado buscado.

Observaciones

1) Del desarrollo de esta proposición se desprende que su aplicación es de carácter general, para cualquier par de subespacios afines de E_3.
2) Su aplicación en los casos en que L y L' son paralelos da el resultado trivial d(L, L') = d(L, L').
3) Su aplicación fundamental y única dentro del espacio afín euclídeo ordinario es por tanto el caso en que L y L' sean dos subespacios afines no paralelos y que no tengan ningún punto en común. Un sencillo repaso a los resultados que se refieren a posiciones relativas de subespacios afines de E_3 muestra que sólo se da cuando L y L' son dos rectas de E_3 no paralelas y que no se cortan. Se dice en este caso que las rectas se cruzan.

Podemos por tanto, enunciar el siguiente:

Corolario

Consideremos dos rectas L = A + W y L' = A' + W' que se cruzan en el espacio afín euclídeo ordinario E_3. Consideremos un punto cualquiera P ∈ L' y el plano afín auxiliar H = P + (W + W'). Entonces:

$$d(L, H) = d(L, L')$$

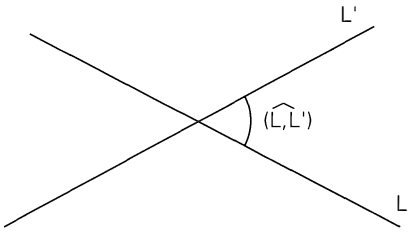
15. ANGULOS EN EL ESPACIO AFIN EUCLIDEO ORDINARIO

Consideremos elegido un sistema de referencia cartesiano ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ en el espacio afín euclídeo ordinario E_3.

Definición 15.1

Dadas dos rectas $L = A + L(\{\bar{u}\})$ y $L' = A' + L(\{\bar{u}'\})$ de E_3 se denomina ángulo entre L y L', y lo representaremos $(\widehat{L, L'})$, al ángulo

$$(\widehat{L, L'}) = \arccos \frac{|<\bar{u}, \bar{u}'>|}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{u}'\|} \in \left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$$



Observación

1) Nótese que esta definición es independiente de los vectores directores $\bar{u}$ y $\bar{u}'$ elegidos.
2) Siendo el sistema de referencia R ortonormal tenemos que

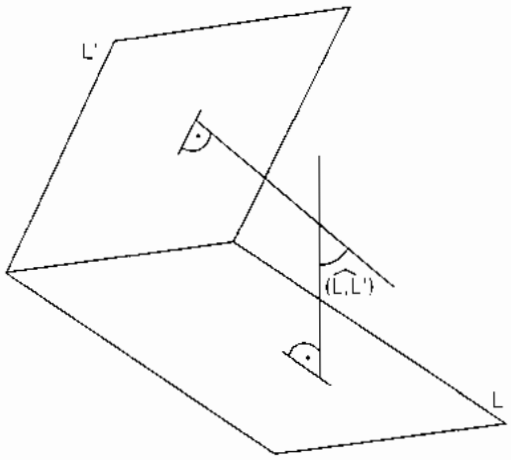
$$\cos(\widehat{L, L'}) = \frac{|<\bar{u}, \bar{u}'>|}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{u}'\|} = \frac{|u_1u'_1 + u_2u'_2 + u_3u'_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}}$$

donde $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{u}'(u'_1, u'_2, u'_3)$ en la base ortonormal B.

Definición 15.2

Dados dos planos L y L' de E_3 y unos vectores no nulos $\bar{u}, \bar{u}' \in \mathbb{R}^3$ ortogonales respectivamente a L y L' se denomina ángulo entre L y L', y lo representaremos $(\widehat{L, L'})$, al ángulo

$$(\widehat{L, L'}) = \arccos \frac{|<\bar{u}, \bar{u}'>|}{\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{u}'\|} \in \left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$$



Observación

1) Esta definición es independiente de los vectores $\bar{u}, \bar{u}'$ ortogonales a L y L' elegidos.
2) Siendo el sistema de referencia R ortonormal tenemos, con $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\bar{u}'(u'_1, u'_2, u'_3)$ en la base ortonormal B

$$\cos(\widehat{L, L'}) = \frac{|u_1u'_1 + u_2u'_2 + u_3u'_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}}$$

3) Consecuencia inmediata de la definición y de un resultado obtenido en el ejercicio anterior sobre la ortogonalidad de un plano y un vector no nulo es:

Dados dos planos L y L' de E_3 por sus ecuaciones cartesianas respectivas en un sistema de referencia ortonormal R de E_3

$$L)\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \qquad L')\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 + d' = 0$$

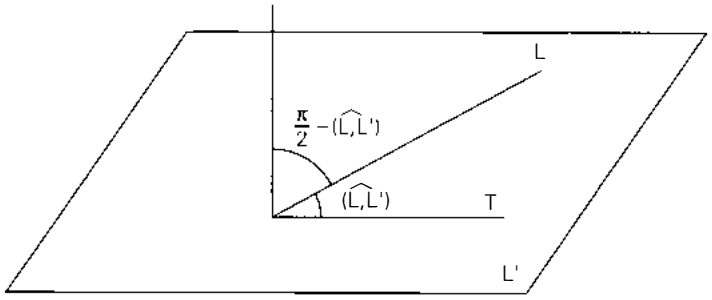
entonces:

$$\cos(\widehat{L, L'}) = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

Definición 15.3

Dada una recta $L = A + L(\{\bar{u}\})$ y un plano L' de E_3, y un vector no nulo $\bar{v} \in \mathbb{R}^3$ ortogonal a L', se denomina ángulo entre L y L', y lo representaremos $(\widehat{L, L'})$, al ángulo

$$(\widehat{L, L'}) = \text{arc sen } \frac{|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle|}{\|\bar{u}\| \,.\, \|\bar{v}\|} \in \left[0, \frac{\Pi}{2}\right]$$



Observación

1) Esta definición es independiente de los vectores $\bar{u}$, $\bar{v}$ elegidos.
2) Siendo el sistema de referencia R ortonormal, y $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v}(v_1, v_2, v_3)$ en la base ortonormal B, tenemos:

$$\text{sen}(\widehat{L, L'}) = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

3) Consecuencia inmediata de la definición y de un resultado obtenido en un ejercicio anterior sobre la ortogonalidad de un plano y un vector no nulo es: Dada una recta L de vector director $\bar{u}(u_1, u_2, u_3)$ y un plano de ecuación cartesiana L') $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ en el sistema de referencia ortonormal R de E_3, tenemos:

$$\operatorname{sen}(\widehat{L, L'}) = \frac{|u_1 a + u_2 b + u_3 c|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4) Nótese que el ángulo $(\widehat{L, L'})$ se puede definir como el ángulo $(\widehat{L, T})$ comprendido entre la recta L y la recta T proyección ortogonal de L sobre el plano L'.

Ejercicio 8

Consideremos elegido un sistema de referencia cartesiano ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ en el plano afín euclídeo ordinario E_3. Sean los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 1)$, $P_3(0, 1, -2)$ de E_3 y el vector $\bar{v}(0, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$ en dicho sistema de referencia R.

1) Determinar una ecuación cartesiana del plano Π_1 que contiene a los puntos P_1, P_2, P_3 de E_3.
2) Determinar una ecuación cartesiana del plano Π_2 que contiene al punto P_1 de E_3 y es ortogonal al vector $\bar{v}$ de $\mathbb{R}^3$.
3) Determinar una ecuación cartesiana del plano θ_1 que contiene a la recta $L_1 = \Pi_1 \cap \Pi_2$ y al origen O.
4) Determinar una ecuación cartesiana del plano θ_2 que contiene a la recta L_1 y es paralelo al eje de referencia $O + L(\{\bar{e}_1\})$.
5) Determinar una ecuación cartesiana del plano θ_3 que contiene a la recta L_1 y es paralelo al eje de referencia $O + L(\{\bar{e}_2\})$.
6) Hallar la distancia entre la recta L_1 y el eje de referencia $O + L(\{\bar{e}_1\})$.
7) Hallar la distancia entre la recta L_1 y el eje de referencia $O + L(\{\bar{e}_3\})$.

Solución

1) Por ser $P_1, P_2, P_3 \in \Pi_1$ tres puntos no alineados de E_3 obtenemos la ecuación cartesiana de Π_1 mediante la dependencia lineal de $\overline{P_1P}$ respecto

a $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_1P_3}$ donde $P(x_1, x_2, x_3)$ representa un punto genérico del plano Π_1. Entonces:

$$\overline{P_1P} = \overline{OP} - \overline{OP_1} = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) - (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) =$$
$$= (x_1 - 1)\bar{e}_1 + (x_2 - 1)\bar{e}_2 + (x_3 - 1)\bar{e}_3.$$

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = (2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) - (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = \bar{e}_1.$$

$$\overline{P_1P_3} = \overline{OP_3} - \overline{OP_1} = (\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3) - (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) = -\bar{e}_1 - 3\bar{e}_3.$$

$$\Pi_1) \begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & -1 \\ x_2 - 1 & 0 & 0 \\ x_3 - 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(x_2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_2 - 1 = 0$$

que es la ecuación cartesiana buscada de Π_1 en el sistema de referencia R.

2) Por ser ortogonal al vector $\bar{v}(0, 1, -1)$ de $\mathbb{R}^3$, el plano Π_2 tendrá en R una ecuación cartesiana de la forma:

$$\Pi_2) \quad x_2 - x_3 + d = 0$$

Con la condición $P_1 \in \Pi_2$ determinaremos $d \in \mathbb{R}$.

$$P_1(1, 1, 1) \in \Pi_2 \Leftrightarrow 1 - 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$$

Por tanto el plano Π_2 tiene por ecuación cartesiana en el sistema R:

$$\Pi_2) \quad x_2 - x_3 = 0$$

3) Por contener a la recta $L_1 = \Pi_1 \cap \Pi_2$ el plano θ_1 pertenecerá al haz de planos que contiene a L_1 y su ecuación cartesiana en el sistema de referencia R seá de la forma:

$$\theta_1) \quad \lambda(x_2 - 1) + \mu(x_2 - x_3) = 0 \qquad \text{con } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Con la condición $O \in \theta_1$ determinaremos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \,.\, (-1) + \mu \,.\, 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0, \mu \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Entonces la ecuación cartesiana del plano θ_1 en el sistema de referencia R es:

$$\theta_1) \;\; \mu(x_2 - x_3) = 0 \qquad \text{con } \mu \neq 0 \Leftrightarrow x_2 - x_3 = 0$$

Nótese que ha resultado $\theta_1 = \Pi_2$.

4) Por contener a la recta L_1 el plano θ_2 tiene, al igual que θ_1, una ecuación cartesiana de la forma:

$$\theta_2) \;\; \lambda(x_2 - 1) + \mu(x_2 - x_3) = 0 \qquad \text{con } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda + \mu)x_2 - \mu x_3 - \lambda = 0 \qquad \text{con } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Con la condición de paralelismo $O + L(\{\bar{e}_1\}) \langle | \theta_2$ determinaremos λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

$$0 \,.\, 1 + (\lambda + \mu) \,.\, 0 - \mu \,.\, 0 = 0 \Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

De la condición de paralelismo nos ha resultado una identidad. Por tanto el par de parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ no está condicionado por el paralelismo $O + L(\{\bar{e}_1\}) \langle | \theta_2$. Nótese que esto es consecuencia de que las rectas L_1 y $O + L(\{\bar{e}_1\})$ resultan ser paralelas. En efecto, hallemos un vector director de la recta

$$L_1) \;\; \left.\begin{matrix} x_2 - 1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x_1 = \lambda \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{matrix}\right\} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

que son unas ecuaciones paramétricas de la recta L_1 en el sistema de referencia R y por tanto $\bar{e}_1(1, 0, 0)$ es vector director de L_1.

Así pues la solución a esta cuestión será:

$$\theta_2) \;\; (\lambda + \mu)x_2 - \mu x_3 - \lambda = 0 \qquad \text{con } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

5) Por contener a la recta L_1 el plano θ_3 tiene, al igual que el θ_1, una ecuación cartesiana de la forma:

$$\theta_3)\ \lambda(x_2 - 1) + \mu(x_2 - x_3) = 0 \quad \text{con } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (\lambda + \mu)x_2 - \mu x_3 - \lambda = 0 \quad \text{con } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}.$$

Con la condición de paralelismo $O + L(\{\bar{e}_2\})\ \langle\ |\ \theta_3$ determinaremos λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

$$0 \,.\, 0 + (\lambda + \mu) \,.\, 1 - \mu \,.\, 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\mu \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces una ecuación cartesiana del plano θ_3 en el sistema de referencia R será:

$$\theta_3)\ 0 \,.\, x_2 - \mu x_3 + \mu = 0 \quad \text{con } \mu \in \mathbb{R} - \{0\} \Leftrightarrow x_3 - 1 = 0$$

6) Hemos comprobado en el apartado 4) que la recta L_1 es paralela al eje $O + L(\{\bar{e}_1\})$. Por tanto $d(O + L(\{\bar{e}_1\}), L_1) = d(O, L_1) = d(O, P_{L_1}(O))$.

Hallemos el punto $P_{L_1}(O)$.

$$P_{L_1}(O) = O + \bar{w} \quad \text{con } \bar{w} \perp L_1 \Leftrightarrow P_{L_1}(O) = O + \bar{w} \quad \text{con } \bar{w} \perp \bar{e}_1$$

Es inmediato, por ser R ortonormal, que

$$\bar{w} \perp \bar{e}_1 \Leftrightarrow \bar{w} = \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 \quad \text{con } \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Entonces $P_{L_1}(O) = O + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 \Leftrightarrow P_{L_1}(O)(0, \lambda_2, \lambda_3)$ en el sistema de referencia R. Ahora utilizando la condición $P_{L_1}(O) \in L_1$ determinamos λ_2, λ_3.

$$P_{L_1}(O) \in L_1 \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_2 - 1 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Por tanto, $P_{L_1}(O)(0, 1, 1)$ en el sistema de referencia R y entonces:

$$d(O + L(\{\bar{e}_1\}), L_1) = d(O, P_{L_1}(O)) = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

7) Por ser $\bar{e}_1$ un vector director de la recta L_1, L_1 y el eje de referencia $O + L(\{\bar{e}_3\})$ no son paralelas. Por tanto, estas rectas tienen un punto en común o se cruzan. Utilizaremos para hallar su distancia el plano auxiliar $O + L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\})$ que contiene al eje $O + L(\{\bar{e}_3\})$ y es paralelo a la recta L_1.

Utilizando el punto $P_1(1, 1, 1) \in L_1$ tenemos:

$$d(L_1, O + L(\{\bar{e}_3\}) = d(L_1, O + L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}) = d(P_1, O + L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}).$$

Denominando $\Pi = O + L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\})$ tenemos:

$$P_\Pi(P_1) = P_1 + \bar{w} \quad \text{con } \bar{w} \perp L(\{\bar{e}_1, \bar{e}_3\}) \overset{\text{R ortonormal}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow P_\Pi(P_1) = P_1 + \lambda_2\bar{e}_2 \quad \text{con } \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_\Pi(P_1)} = \lambda_2\bar{e}_2 \quad \text{con } \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP_\Pi(P_1)} = \overrightarrow{OP_1} + \lambda_2\bar{e}_2 \quad \text{con } \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP_\Pi(P_1)} = (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) + \lambda_2\bar{e}_2 = \bar{e}_1 + (1 + \lambda_2)\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \quad \text{con } \lambda_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_\Pi(P_1)(1, 1 + \lambda_2, 1)$$

Ahora utilizando la condición $P_\Pi(P_1) \in \Pi$ determinamos $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$P_\Pi(P_1) \in \Pi \Leftrightarrow 1 + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -1$$

Por tanto $P_\Pi(P_1)(1, 0, 1)$ en el sistema de referencia R y entonces:

$$d(L_1, O + L(\{\bar{e}_3\})) = d(P_1, P_\Pi(P_1)) = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = 1$$

Tema XII

Curvas y superficies en el espacio afín ordinario

1. CURVAS Y SUPERFICIES EN EL ESPACIO AFIN ORDINARIO

Sea en el espacio afín ordinario (eventualmente afín euclídeo) E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos tres aplicaciones f_1, f_2, f_3: $D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea la aplicación f: $D \subset \mathbb{R} \to E_3$ definida por:

$$f(u) = O + f_1(u)\,\bar{e}_1 + f_2(u)\,\bar{e}_2 + f_3(u)\,\bar{e}_3 \qquad \forall\, u \in D$$

Observemos que las coordenadas del punto $f(u)$ de E_3 vienen definidas por la terna $(f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ en el sistema de referencia R.

Definición 1.1

La imagen $f(D) = C \subset E_3$ de D según f se denomina curva parametrizada. Las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u) \\ x_2 = f_2(u) \\ x_3 = f_3(u) \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas de C y u es el parámetro del punto $f(u) = P$ de C.

Consideremos tres aplicaciones f_1, f_2, f_3: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y sea la aplicación f: $D \subset \mathbb{R}^2 \to E_3$ definida por:

$$f(u, v) = O + f_1(u, v)\,\bar{e}_1 + f_2(u, v)\,\bar{e}_2 + f_3(u, v)\,\bar{e}_3 \qquad \forall\, u, v \in D$$

Observemos que las coordenadas del punto $f(u, v)$ de E_3 vienen definidas por la terna $(f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ en el sistema de referencia R.

Definición 1.2

La imagen $f(D) = S \subset E_3$ de D según f se denomina superficie parametrizada. Las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u, v) \\ x_2 = f_2(u, v) \\ x_3 = f_3(u, v) \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas de S y u y v son los parámetros del punto $f(u, v) = P$ de S.

Definición 1.3

Dada una aplicación $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se denomina superficie implícita de E al conjunto T de E_3 de los puntos P de E_3 cuyas coordenadas (x_1, x_2, x_3), en el sistema de referencia R, verifican la ecuación $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. La ecuación $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ es una ecuación cartesiana de T.

Definición 1.4

Dadas dos aplicaciones $f, g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se denomina curva implícita de E_3 al conjunto L de los puntos P de E_3 cuyas coordenadas (x_1, x_2, x_3), en el sistema de referencia R, verifican que $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ y $g(x_1, x_2, x_3) = 0$. Las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

son unas ecuaciones cartesianas de L.

Hacemos notar que no existe una diferencia esencial entre las definiciones 1.1 y 1.4 (respectivamente 1.2 y 1.3) pues bajo ciertas condiciones de compatibilidad o diferenciabilidad se puede pasar de una a otra.

2. SUPERFICIES CILINDRICAS

Sea el espacio afín ordinario E_3 y consideremos un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Definición 2.1

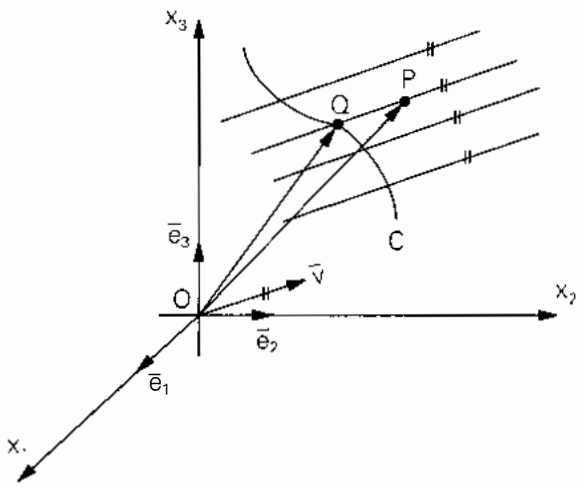
Se denomina supericie cilíndrica a la superficie S engendrada por una recta móvil L condicionada a conservar su dirección y a apoyarse en una curva dada C.

Las rectas obtenidas al desplazarse la recta móvil se denominan generatrices de la superficie cilíndrica S y la curva C recibe el nombre de directriz de la superficie cilíndrica S.

Según la definición, si:

—El vector no nulo $\bar{v}$ define la dirección de las generatrices de S.
—El punto P es un punto cualquiera de S.
—El punto Q es el punto de corte de la generatriz que pasa por P y la directriz C de S.

resulta que:



$$P \in S \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overline{QP} = \lambda \bar{v} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overline{OP} - \overline{OQ} = \lambda \bar{v} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \overline{OP} = \overline{OQ} + \lambda \bar{v} \qquad (1)$$

Si la curva directriz C viene definida por unas ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u) \\ x_2 = f_2(u) \\ x_3 = f_3(u) \end{cases} \qquad (\forall\, u \in D)$$

en el sistema de referencia R, entonces denotando por:

—(x_1, x_2, x_3) a las coordenadas de un punto cualquiera P de S en el sistema de referencia R.
—(v_1, v_2, v_3) a las coordenadas de $\bar{v}$ en la base B.

y considerando que $(f_1(u), f_2(u), f_3(u))$, representa a las coordenadas del punto Q de C en el sistema de referencia R, resulta de la expresión vectorial (1) que:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u) + v_1 \lambda \\ x_2 = f_2(u) + v_2 \lambda \\ x_3 = f_3(u) + v_3 \lambda \end{cases} \tag{2}$$

Las ecuaciones del sistema (2) representan unas ecuaciones paramétricas de S en el sistema de referencia R, siendo u y λ los parámetros del punto P de S en donde el par (u, λ) recorre el conjunto $D \times \mathbb{R}$.

Si la curva directriz C viene definida por unas ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

en el sistema de referencia R, entonces denotando por:

—(x_1, x_2, x_3) a las coordenadas de un punto cualquiera P de S en el sistema de referencia R.
—(v_1, v_2, v_3) a las coordenadas de $\bar{v}$ en la base B.

y considerando que $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$, representa a las coordenadas del punto Q de C en el sistema de referencia R, resulta de la expresión vectorial (1) que:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{x}_1 + v_1 \lambda \\ x_2 = \dot{x}_2 + v_2 \lambda \\ x_3 = \dot{x}_3 + v_3 \lambda \end{cases} \tag{3}$$

en donde la terna $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ verifica la condición:

$$\begin{cases} f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0 \\ g(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Eliminando $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ y λ entre las cinco ecuaciones de (3) y (4) obtendremos una ecuación cartesiana $h(x_1, x_2, x_3) = 0$ de S en el sistema de referencia R.

Ejercicio 1

Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos la recta L y la curva C de ecuaciones cartesianas en el sistema de referencia R:

$$(L) \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad (C) \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1 = x_3^2 \end{cases}$$

Determinar la superficie cilíndrica S de generatrices paralelas a la recta L y de directriz la curva C.

Solución

De las ecuaciones de L se deduce que el vector $\bar{v}$ de coordenadas $(1, 1, 0)$, en la base B, define la dirección de la recta L. En consecuencia, la dirección de las generatrices de S viene definida por $\bar{v}$.

Obtendremos una ecuación cartesiana de S eliminando $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ y λ entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{x}_1 + \lambda \\ x_2 = \dot{x}_2 + \lambda \\ x_3 = \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_3^2 \end{cases}$$

Operando:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{x}_1 + \lambda \\ x_2 = \dot{x}_2 + \lambda \\ x_3 = \dot{x}_3 \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1^2 \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \lambda \\ \dot{x}_2 = x_2 - \lambda \\ \dot{x}_3 = x_3 \\ x_2 - \lambda = (x_1 - \lambda)^2 \\ x_1 - \lambda = x_3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \lambda \\ \dot{x}_2 = x_2 - \lambda \\ \dot{x}_3 = x_3 \\ \lambda = x_1 - x_3^2 \\ x_2 - x_1 + x_3^2 = x_3^4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \lambda \\ \dot{x}_2 = x_2 - \lambda \\ \dot{x}_3 = x_3 \\ \lambda = x_1 - x_3^2 \\ x_1 - x_2 - x_3^2 + x_3^4 = 0 \end{cases}$$

Luego $x_1 - x_2 - x_3^2 + x_3^4 = 0$ es una ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica S en el sistema de referencia R.

Ejercicio 2

Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos la recta L y la curva C de ecuaciones en el sistema de referencia R:

$$(L) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad (C) \begin{cases} x_1 = \text{sen } u \\ x_2 = \cos u \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad (\forall\, u \in [0, 2\pi])$$

Determinar la superficie cilíndrica S de generatrices paralelas a la recta L y de directriz la curva C.

Solución

De las ecuaciones de L se deduce que el vector $\bar{v}$ de coordenadas (0, 0, 1), en la base B, define la dirección de L. En consecuencia, la dirección de las generatrices de S viene definida por $\bar{v}$.

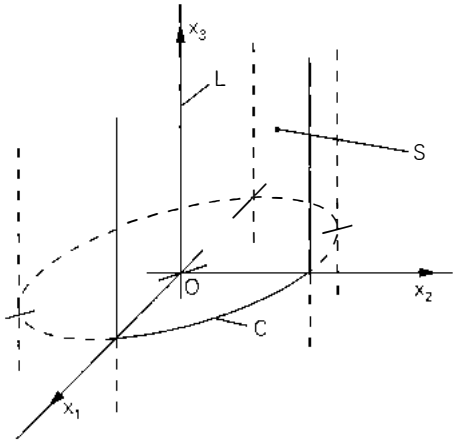
Unas ecuaciones paramétricas de S, en el sistema de referencia R, vienen definidas por:

$$\begin{cases} x_1 = \text{sen } u \\ x_2 = \cos u \\ x_3 = \lambda \end{cases} \qquad (\forall\, u \in [0, 2\pi],\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}) \qquad (1)$$

Eliminando los parámetros u y λ en (1) obtendremos una ecuación cartesiana de S:

$$\begin{cases} x_1 = \text{sen } u \\ x_2 = \cos u \\ x_3 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Luego $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ es una ecuación cartesiana de la superficie cilíndrica S en el sistema de referencia R.



3. SUPERFICIES CONICAS

Sea el espacio afín ordinario E_3 y consideremos un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Definición 3.1

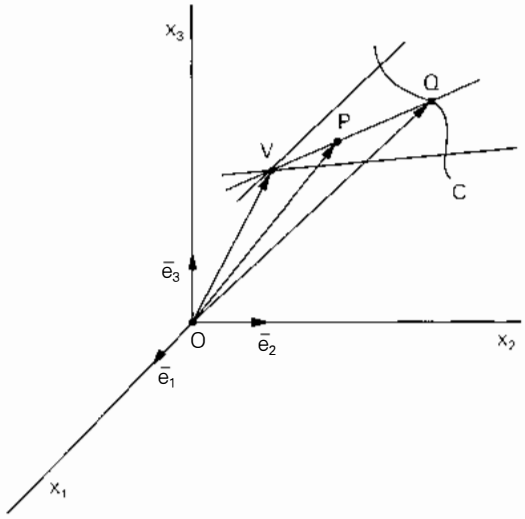
Se denomina superficie cónica a la superficie S engendrada por una recta móvil L que pasa por un punto fijo V y se apoya en una curva dada C.

El punto fijo V se denomina vértice de la superficie cónica S, la curva C recibe el nombre de directriz de la superficie cónica S y las rectas obtenidas al desplazarse la recta móvil se denominan generatrices de la superficie cónica S.

Según la definición, si:

—El punto P es un punto cualquiera de S.
—El punto Q es el punto de corte de la generatriz V + L ($\{\overline{VP}\}$) y la directriz C de S.

Resulta que:



$$P \in S \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} / \overline{VP} = \lambda\, \overline{VQ} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} / \overline{OP} - \overline{OV} = \lambda\, (\overline{OQ} - \overline{OV}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} / \overline{OP} = \overline{OV} + \lambda\, (\overline{OQ} - \overline{OV}) \qquad (1)$$

Si la curva directriz C viene definida por unas ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u) \\ x_2 = f_2(u) \\ x_3 = f_3(u) \end{cases} \qquad (\forall\, u \in D)$$

en el sistema de referencia R, entonces denotando por:

—(x_1, x_2, x_3) a las coordenadas de un punto cualquiera P de S en el sistema de referencia R.

—(v_1, v_2, v_3) a las coordenadas del vértice V de S en el sistema de referencia R.

y considerando que $(f_1(u), f_2(u), f_3(u))$ representa a las coordenadas del punto Q de C en el sistema de referencia R, resulta de la expresión vectorial (1) que:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 + (f_1(u) - v_1)\,\lambda \\ x_2 = v_2 + (f_2(u) - v_2)\,\lambda \\ x_3 = v_3 + (f_3(u) - v_3)\,\lambda \end{cases} \tag{2}$$

Las ecuaciones del sistema (2) representan unas ecuaciones paramétricas de S en el sistema de referencia R, siendo u y λ los parámetros del punto P de S en donde el par (u, λ) recorre el conjunto $D \times \mathbb{R}$.

Si la curva directriz C viene definida por unas ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

en el sistema de referencia R, entonces denotando por:

—(x_1, x_2, x_3) a las coordenadas de un punto cualquiera P de S en el sistema de referencia R.

—(v_1, v_2, v_3) a las coordenadas del vértice V de S en el sistema de referencia R.

y considerando que la terna $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$, representa a las coordenadas del punto Q de C en el sistema de referencia R, resulta de la expresión vectorial (1) que:

$$\begin{cases} x_1 = v_1 + (\dot{x}_1 - v_1)\,\lambda \\ x_2 = v_2 + (\dot{x}_2 - v_2)\,\lambda \\ x_3 = v_3 + (\dot{x}_3 - v_3)\,\lambda \end{cases} \tag{3}$$

en donde la terna $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ verifica la condición:

$$\begin{cases} f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0 \\ g(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Eliminando $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ y λ entre las cinco ecuaciones de (3) y (4) obtendremos una ecuación cartesiana $h(x_1, x_2, x_3) = 0$ de S en el sistema de referencia R.

Ejercicio 3

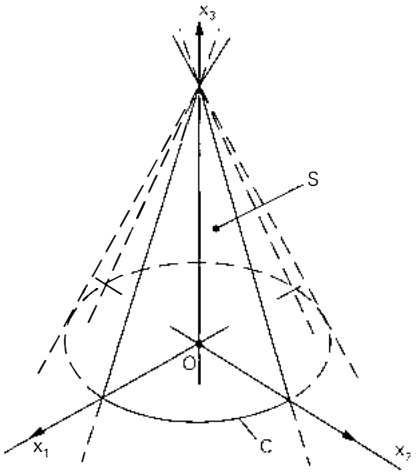
Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos el punto V de coordenadas (0, 0, 2) en el sistema de referencia R y la curva C de ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

en el sistema de referencia R. Determinar la superficie cónica S de vértice V y directriz C.

Solución



Obtendremos una ecuación cartesiana de S eliminando $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ y λ entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{x}_1 \lambda \\ x_2 = \dot{x}_2 \lambda \\ x_3 = 2 + (\dot{x}_3 - 2) \lambda \\ \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 1 \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Operando resulta que la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{4}(x_3 - 2)^2 = 0$ es una ecuación cartesiana de la superficie cónica S en el sistema de referencia R.

Ejercicio 4

Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ y consideremos la curva C de ecuaciones paramétricas en el sistema de referencia R:

$$\begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = u^2 \\ x_3 = u^3 \end{cases} \qquad (\forall\, u \in \mathbb{R})$$

Determinar la superficie cónica S de vértice el origen O del sistema de referencia R y directriz la curva C.

Solución

Unas ecuaciones paramétricas de S, en el sistema de referencia R, vienen definidas por:

$$\begin{cases} x_1 = u \lambda \\ x_2 = u^2 \lambda \\ x_3 = u^3 \lambda \end{cases} \qquad (\forall\, u \in \mathbb{R} \wedge \forall\, \lambda \in \mathbb{R}) \qquad (1)$$

Eliminando los parámetros u y λ en (1) obtendremos la ecuación cartesiana $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ en el sistema de referencia R.

4. SUPERFICIES CONOIDES

Sea el espacio afín ordinario E_3 y consideremos un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Definición 4.1

Se denomina superficie conoide a la superficie S engendrada por una recta móvil L que se apoya sobre una recta fija T, es paralela a un plano P que corta a T y corta a una curva dada C.

La recta T se denomina eje de la superficie conoide S, el plano P recibe el nombre de plano director de S y la curva C se denomina directriz de S.

Considerando que:

—El eje T de S viene definido por las ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_0 = 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_0 = 0 \end{cases}$$

en el sistema de referencia R.

—El plano director P de S viene definido por la ecuación cartesiana $e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + e_0 = 0$ en el sistema de referencia R.

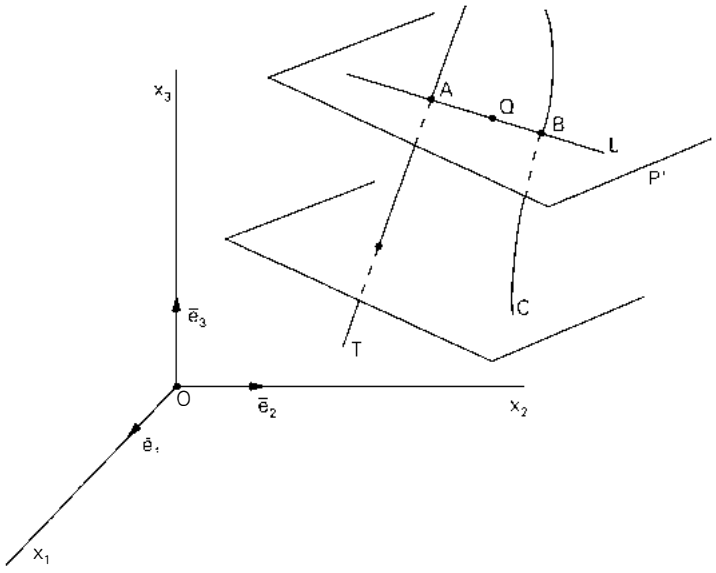
—La directriz C de S viene definida por las ecuaciones cartesianas:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

en el sistema de referencia R.

—La terna (x_1, x_2, x_3) representa a las coordenadas de un punto cualquiera Q de S en el sistema de referencia R.

Resulta que existirá un plano P' paralelo a P (es decir, un plano P' de ecuación $e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 + \lambda = 0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$) que cortará a T y C en puntos A y B de coordenadas respectivas $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ en el sistema de referencia R y tal que el punto Q pertenecerá a la recta $L = A + L(\{\overline{AB}\})$



Se sigue de inmediato que una ecuación cartesiana de S se obtiene eliminando $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3, \lambda$ y μ entre las ecuaciones:

$$(Q \in A + L(\{\overline{AB}\})) \quad \begin{cases} x_1 = \dot{x}_1 + (\ddot{x}_1 - \dot{x}_1)\mu \\ x_2 = \dot{x}_2 + (\ddot{x}_2 - \dot{x}_2)\mu \\ x_3 = \dot{x}_3 + (\ddot{x}_3 - \dot{x}_3)\mu \end{cases}$$

$$(A \in T \cap P') \quad \begin{cases} c_1\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 + c_3\dot{x}_3 + c_0 = 0 \\ d_1\dot{x}_1 + d_2\dot{x}_2 + d_3\dot{x}_3 + d_0 = 0 \\ e_1\dot{x}_1 + e_2\dot{x}_2 + e_3\dot{x}_3 + \lambda = 0 \end{cases}$$

$$(B \in C \cap P') \quad \begin{cases} f(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) = 0 \\ g(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3) = 0 \\ e_1\ddot{x}_1 + e_2\ddot{x}_2 + e_3\ddot{x}_3 + \lambda = 0 \end{cases}$$

Con modificaciones obvias se obtiene una ecuación cartesiana de S cuando la directriz C viene definida por unas ecuaciones paramétricas.

Ejercicio 5

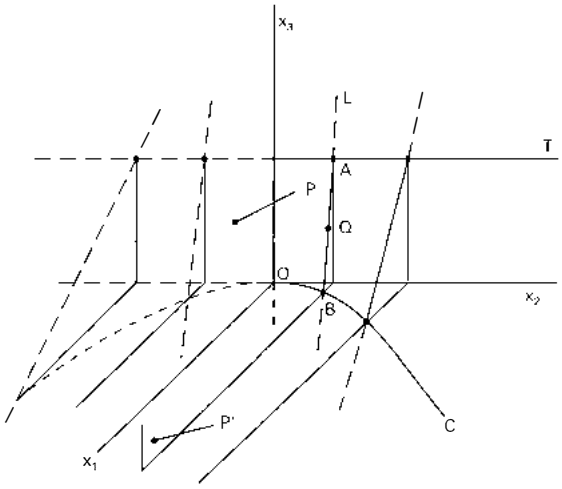
Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos la recta T, el plano P y la curva C de ecuaciones cartesianas en el sistema de referencia R:

$$(T)\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 - 1 = 0 \end{cases} \qquad (P)\quad x_2 = 0 \qquad (C)\begin{cases} x_1 - x_2^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinar la superficie conoide S de eje la recta T, plano director el plano P y directriz la curva C.

Solución



Obtendremos una ecuación cartesiana de S eliminando $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$, $\ddot{x}_3$, λ y μ entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{x}_1 + (\ddot{x}_1 - \dot{x}_1)\,\mu \\ x_2 = \dot{x}_2 + (\ddot{x}_2 - \dot{x}_2)\,\mu \\ x_3 = \dot{x}_3 + (\ddot{x}_3 - \dot{x}_3)\,\mu \\ \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_3 - 1 = 0 \\ \dot{x}_2 + \lambda = 0 \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2^2 = 0 \\ \ddot{x}_3 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \lambda = 0 \end{cases}$$

Operando resulta que la ecuación $x_1 + x_2^2 (x_3 - 1) = 0$ es una ecuación cartesiana de la superficie conoide S en el sistema de referencia R.

5. SUPERFICIES REGLADAS

Definición 5.1

Se denomina superficie reglada a toda superficie S del espacio ordinario engendrada por una recta móvil L que se desplaza según una ley determinada.

Las superficies cilíndricas, las superficies cónicas y las superficies conoides son ejemplos de superficies regladas.

6. SUPERFICIES DE REVOLUCION

Sea el espacio afín euclídeo ordinario E_3 y consideremos un sistema de referencia ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Definición 6.1

Se denomina superficie de revolución a la superficie S engendrada por una curva C que gira alrededor de una recta T.

La recta T se denomina eje de revolución de S, las circunferencias intersección de S con planos ortogonales a T reciben el nombre de paralelos de S y las curvas intersección de S con los planos que pasan por T se denominan meridianas o meridianos de S.

Considerando que:

—El eje T de S viene definido por las ecuaciones cartesianas:

$$\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \frac{x_3 - a_3}{u_3}$$

en el sistema de referencia R.

—La curva C viene definida por las ecuaciones cartesianas:

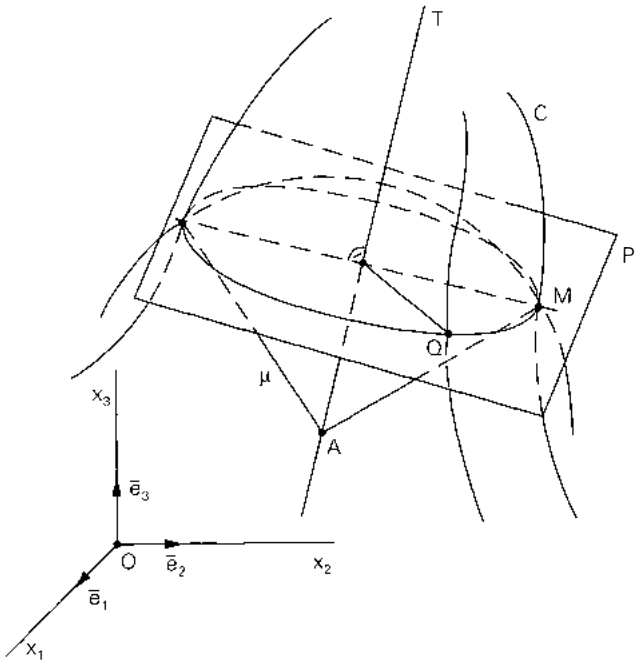
$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

en el sistema de referencia R.

Resulta que S se puede considerar como el conjunto de puntos Q de coordenadas (x_1, x_2, x_3) situados en los distintos paralelos de S que se pueden obtener como intersección de un plano P perpendicular al eje T y una esfera de centro el punto A de coordenadas (a_1, a_2, a_3) y radio $\mu \in \mathbb{R}^+$. Con todo esto y denotando por $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ a las coordenadas de los puntos M de C, se sigue de inmediato que una ecuación cartesiana de S se obtiene eliminando $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \lambda$ y μ^2 entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + \lambda = 0 \\ (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 - \mu^2 = 0 \\ u_1\dot{x}_1 + u_2\dot{x}_2 + u_3\dot{x}_3 + \lambda = 0 \\ (\dot{x}_1 - a_1)^2 + (\dot{x}_2 - a_2)^2 + (\dot{x}_3 - a_3)^2 - \mu^2 = 0 \\ f(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0 \\ g(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0 \end{cases}$$

Con modificaciones obvias se obtiene una ecuación cartesiana de S cuando la curva C viene definida por unas ecuaciones parámetricas.



Ejercicio 6

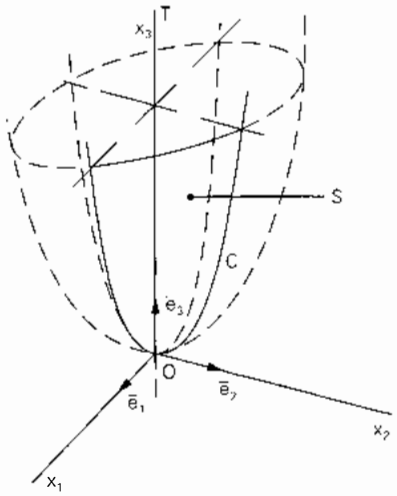
Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos la curva C de ecuaciones cartesianas en el sistema de referencia R:

$$(C)\begin{cases} x_3 - x_2^2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Determinar la superficie de revolución S engendrada al girar la curva C alrededor de la recta $T = O + L(\{\bar{e}_3\})$.

Solución



Obtendremos una ecuación cartesiana de S eliminando $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, λ y μ^2 entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_3 + \lambda = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \mu^2 = 0 \\ \dot{x}_3 + \lambda = 0 \\ \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 - \mu^2 = 0 \\ \dot{x}_3 - \dot{x}_2^2 = 0 \\ \dot{x}_1 = 0 \end{cases}$$

Operando resulta que la ecuación $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ es una ecuación cartesiana de S en el sistema de referencia R.

Ejercicio 7

Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos las rectas C y T de ecuaciones respectivas en el sistema de referencia R:

$$(C)\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad (T) \quad x_1 - 1 = x_2 = x_3 + 1$$

Determinar la superficie de revolución S engendrada al girar la recta C alrededor de la recta T.

Solución

Obtendremos una ecuación cartesiana de S eliminando $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$, λ y μ^2 entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \lambda = 0 \\ (x_1 - 1)^2 + x_2 + (x_3 + 1)^2 - \mu^2 = 0 \\ \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 + \lambda = 0 \\ (\dot{x}_1 - 1)^2 + \dot{x}_2^2 + (\dot{x}_3 + 1)^2 - \mu^2 = 0 \\ \dot{x}_1 = 1 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Operando resulta que la ecuación $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 - x_3 - 1 = 0$ es una ecuación cartesiana de S en el sistema de referencia R.

7. SUPERFICIES DE TRASLACION

Sea el espacio afín ordinario E_3 y consideremos un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Definición 7.1

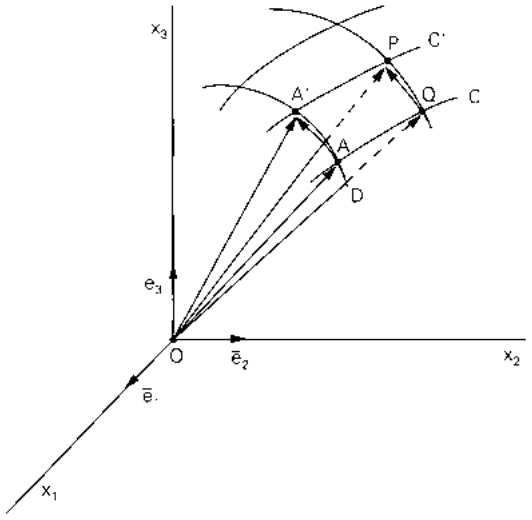
Se denomina superficie de traslación a la superficie S engendrada por una curva móvil C que se desplaza paralelamente a sí misma apoyándose en una curva dada D.

Las curvas C' obtenidas al desplazarse la curva móvil C se denominan generatrices de S y la curva D recibe el nombre de directriz de S.

Según la definición, si:

- El punto A es el punto de corte de C en una cierta posición inicial y la curva D.
- El punto P es un punto cualquiera de S que pertenecerá a una cierta generatriz C' de S.
- El punto Q de C es tal que el transformado de Q es P en el movimiento que transforma C en C'.
- El punto A' es el punto de corte de C' con D.

Resulta que:



$$P \in S \Leftrightarrow \overline{QP} = \overline{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} \quad (1)$$

Si las curvas C y D vienen definidas por las ecuaciones paramétricas:

$$(C)\begin{cases} x_1 = f_1(u) \\ x_2 = f_2(u) \\ x_3 = f_3(u) \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} x_1 = g_1(v) \\ x_2 = g_2(v) \\ x_3 = g_3(v) \end{cases}$$

en el sistema de referencia R, entonces denotando por:

—(a_1, a_2, a_3) a las coordenadas del punto A en el sistema de referencia R. Observemos que si u y v toman valores en I_C e I_D respectivamente, existirán $u_o \in I_C$ y $v_o \in I_D$ tal que:

$$\begin{aligned} a_1 &= f_1(u_o) = g_1(v_o) \\ a_2 &= f_2(u_o) = g_2(v_o) \\ a_3 &= f_3(u_o) = g_3(v_o) \end{aligned}$$

—(x_1, x_2, x_3) a las coordenadas del punto genérico P en el sistema de referencia R.

y considerando que $(g_1(v), g_2(v), g_3(v))$ y $(f_1(u), f_2(u), f_3(u))$, representan respectivamente a las coordenadas de los puntos A' y Q en el sistema de referencia R, se sigue de (1) que:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u) + g_1(v) - g_1(v_o) \\ x_2 = f_2(u) + g_2(v) - g_2(v_o) \\ x_3 = f_3(u) + g_3(v) - g_3(v_o) \end{cases}$$

son unas ecuaciones paramétricas de S en el sistema de referencia R, en donde (u, v) recorre $I_C \times I_D$.

Ejercicio 8

Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos la recta C y la curva D de ecuaciones:

$$(C)\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \quad (\forall\, \alpha \in \mathbb{R}) \qquad (D)\begin{cases} x_1 = \beta^3 \\ x_2 = \beta^2 \\ x_3 = \beta \end{cases} \quad (\forall\, \beta \in \mathbb{R})$$

Determinar la superficie de traslación S engendrada por la recta C al desplazarse paralelamente a sí misma apoyándose en la curva D.

Solución

Considerando que C y D se cortan en el origen O del sistema de referencia, se sigue de inmediato que unas ecuaciones paramétricas de S vienen definidas por:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta^3 \\ x_2 = 2\alpha + \beta^2 \\ x_3 = \alpha + \beta \end{cases} \quad (\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

en el sistema de referencia R.

Ejercicio 9

Sea el espacio afín ordinario E_3 y un sistema de referencia $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Consideremos la curva C y la recta D de ecuaciones:

$$(C)\begin{cases} x_2^2 - 4x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Determinar la superficie de traslación S engendrada por la curva C al desplazarse paralelamente a sí misma apoyándose en la recta D.

Solución

Resolviendo el sistema constituido por las ecuaciones de C y D se sigue que el punto A de coordenadas (1, 2, 1), en el sistema de referencia R, es el único punto común a C y D.

Una ecuación cartesiana de S la obtendremos eliminando $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3$ entre las ecuaciones de los sistemas:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{x}_1 + \ddot{x}_1 - 1 \\ x_2 = \dot{x}_2 + \ddot{x}_2 - 2 \\ x_3 = \dot{x}_3 + \ddot{x}_3 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2^2 - 4\dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{x}_1 - \ddot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

Operando resulta que $4\,(3x_1 - x_2 - x_3 + 4) - (x_1 - x_2 + x_3 - 4)^2 = 0$ es una ecuación cartesiana de S en el sistema de referencia R.

8. CUADRICAS

Sea el espacio afín euclídeo ordinario E_3 y consideremos un sistema de referencia ortonormal $R = (0, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ de E_3.

Definición 8.1

Se denomina cuádrica a toda superficie S de ecuación cartesiana respecto de R:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_1x_1 + \\ + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$$

en donde los coeficientes de los términos de segundo grado no son todos nulos.

Nos proponemos determinar sistemas de referencia en los que la cuádrica S tenga una ecuación sencilla que nos permita visualizar su configuración geométrica en el espacio afín euclídeo ordinario E_3.

En principio, observemos que la ecuación S se expresa matricialmente en la forma:

$$(x_1\,x_2\,x_3)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (a_1\,a_2\,a_3)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

en donde la matriz cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

es una matriz real simétrica.

Consideremos ahora la forma cuadrática $\omega: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya representación matricial en la base ortonormal $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ viene definida por:

$$\omega(\bar{x}) = (x_1\, x_2\, x_3) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^3$$

en donde la terna ordenada (x_1, x_2, x_3) representa a las coordenadas de $\bar{x}$ en la base B de $\mathbb{R}^3$.

Por otro lado, sabemos que es posible determinar una base ortonormal $B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ constituida por vectores propios de A, tal que la representación matricial de la forma cuadrática ω viene definida respecto de B' por:

$$\omega(\bar{x}) = (\dot{x}_1\, \dot{x}_2\, \dot{x}_3) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \dot{x}_1^2 + \lambda_2 \dot{x}_2^2 + \lambda_3 \dot{x}_3^2 \qquad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^3$$

en donde la terna ordenada $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ representa a las coordenadas de $\bar{x}$ en la base ortonormal B' de $\mathbb{R}^3$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ denotan a los valores propios de A.

Además podemos garantizar la existencia de una matriz ortogonal P, siendo P la matriz del cambio de coordenadas de la base ortonormal B a la base ortonormal B' y cumpliéndose que:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \,.\, A \,.\, P = P^T \,.\, A \,.\, P$$

De todo esto se sigue que si consideramos el nuevo sistema de referencia ortonormal $R' = (0, B' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\})$ de E_3, las ecuaciones del cambio del sistema de referencia R por el R' vienen definidas por:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}$$

en donde las ternas ordenadas (x_1, x_2, x_3) y $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ representan a las coordenadas de un punto genérico de E_3 en los sistemas de referencia R y R' respectivamente.

Por tanto, la ecuación de la cuádrica S en el sistema de referencia R' viene definida por:

$$(\dot{x}_1\, \dot{x}_2\, \dot{x}_3)\,.\,P^T\,.\,A\,.\,P\,.\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}+(a_1\, a_2\, a_3)\,.\,P\,.\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}+a_0=0$$

De donde, denotando $[a_1\ a_2\ a_3]\,.\,P = [b_1\ b_2\ b_3]$, recordando que:

$$P^T\,.\,A\,.\,P=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$$

y operando, se sigue que la ecuación de la cuádrica S en el sistema de referencia R' viene definida por:

$$\lambda_1\dot{x}_1^2+\lambda_2\dot{x}_2^2+\lambda_3\dot{x}_3^2+b_1\dot{x}_1+b_2\dot{x}_2+b_3\dot{x}_3+a_0=0$$

Llegados a este punto cabe distinguir los siguientes casos:

I. Los tres valores propios de A son no nulos.
II. Sólamente dos valores propios de A son no nulos.
III. Unicamente uno de los valores propios de A es no nulo.

Abordemos el estudio de cada uno de estos casos, estudiando los distintos subcasos que se pueden presentar:

I. *Supongamos que* $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ *y* $\lambda_3 \neq 0$:

En este caso, operando se obtiene que la ecuación de la cuádrica S en el sistema de referencia R' se expresa por:

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1+\frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2+\lambda_2\left(\dot{x}_2+\frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2+\lambda_3\left(\dot{x}_3+\frac{b_3}{2\lambda_3}\right)^2+\left(a_0-\frac{b_1^2}{4\lambda_1}-\frac{b_2^2}{4\lambda_2}-\frac{b_3^2}{4\lambda_3}\right)=0$$

Por otro lado, consideremos el nuevo sistema de referencia ortonormal $R'' = (0', B' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\})$ en donde la terna ordenada

$$\left(-\frac{b_1}{2\lambda_1}, -\frac{b_2}{2\lambda_2}, -\frac{b_3}{2\lambda_3} \right)$$

representa a las coordenadas de $0'$ en el sistema de referencia R' y observemos que las ecuaciones del cambio del sistema de referencia vienen definidas por:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_2 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} \\ \ddot{x}_3 = \dot{x}_3 + \dfrac{b_3}{2\lambda_3} \end{cases}$$

en donde las ternas $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ representan a las coordenadas de un punto genérico E_3 en los sistemas de referencia R' y R'' respectivamente. Además dichas ecuaciones representan una traslación de E_3.

La ecuación de la cuádrica S en el nuevo sistema de referencia R'' viene definida por:

$$\lambda_1 \ddot{x}_1^2 + \lambda_2 \ddot{x}_2^2 + \lambda_3 \ddot{x}_3^2 + d = 0$$

en donde

$$d = a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - \frac{b_3^2}{4\lambda_3}$$

Esta ecuación representa a una superficie que admite el origen $0'$ de R'' como centro de simetría y en consecuencia la cuádrica S se denomina cuádrica con centro.

Puede suceder que $d = 0$ o $d \neq 0$. Entonces:

— Sea $d = 0$ y supongamos, sin perder generalidad, que λ_1 y λ_2 son del mismo signo. Así mismo, consideremos que $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, existiendo entonces tres números reales positivos m, n, p tales que:

$$m^2 = \frac{1}{\lambda_1} \qquad n^2 = \frac{1}{\lambda_2} \qquad p^2 = \frac{1}{|\lambda_3|}$$

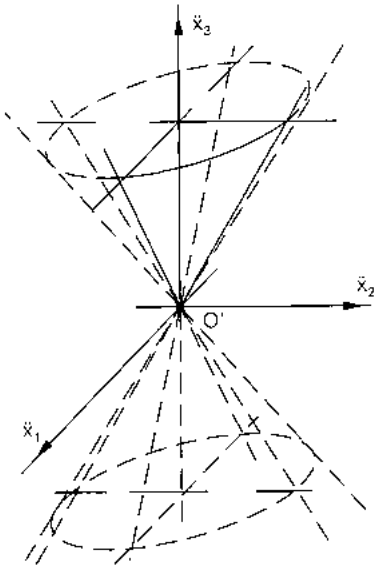
sucediendo que la ecuación de la cuádrica S en el nuevo sistema de referencia R'' viene definida por:

$$\frac{\ddot{x}_1^2}{m^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{n^2} + \sigma \frac{\ddot{x}_3^2}{p^2} = 0 \qquad \text{con} \qquad \sigma = 1 \quad \text{ó} \quad \sigma = -1$$

Si $\sigma = 1$ entonces la cuádrica se reduce a un punto, el origen $0'$ de R''.

Si $\sigma = -1$ la cuádrica S se denomina cono real y tiene una representación gráfica de la forma:

$$S: \frac{\ddot{x}_1^2}{m^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{n^2} - \frac{\ddot{x}_3^2}{p^2} = 0$$



— Sea $d \neq 0$ y supongamos, sin perder generalidad, que $d < 0$ (en caso contrario multiplicaríamos la ecuación de S en R" por -1). Pues bien, para $d < 0$ se pueden presentar los siguientes subcasos:

1.º) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 > 0$ entonces la ecuación de la cuádrica S en el sistema de referencia R" es de la forma:

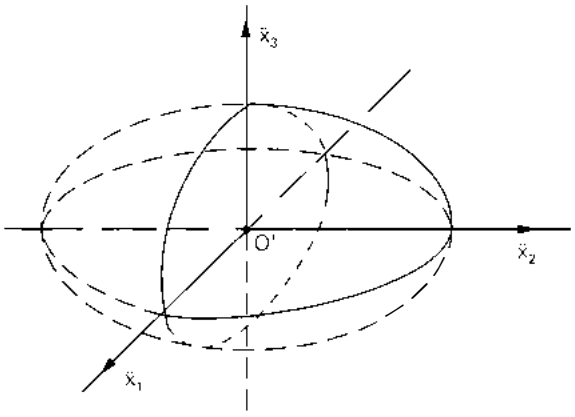
$$\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} + \frac{\ddot{x}_3^2}{c^2} = 1$$

en donde

$$a^2 = \frac{-d}{\lambda_1},\ b^2 = \frac{-d}{\lambda_2},\ c^2 = \frac{-d}{\lambda_3}$$

La cuádrica S se denomina elipsoide y su representación gráfica es de la forma:

$$S: \frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} + \frac{\ddot{x}_3^2}{c^2} = 1$$



En particular si $a = b = c$ la cuádrica S es una esfera de radio $|a|$.

2.º) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$ entonces la ecuación de la cuádrica S en el sistema de referencia R" es de la forma:

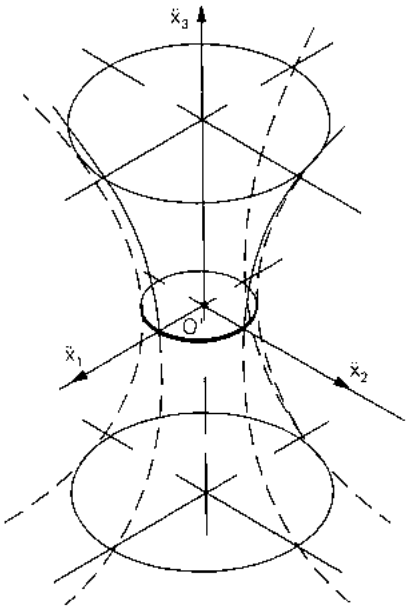
$$\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} - \frac{\ddot{x}_3^2}{c^2} = 1$$

en donde

$$a^2 = -\frac{d}{\lambda_1},\ b^2 = -\frac{d}{\lambda_2},\ c^2 = -\frac{d}{|\lambda_3|}$$

La cuádrica S se denomina hiperboloide de una hoja y su representación gráfica es de la forma:

$$S : \frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} - \frac{\ddot{x}_3^2}{c^2} = 1$$



3.º) Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$ entonces la ecuación de la cuádrica S en el sistema de referencia R'' es de la forma:

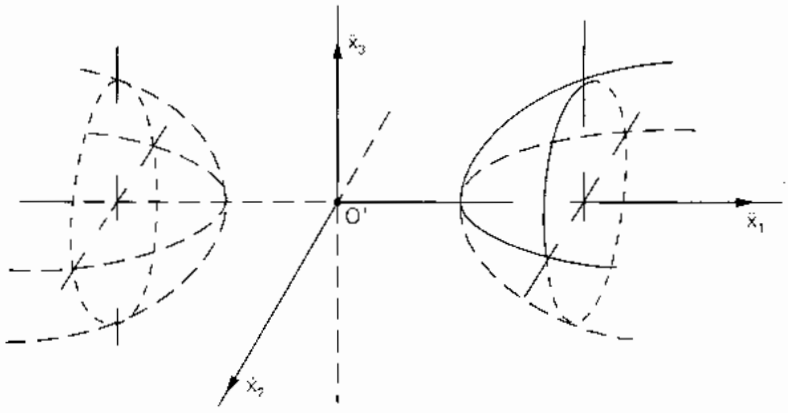
$$\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} - \frac{\ddot{x}_3^2}{c^2} = 1$$

en donde

$$a^2 = -\frac{d}{\lambda_1},\ b^2 = -\frac{d}{|\lambda_2|},\ c^2 = -\frac{d}{|\lambda_3|}$$

La cuádrica S se denomina hiperboloide de dos hojas y su representación gráfica es de la forma:

$$S: \frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} - \frac{\ddot{x}_3^2}{c^2} = 1$$



4.º) Si $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $\lambda_3 < 0$ entonces la ecuación de la cuádrica S en R" es de la forma:

$$-\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} - \frac{\ddot{x}_3^2}{c^2} = 1$$

Observemos que en este caso no hay ningún punto de E_3 que satisfaga tal ecuación y en consecuencia S coincide con el conjunto vacío.

II. *Supongamos que* $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ *y* $\lambda_3 = 0$:

En este caso, operando en la ecuación de S en el sistema de referencia R' se tiene que:

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(\dot{x}_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \left(b_3\dot{x}_3 + a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2}\right) = 0$$

Puede suceder que $b_3 = 0$ o $b_3 \neq 0$:

— Si $b_3 = 0$ la ecuación de S en R' se expresa en la forma:

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(\dot{x}_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 + \left(a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2}\right) = 0$$

Por otro lado, consideremos el nuevo sistema de referencia R" = (O', B' = $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\}$) de E_3 en donde la terna ordenada $\left(-\frac{b_1}{2\lambda_1}, -\frac{b_2}{2\lambda_2}, 0\right)$ representa a las coordenadas de O' en el sistema de referencia R' y observemos que las ecuaciones del cambio del sistema de referencia vienen definidas por:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_2 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} \\ \ddot{x}_3 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

denotando por las ternas ordenadas $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ a las coordenadas de un punto genérico de E_3 en los sistemas de referencia R' y R" respectivamente. Además dichas ecuaciones representan una traslación de E_3.

La ecuación de la cuádrica S en el nuevo sistema de referencia R" viene definida por:

$$\lambda_1\ddot{x}_1^2 + \lambda_2\ddot{x}_2^2 + d = 0$$

siendo $d = a_o - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1} - \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2}$

Se pueden presentar los siguientes subcasos:

1.º) Si d = 0 y los valores propios λ_1 y λ_2 son de signo contrario, entonces la ecuación de S en R" es de la forma:

$$a^2 \ddot{x}_1^2 - b^2 \ddot{x}_2^2 = 0$$

en donde $a^2 = |\lambda_1|$ y $b^2 = |\lambda_2|$. Además se observa que dicha ecuación se expresa como:

$$(a\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_2)(a\ddot{x}_1 - b\ddot{x}_2) = 0$$

y en consecuencia la cuádrica S coincide con el par de planos de ecuaciones $a\ddot{x}_1 + b\ddot{x}_2 = 0$ y $a\ddot{x}_1 - b\ddot{x}_2 = 0$ en el sistema de referencia R".

2.º) Si d = 0 y los valores propios λ_1 y λ_2 son del mismo signo, entonces la ecuación de S en R" es de la forma:

$$a^2 \ddot{x}_1^2 + b^2 \ddot{x}_2^2 = 0$$

en donde $a^2 = |\lambda_1|$ y $b^2 = |\lambda_2|$.

La cuádrica S coincide con el eje $O'\ddot{X}_3$ del sistema de referencia R" pues la ecuación de S se satisface solamente para:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

que define las ecuaciones del eje $O'\ddot{X}_3$ en el sistema de referencia R".

Si $d \neq 0$ la ecuación de S en R" es de la forma:

$$m\ddot{x}_1^2 + n\ddot{x}_2^2 = 1$$

en donde $m = -\frac{\lambda_1}{d}$ y $n = -\frac{\lambda_2}{d}$.

Entonces para $d \neq 0$ se tiene:

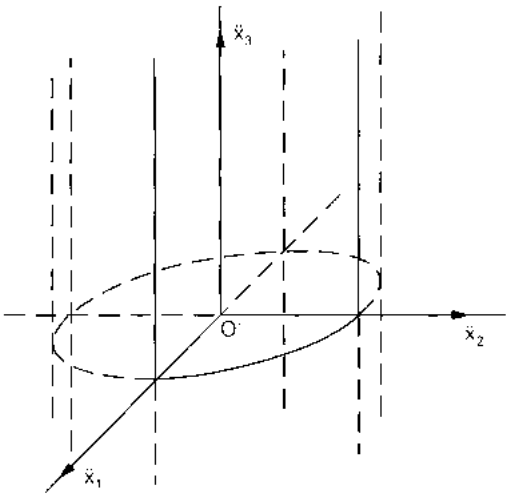
3.º) Si $m > 0$ y $n > 0$ la ecuación de S en R" es de la forma:

$$a^2 \ddot{x}_1^2 + b^2 \ddot{x}_2^2 = 1$$

en donde $a^2 = m$ y $b^2 = n$.

La cuádrica S es un cilindro elíptico y su representación gráfica es de la forma:

S: $a^2 \ddot{x}_1^2 + b^2 \ddot{x}_2^2 = 1$



4.º) Si $m < 0$ y $n < 0$ la ecuación de S en R" es de la forma:

$$-a^2 \ddot{x}_1^2 - b^2 \ddot{x}_2^2 = 1$$

en donde $m = -a^2$ y $n = -b^2$.

Observemos que en este caso no hay ningún punto de E_3 que satisfaga tal ecuación y en consecuencia S coincide con el conjunto vacío.

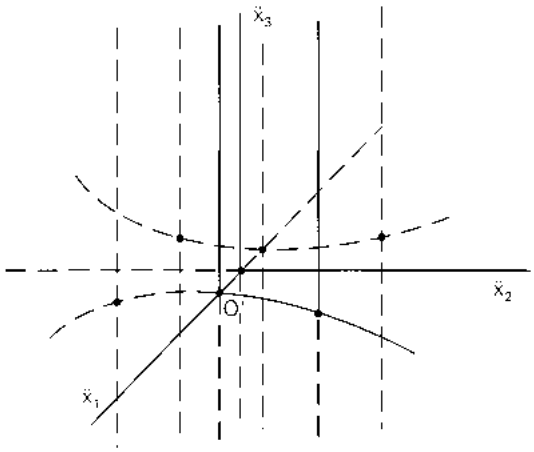
5.º) Si $m > 0$ y $n < 0$ la ecuación de S en R" es de la forma:

$$a^2 \ddot{x}_1^2 - b^2 \ddot{x}_2^2 = 1$$

en donde $a^2 = m$ y $n = -b^2$.

La cuádrica S es un cilindro hiperbólico y su representación gráfica es de la forma:

$$S: a^2 \ddot{x}_1^2 - b^2 \ddot{x}_2^2 = 1$$



6.º) Si $m < 0$ y $n > 0$ la ecuación de S en R" es de la forma:

$$-a^2 \ddot{x}_1^2 + b^2 \ddot{x}_2^2 = 1$$

en donde $a^2 = -m$ y $b^2 = n$.

La cuádrica S es un cilindro hiperbólico y su representación gráfica es del tipo del apartado 5.º) intercambiando los ejes $O'\ddot{X}_1$ y $O'\ddot{X}_2$.

—Si $b_3 \neq 0$ la ecuación de la cuádrica S en el sistema de referencia R' viene definida por:

$$\lambda_1 \left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(\dot{x}_2 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \right)^2 + b_3 \left(\dot{x}_3 + \frac{p}{b_3} \right) = 0$$

en donde $p = a_o - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1} - \dfrac{b_2^2}{4\lambda_2}$

Consideremos ahora el nuevo sistema de referencia R" = (O', B' = = $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\}$) en donde la terna ordenada $\left(-\dfrac{b_1}{2\lambda_1}, -\dfrac{b_2}{2\lambda_2}, -\dfrac{p}{b_3} \right)$ representa

a las coordenadas de O' en R' y observamos que las ecuaciones del cambio de referencia vienen definidas por:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_2 + \dfrac{b_2}{2\lambda_2} \\ \ddot{x}_3 = \dot{x}_3 + \dfrac{p}{b_3} \end{cases}$$

denotando por las ternas ordenadas $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ a las coordenadas de un punto genérico de E_3 en los sistemas de referencia R' y R" respectivamente. Además dichas ecuaciones representan una traslación de E_3.

La ecuación de la cuádrica S en el nuevo sistema de referencia R" viene definida por:

$$\lambda_1 \ddot{x}_1^2 + \lambda_2 \ddot{x}_2^2 + b_3 \ddot{x}_3 = 0$$

y como $b_3 \neq 0$ dicha ecuación se expresa en la forma:

$$\ddot{x}_3 = m\ddot{x}_1^2 + n\ddot{x}_2^2$$

en donde $m = -\dfrac{\lambda_1}{b_3}$ y $n = -\dfrac{\lambda_2}{b_3}$.

Se pueden presentar los siguientes subcasos:

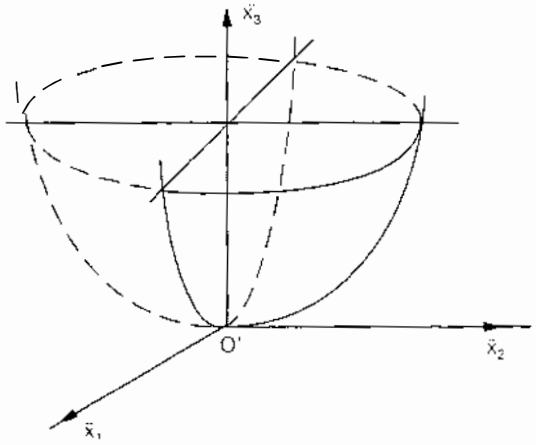
7.º) Si $m > 0$ y $n > 0$ la ecuación de la cuádrica S en R" es de la forma:

$$\ddot{x}_3 = \frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2}$$

en donde $m = \dfrac{1}{a^2}$ y $n = \dfrac{1}{b^2}$

La cuádrica S se denomina paraboloide elíptico y su presentación gráfica es de la forma:

$$S: \ddot{x}_3 = \frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2}$$



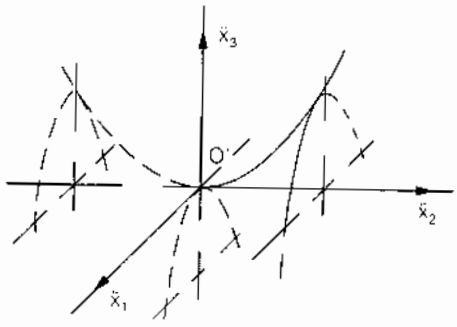
8.º) Si $m < 0$ y $n > 0$ la ecuación de S en R" es de la forma:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2}$$

en donde $m = -\frac{1}{a^2}$ y $n = \frac{1}{b^2}$

La cuádrica S se denomina paraboloide hiperbólico y su representación gráfica es de la forma:

$$S: \ddot{x}_3 = -\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} + \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2}$$

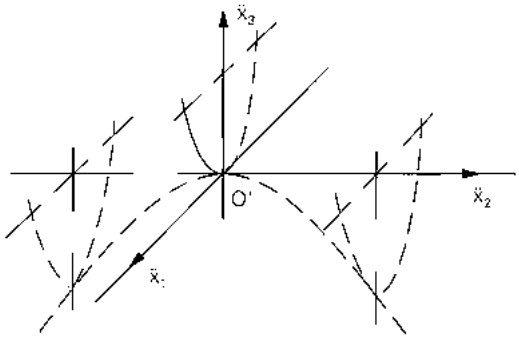


9.º) Si m > 0 y n < 0 la ecuación de la cuádrica S en R" es de la forma:

$$\ddot{x}_3 = \frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} \text{ en donde } m = \frac{1}{a^2} \text{ y } n = \frac{-1}{b^2}$$

La cuádrica S se denomina paraboloide hiperbólico y su representación gráfica es de la forma:

$$S: \ddot{x}_3 = \frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2}$$

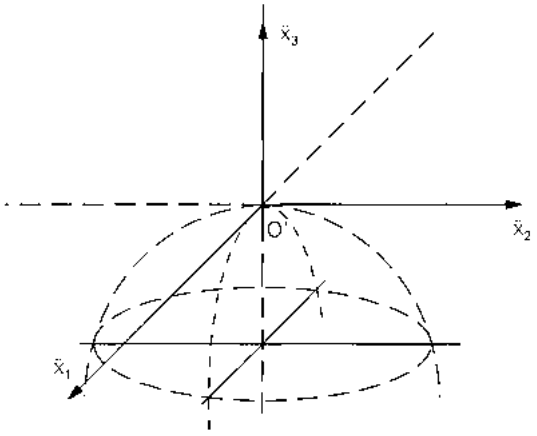


10.º) Si m < 0 y n < 0 la ecuación de S en R" es de la forma:

$$\ddot{x}_3 = -\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2} \text{ en donde } m = -\frac{1}{a^2} \text{ y } n = \frac{-1}{b^2}$$

La cuádrica S se denomina paraboloide elíptico y su representación gráfica es de la forma:

$$S: \ddot{x}_3 = -\frac{\ddot{x}_1^2}{a^2} - \frac{\ddot{x}_2^2}{b^2}$$



III. *Supongamos que* $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$ *y* $\lambda_3 = 0$:

En este caso la ecuación de la cuádrica S en el sistema de referencia ortonormal R' se expresa por:

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + b_2\dot{x}_2 + b_3\dot{x}_3 + a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} = 0$$

Se pueden presentar los siguientes subcasos:

1.º) Si $b_2 = b_3 = 0$ consideramos el nuevo sistema de referencia $R'' = (O', B' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\})$ de E_3 en donde la terna $\left(-\frac{b_1}{2\lambda_1}, 0, 0\right)$ representa a las coordenadas de O' en R' y observemos que las ecuaciones del cambio de referencia vienen definidas por:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

denotando por las ternas ordenadas $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ a las coordenadas de un punto genérico de E_3 en los sistemas de referencia R' y R" respectivamente. Además dichas ecuaciones representan una traslación de E_3.

La ecuación de S en R" viene definida por:

$$\ddot{x}_1^2 = p$$

en donde $p = \dfrac{1}{\lambda_1}\left(\dfrac{b_1^2}{4\lambda_1} - a_o\right)$.

Si $p > 0$ la cuádrica S coincide con el par de planos de ecuaciones respectivas $\ddot{x}_1 = \sqrt{p}$ y $\ddot{x}_1 = -\sqrt{p}$ en el sistema de referencia R".

Si $p = 0$ la cuádrica S coincide con el plano doble de ecuación $\ddot{x}_1 = 0$ en R".

Si $p < 0$ la cuádrica S coincide con el conjunto vacío pues no existe ningún punto de E_3 que satisfaga la ecuación $\ddot{x}_1^2 = p$.

2.º) Si $b_2 \neq 0$ y $b_3 = 0$ la ecuación de S en R' es de la forma:

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + b_2\left[\dot{x}_2 + \frac{1}{b_2}\left(a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}\right)\right] = 0$$

Consideremos ahora el nuevo sistema de referencia R" = (O', B' = $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\}$) en donde la terna ordenada $\left(-\frac{b_1}{2\lambda_1}, -\frac{1}{b_2}\left(a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}\right), 0\right)$ representa a las coordenadas de O' en R' y observemos que las ecuaciones del cambio de referencia vienen definidas por:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_2 + \dfrac{1}{b_2}\left(a_o - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1}\right) \\ \ddot{x}_3 = \dot{x}_3 \end{cases}$$

denotando por $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ a las coordenadas de un punto genérico de E_3 en los sistemas de referencia R' y R". Además dichas ecuaciones representan una traslación de E_3.

La ecuación de S en R" viene definida por:

$$\lambda_1 \ddot{x}_1^2 + b_2 \ddot{x}_2 = 0$$

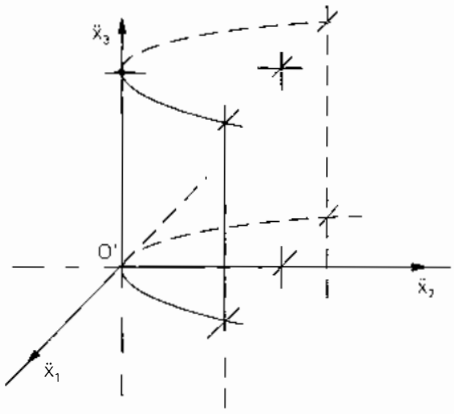
y también por:

$$\ddot{x}_1^2 = p\ddot{x}_2$$

en donde $p = \dfrac{-b_2}{\lambda_1}$

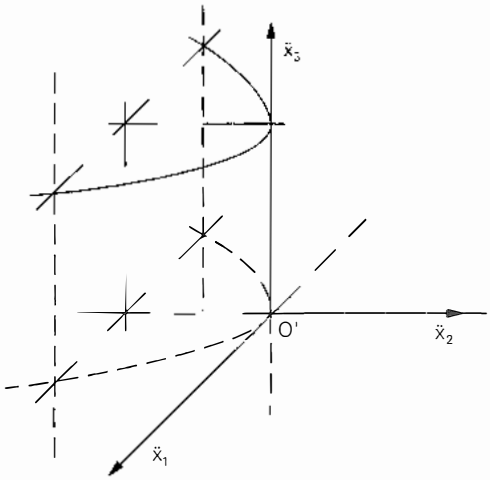
Si p > 0 la cuádrica S es un cilindro parabólico y su representación gráfica es del tipo:

S: $\ddot{x}_1^2 = p\ddot{x}_2$
(p > 0)



Si p < 0 la cuádrica S es también un cilindro parabólico y su representación gráfica es del tipo:

S: $\ddot{x}_1^2 = p\ddot{x}_2$
(p < 0)



3.º) Si $b_2 = 0$ y $b_3 \neq 0$ la ecuación de S en R' se expresa en la forma:

$$\lambda_1\left(\dot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + b_3\left[\dot{x}_3 + \frac{1}{b_3}\left(a_0 - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}\right)\right] = 0$$

Consideremos ahora el nuevo sistema de referencia R" = (O', B' = $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\}$) en donde la terna $\left(-\frac{b_1}{2\lambda_1},\ 0,\ -\frac{1}{b_3}\left(a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1}\right)\right)$ denota a las coordenadas de O' en R' y observemos que las ecuaciones del cambio de referencia vienen definidas por:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dfrac{b_1}{2\lambda_1} \\ \ddot{x}_2 = \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 = \dot{x}_3 + \dfrac{1}{b_3}\left(a_o - \dfrac{b_1^2}{4\lambda_1}\right) \end{cases}$$

representando por $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ a las coordenadas de un punto genérico de E_3 en los sistemas de referencia R' y R" respectivamente. Además dichas ecuaciones representan una traslación de E_3.

La ecuación de S en R" viene definida por:

$$\lambda_1 \ddot{x}_1^2 + b_3 \ddot{x}_3 = 0$$

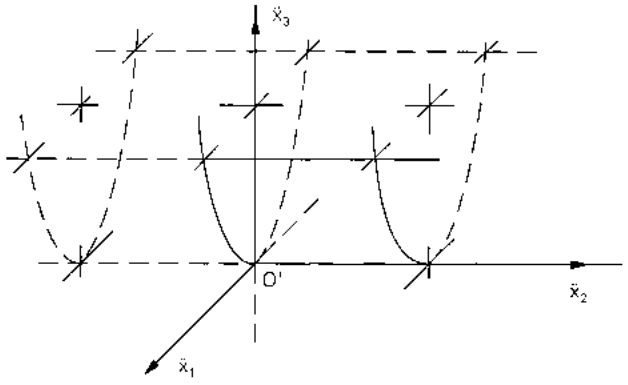
y también por:

$$\ddot{x}_1^2 = p\ddot{x}_3$$

en donde $p = \dfrac{-b_3}{\lambda_1}$.

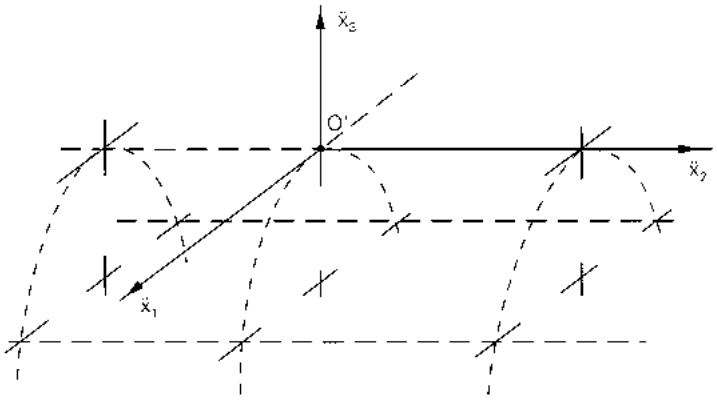
Si $p > 0$ la cuádrica S es un cilindro parabólico y su representación gráfica es del tipo:

S: $\ddot{x}_1^2 = p\ddot{x}_3$
$(p > 0)$



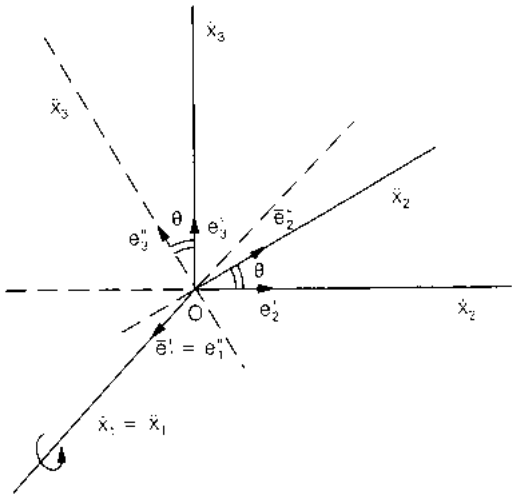
Si $p < 0$ la cuádrica S es también un cilindro parabólico y su representación gráfica es del tipo:

S: $\ddot{x}_1^2 = p\ddot{x}_3$
($p < 0$)



4.º) Si $b_2 \neq 0$ y $b_3 \neq 0$ consideramos el nuevo sistema de referencia $R'' = (O, B'' = \{\bar{e}_1'', \bar{e}_2'', \bar{e}_3''\})$ de E_3 tal que el cambio del sistema de referencia R' por el R'' viene definido por:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \ddot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x}_2 \cos\theta - \ddot{x}_3 \operatorname{sen}\theta \\ \dot{x}_3 = \ddot{x}_2 \operatorname{sen}\theta + \ddot{x}_3 \cos\theta \end{cases}$$



en donde $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ y $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ denotan a las coordenadas de un punto genérico de E_3 en los sistemas de referencia R' y R" respectivamente y además dichas ecuaciones definen una rotación de eje $O\dot{x}_1$ y ángulo θ.

La ecuación de S en el nuevo sistema de referencia ortonormal R" viene definida por:

$$\lambda_1\left(\ddot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + b_2(\ddot{x}_2\cos\theta - \ddot{x}_3\,\mathrm{sen}\,\theta) + b_3(\ddot{x}_2\,\mathrm{sen}\,\theta + \ddot{x}_3\cos\theta) + \\ + a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} = 0$$

y operando:

$$\lambda_1\left(\ddot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + (b_2\cos\theta + b_3\,\mathrm{sen}\,\theta)\ddot{x}_2 + (-b_2\,\mathrm{sen}\,\theta + b_3\cos\theta)\ddot{x}_3 + \\ + a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} = 0$$

Tomando $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{b_3}{b_2}$ se anula el coeficiente $(-b_2\,\mathrm{sen}\,\theta + b_3\cos\theta)$ y la ecuación de S en R" se expresa en la forma:

$$\lambda_1\left(\ddot{x}_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + c_2\ddot{x}_2 + a_o - \frac{b_1^2}{4\lambda_1} = 0$$

en donde $c_2 = b_2\cos\theta + b_3\,\mathrm{sen}\,\theta$ y $\theta = \mathrm{arctg}\dfrac{b_3}{b_2}$

Entonces, considerando que $c_2 \neq 0$, resulta que salvo notación y en todo caso situación en el espacio, nos encontramos en el caso del apartado 2.º). Por tanto la cuádrica S es un cilindro parabólico.

Ejercicio propuesto

Sean las cuádricas de ecuaciones en un sistema de referencia ortonormal $R = (O, B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\})$ del espacio afín auclídeo ordinario E_3:

a) $9x_1^2 + 4x_2x_3 + 6x_1 - 6x_2 + 1 = 0$
b) $x_1^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_3 + 4 = 0$
c) $2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 1 = 0$
d) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 + 2x_3 = 0$

Clasificar dichas cuádricas.

Apéndice I

Generalidades sobre teoría de conjuntos y estructuras algebraicas

Los conceptos que se desarrollan en este apéndice de la asignatura aparecen en los temarios oficiales de Bachillerato y Formación Profesional, de manera que teóricamente todos los alumnos deben de conocerlos.

Advertimos que nuestro objetivo es comunicar al alumno un mínimo de conceptos que le permitan seguir sin dificultad el resto del curso.

Por este motivo las definiciones que demos carecerán a veces del rigor que algunos desearían, pero a cambio trataremos de facilitar la comprensión intuitiva de los conceptos definidos.

1. CONJUNTOS

«Un conjunto está formado por elementos». Esta afirmación se nos presenta como evidente y cualquier discusión respecto a ella se sale de nuestro objetivos.

Como norma general aceptaremos representar los conjuntos con letras mayúsculas y los elementos con letras minúsculas.

Diremos que un conjunto está bien definido si disponemos de un criterio que permita conocer si un determinado elemento pertenece o no al conjunto. Existen dos formas de definir un conjunto:

—*Por extensión,* esto es citando como en una lista todos los elementos del conjunto. Ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}$ significa que el conjunto A está formado por los números enteros 1, 2, 3.

—*Por comprensión,* esto es dando un propiedad que cumplan todos los elementos del conjunto y sólo ellos. A esta propiedad se le llama *propiedad característica* de los elementos del conjunto. Ejemplo: el conjunto de todos los zapatos derechos del mundo.

Un ejemplo de conjunto mal definido sería: el conjunto de la mitad de los zapatos del mundo.

En la teoría de conjuntos se emplean ciertos símbolos muy útiles para la escritura. Los principales son:

Símbolo	Significado
$\wedge$	y
$\vee$	o
$\exists, \nexists$	existe, no existe
$\exists!$	existe un único
$\forall$	para todos o cualquiera que
$\in, \notin$	pertenece, no pertenece
/	tal que
:	cumple
$\Rightarrow$	implica o Si ... entonces ...
$\Leftrightarrow$	equivale a o si y sólo si.

Los conjuntos que a nosotros nos van a ocupar son los de las matemáticas. Entre éstos existen unos que por su importancia han recibido una designación especial. Algunos de ellos son:

Símbolo	Significado
N ó $\mathbb{Z}^+$	Conjunto de números naturales (no contiene el cero)
$\mathbb{Z}$	Conjunto de los número enteros
Q	Conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	Conjunto de los números complejos

Evidentemente todos estos conjuntos son infinitos, lo cual no impide que unos sean parte de otros. Aclararemos esta idea.

Relación de inclusión entre conjuntos: Dados los conjuntos A y B se dice que A está incluido en B, que A es parte de B, o que A es un subconjunto de B cuando todo elemento de A pertenece a B.

La relación *A está incluido en B* se representa por $A \subset B$. Su negación será $A \not\subset B$.

La relación *A incluye B* se representa por $A \supset B$. Su negación será $A \not\supset B$.

Evidentemente $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

Ahora es fácil comprender que $N \subset Z \subset Q \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Otro ejemplo

Si $A = \{1, -1, 2\} \wedge B = \{x \in \mathbb{R} / x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0\}$ tenemos que $A \not\subset B$ porque $2 \notin B$.

Complementario de un conjunto. Diferencia de conjuntos. Conjunto vacío: Sea $A \subset E$. Se llama *complementario de A con respecto a E* al conjunto de los elementos de E que no pertenecen a A. Este conjunto se representa por $C_E A$.

Llamamos *conjunto vacío* al conjunto que no tiene ningún elemento. El conjunto vacío se representa por $\varnothing$. Por definición el conjunto vacío está incluido en cualquier otro conjunto.

Llamamos *diferencia de los conjuntos A y B* al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B. Este conjunto se representa por $A - B$.

Ejercicio

Analizar las siguientes proposiciones y definiciones diciendo cuáles son ciertas y cuáles no:

a) $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$
b) $A \subset B \Rightarrow \forall x \in A : x \in B$
c) $A = B \Leftrightarrow [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$
d) $A \subset B \Leftrightarrow \exists x \in A : x \in B$
e) $A \subset B \Rightarrow \exists x \in A : x \in B$
f) $A \not\supset B \Leftrightarrow \exists x \in B : x \notin A$
g) Si $A \subset E$, entonces $C_E A = \{x \in E / x \notin A\}$
h) $A - B = \{x \in A / x \notin B\}$
i) Si $A \subset E$, entonces $C_E A \subset E$
j) Si $A \subset E$, entonces $C_E A = E - A$

Solución

Son falsos d) y e). El resto son ciertos.

Operaciones con conjuntos: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Se llama *unión de A y B* y se representa $A \cup B$ al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B.

Se llama *intersección de A y B* y se representa $A \cap B$ al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y B a la vez.

Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 4, 7, 9\}$, $B = \{-1, 0, 4\}$.
Entonces $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 4, 7, 9\}$ y $A \cap B = \{4\}$.

Ejercicio

Analizar las siguientes definiciones diciendo cuáles son ciertas y cuáles no:

a) $A \cup B = \{x \in A \,/\, x \notin B\}$
b) $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$
c) $A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$
d) $A \cap B = \{x \in A \,/\, x \notin B\}$
e) $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$

Solución

Son ciertas c) y e). Son falsas las demás.

Citemos ahora sin demostración las propiedades de la unión y la intersección de conjuntos. El alumno puede verificarlas fácilmente.

Propiedades de la unión

1) $A \subset A \cup B \;\wedge\; B \subset A \cup B$
2) $A \cup A = A \;\wedge\; A \cup \varnothing = A$
3) $A \cup B = B \cup A$
4) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
5) $A \cup C_E A = E, \forall\, A \subset E$

Propiedades de la intersección

1) $A \cap B \subset A \;\wedge\; A \cap B \subset B$
2) $A \cap A = A \;\wedge\; A \cap \varnothing = \varnothing$
3) $A \cap B = B \cap A$
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5) $A \cap C_E A = \varnothing, \forall\, A \subset E$

Propiedades conjuntas de la unión e intersección

1) $A \cap (A \cup B) = A$
2) $A \cup (A \cap B) = A$
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5) $C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B), \forall A, B \subset E$
6) $C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B), \forall A, B \subset E$

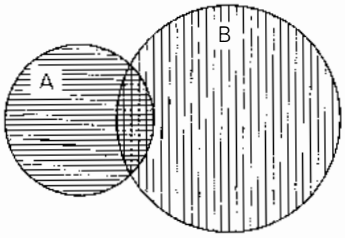
Son de gran utilidad en la comprensión y verificación de estas propiedades los *diagramas de Venn,* que son representaciones gráficas de conjuntos utilizando regiones del plano limitadas por curvas cerradas convexas.

Los diagramas de Venn se completan mediante colores o rayados que permitan visualizar los resultados interesantes de operaciones con conjuntos.

Ejemplo

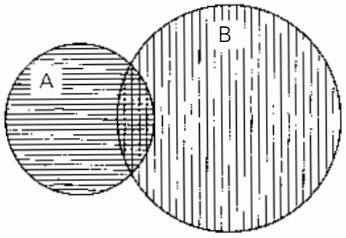
Representación mediante diagramas de Venn de:

a) La unión de dos conjuntos A y B cuya intersección es distinta del vacío.



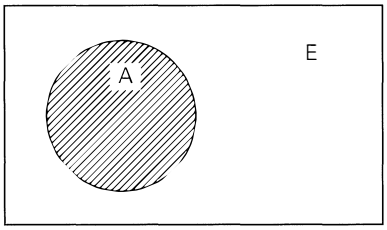
A: rayado horizontal.
B: rayado vertical.
A ∪ B: todo lo rayado

b) La diferencia de dos conjuntos cuya intersección es distinta del vacío y ninguno de ellos está incluido en el otro.



A – B: zona rayada sólo con rayado horizontal

c) El complemento de un conjunto respecto a otro en el cual está incluido.



C_E A: zona no rayada interior al rectángulo E.

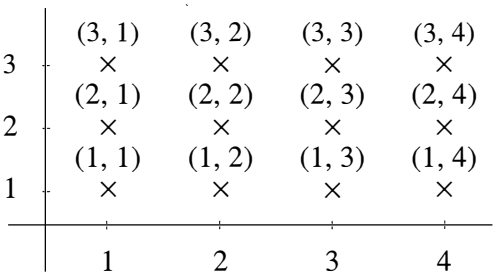
Producto cartesiano de conjuntos: Dados dos conjuntos A y B se llama «conjunto producto cartesiano de A y B» y se representa por $A \times B$ al conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Los elementos de $A \times B$ tienen la forma (a, b) y reciben el nombre de *pares ordenados.*

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces una representación gráfica de $A \times B$ es:



Cada par se representa por una pequeña aspa. Nótese que $(1, 2) \neq (2, 1)$

Análogamente definimos: dados tres conjuntos A, B, C.

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) / a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

A los elementos de $A \times B \times C$ se les llama *ternas ordenadas.*

Ejemplo

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) / a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}\}$$

En general $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1\ a_2, ..., a_n)\} / a_i \in A_i, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}\}$
A los elementos de $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ se les llama *n-tuplas.*

2. APLICACIONES

Sean dos conjuntos no vacíos A y B. Se llama *aplicación f de A en B,* a una regla que hace corresponder a cada elemento de A un único elemento de B.

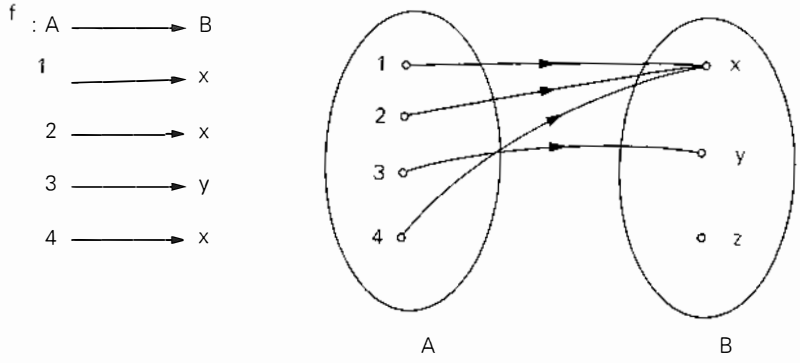
Al único elemento de B que corresponde a un elemento $a \in A$ se le llama *imagen de a por la aplicación f* y se le representa por *f(a).* A su vez, se dice que a es el *origen de f(a).*

Al conjunto A se le llama *conjunto de definición,* al conjunto B *conjunto de los valores* y al conjunto f(A) formado por los elementos de B que son imagen de los elementos de A *conjunto imagen de la aplicación f.*

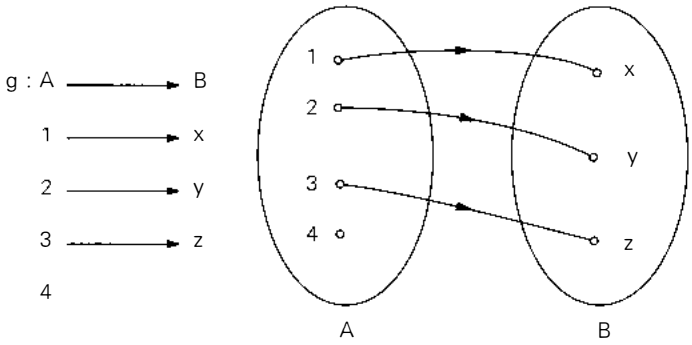
Nótese que de acuerdo con la definición, todos los elementos de A tienen su correspondiente imagen y ésta es única. No es contrario a la definición que varios elementos de A tengan la misma imagen en B ni que haya elementos en B sin origen.

Ejemplo

Sea A = {1, 2, 3, 4} y B = {x, y, z} y consideremos:



f es una aplicación en la que A es el conjunto de definición, B es el conjunto de los valores y f(A) = {x, y} es el conjunto imagen de la aplicación f.



g no es una aplicación pues existe un elemento de A (el 4) que no tiene imagen por g.

Ejercicio

Decir cuál de estas reglas de correspondencia es una aplicación y cuál no.

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{definida por } h(x) = x + 3$$
$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{definida por } k(x) = \sqrt{x}$$
$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{definida por } p(x) = \text{Log } (x)$$

Solución

h sí es una aplicación, k no lo es porque $1 \in \mathbb{R}$ tendría dos imágenes $(+1 \wedge -1)$ y p no lo es porque los números negativos no tienen logaritmo.

En los casos como el de la aplicación h en los que la regla que determina la imagen de los elementos del conjunto de definición corresponde a un algoritmo dado es muy útil la representación del tipo:

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{ó} \qquad \mathbb{R} \overset{h}{\to} \mathbb{R}$$
$$x \to x + 3 \qquad\qquad x \to x + 3$$

Aplicación idéntica: Sea un conjunto A no vacío. Se llama *aplicación idéntica definida sobre A* a la aplicación $i_A : A \to A$ definida por $i_A(x) = x$, $\forall\, x \in A$.

Composición de aplicaciones: Sean A, B, C tres conjuntos no vacíos y dos aplicaciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Llamamos *aplicación compuesta de f con g* a la aplicación $g \circ f : A \to C$ definida por $g \circ f(x) = g[f(x)]$, $\forall\, x \in A$.

Nótese el orden de f y g en la escritura $g \circ f$.

Ejemplo

Sean las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} f : [0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R} & \to & [0, +\infty) \\ x & \to & x^2 \end{array}$$

Hallar las aplicaciones compuestas $g \circ f$ y $f \circ g$.

Solución

a)

$$\begin{array}{ccccc} [0, +\infty) & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} & \overset{g}{\to} & [0, +\infty) \\ x & \to & x + 1 & \to & (x + 1)^2 \\ & & \| & & \| \\ & & y & \to & y^2 \end{array}$$

Por tanto $\begin{array}{ccc} g \circ f : [0, +\infty) & \to & [0, +\infty) \\ x & \to & (x + 1)^2 \end{array}$

b)

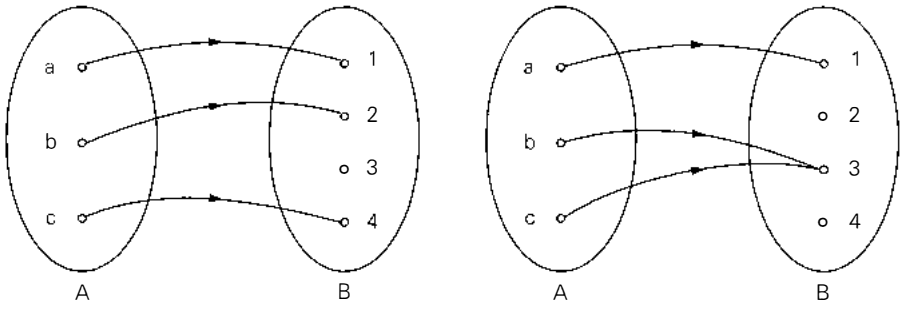
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \overset{g}{\to} & [0, +\infty) & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 & \to & x^2 + 1 \\ & & \| & & \| \\ & & y & \to & y + 1 \end{array}$$

Por tanto $\begin{array}{ccc} f \circ g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 + 1 \end{array}$

Como vemos $g \circ f \neq f \circ g$ en este caso. De aquí podemos concluir que la composición de aplicaciones no tiene la propiedad conmutativa. Sin embargo se demuestra fácilmente que sí tiene la propiedad asociativa.

Clasificación de las aplicaciones: Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se dice que una aplicación f : A → B es *inyectiva* cuando a elementos distintos de A corresponden siempre imágenes distintas en B, es decir ∀ a, a' ∈ A / a ≠ a' : f(a) ≠ f(a').

Ejemplo



Existe una definición equivalente a la dada que en muchos casos resulta útil para clasificar una aplicación inyectiva. Abreviadamente dice: una aplicación f : A → B es inyectiva si a imágenes iguales corresponden orígenes iguales, es decir, ∀ a, a' ∈ A : f(a) = f(a') ⇒ a = a'.

Ejemplo

Decir si las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x + 1 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & [-1, 1] \\ x & \to & \text{sen } x \end{array}$$

son inyectivas.

Solución

a) Sean x, y ∈ ℝ. Entonces:

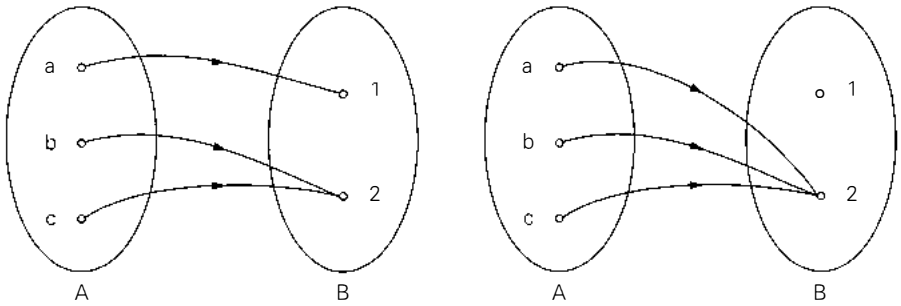
$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x + 1}{2} = \frac{y + 1}{2} \Rightarrow x = y$$

Por tanto f es inyectiva.

b) g no es inyectiva porque sen Π = sen 2Π.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se dice que una aplicación $f : A \to B$ es *sobreyectiva* cuando $f(A) = B$.

Ejemplo



La definición equivalente a ésta que suele resultar muy útil en la práctica dice: una aplicación $f : A \to B$ es sobreyectiva cuando todo elemento de B es imagen de algún elemento de A, es decir, $\forall\, y \in B : \exists\, x \in A \,/\, f(x) = y$.

Ejemplo

Decir si las aplicaciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : Z \to Z \times Z$$
$$x \to \frac{x+1}{2} \quad y \quad x \to (x, x)$$

son sobreyectivas.

Solución

a) Habrá que ver si $\forall\, y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = y$.

$$f(x) = y \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{2} = y \;\Rightarrow\; x = 2y - 1 \in \mathbb{R}$$

Hemos obtenido así un algoritmo que nos da el origen $x \in \mathbb{R}$ correspondiente a un elemento cualquiera $y \in \mathbb{R}$. Por tanto f es sobreyectiva.

b) g no es sobreyectiva porque los elementos (a, b) $\in Z \times Z$ con $a \neq b$ no tienen origen por g.

Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Una aplicación $f : A \to B$ es *biyectiva* cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Una definición equivalente dice: una aplicación $f : A \to B$ es biyectiva si todo elemento de B tiene origen y este origen es único, es decir

$$\forall\, y \in B : \exists!\, x \in A \,/\, f(x) = y.$$

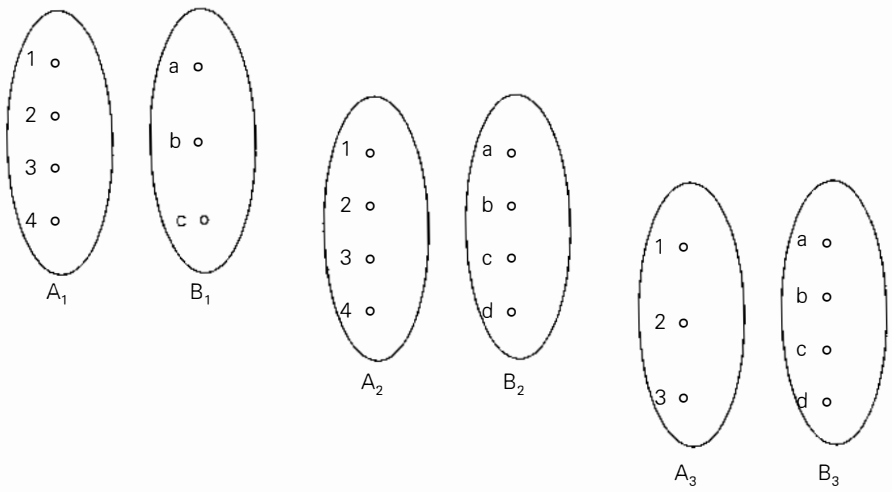
Ejemplo

De las aplicaciones estudiadas en esta cuestión sólo es biyectiva la $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$x \to \frac{x+1}{2}$$

Ejercicio

Tratar de construir una aplicación biyectiva en cada uno de los diagramas siguientes:



Añadiremos para terminar que pueden existir aplicaciones que no pertenecen a ninguno de los tres tipos citados Se dice entonces que estas aplicaciones son *aplicaciones en.*

Ejercicio

Clasificar las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & [0, +\infty) \\ x & \to & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h : [-\Pi, \Pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \text{sen } x \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} k : [-\Pi, \Pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \to & \text{sen } x \end{array}$$

Para clasificar estas aplicaciones es de gran ayuda su representación gráfica.

Aplicación inversa: Sea una aplicación biyectiva $f : A \to B$. Se llama *aplicación inversa de f* a la aplicación $f^{-1} : B \to A$ que hace corresponder a todo elemento $f(x) \in B$ su origen por la aplicación f. Es decir

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : B & \to & A \\ f(x) & \to & x \end{array}$$

o lo que es lo mismo $f^{-1}[f(x)] = x, \quad \forall\, x \in A$.

Evidentemente $f^{-1} \circ f = i_A$.

3. LEYES DE COMPOSICION Y ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

Se llama *Ley de composición interna u operación interna definida en un conjunto no vacío A* a toda aplicación

$$\begin{array}{rcl} f : A \times A & \to & A \\ (a, b) & \to & c = f(a, b) \end{array}$$

Las operaciones internas se suelen representar mediante signos como $*, \perp, \div, \circ, +, ., \ldots$ de la forma

$$\begin{array}{rcl} * : A \times A & \to & A \\ (a, b) & \to & a * b \end{array}$$

Ejemplos

a) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(a, b) \to a + b$

es la operación interna que llamamos suma de números reales.

b) Sin embargo $- : N \times N \to N$
$(a, b) \to a - b$

no tiene sentido cuando $a \leq b$ pues $a - b \notin N$ en estos casos. Por tanto la diferencia de números naturales no es una operación interna.

c) No todas las operaciones internas tienen porqué ser tan familiares como la citada en a). Así tenemos otros ejemplos como

$$\begin{aligned} \min : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\to \min \{a, b\} \end{aligned}$$

que consiste en tomar de dos números reales el menor de ellos. O también

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\to \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio

Decir cuáles de las siguientes leyes son operaciones internas:

a) $* : N \times N \to N$
$(a, b) \to \dfrac{a + b}{2}$

b) $|-| : Z \times Z \to Z$
$(a, b) \to |a - b|$

c) $. : N \times N \to N$
$(a, b) \to a \,.\, b$

d) $\div : Z \times Z \to Z$
$(a, b) \to a/b$

Solución

b) y c) sí lo son. a) y d) no lo son.

Sea H un subconjunto no vacío de un conjunto A en el que está definida una ley de composición interna *. Se dice que H es *cerrado para la operación interna* * cuando $\forall\, a, b \in H : a * b \in H$.

Entonces llamamos *operación interna* $*_H$ *inducida en H por la operación interna* * a la operación interna $*_H : H \times H \to H$ definida por $a*_H b = a * b, \ \forall\, a, b \in H$.

Ejemplo

a) El conjunto Z – N es cerrado para la suma usual definida en Z. Podemos decir por tanto que $+_{Z-N}$ es la operación interna inducida en Z – N por la suma usual en Z.
b) Sin embargo el conjunto Z – N no es cerrado para el producto usual definido en Z. Podemos decir por tanto que $\bullet_{Z-N}$ no es una operación interna y no podemos hablar de la operación inducida en Z – N por el producto usual en Z.

Ley de composición externa: Sean K y A dos conjuntos no vacíos. Se llama *operación externa o ley de composición externa definida sobre A con dominio de operadores K* a toda aplicación de la forma

$$\begin{array}{rcl} f : K \times A & \to & A \\ (\lambda, a) & \to & f(\lambda, a) \end{array}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (\lambda, a) & \to & |\lambda| \,.\, a \end{array}$$

donde $|\lambda|$ es el módulo del número complejo $\lambda \in \mathbb{C}$, es una ley de composición externa definida sobre R con dominio de operadores $\mathbb{C}$.

Sea H un subconjunto no vacío de un conjunto A en el que está definida una operación externa f con dominio de operadores K. Decimos que H es *cerrado para la operación externa f* cuando $\forall\, \lambda \in K \wedge \forall\, a \in H : f(\lambda, a) \in H$.

Entonces llamamos *operación externa* f_H *inducida en H por la operación f* a la operación $f_H : K \times H \to H$ definida por $f_H(\lambda, a) = f(\lambda, a)$, $\forall\, \lambda \in K \wedge \forall\, a \in H$.

Estructuras algebraicas:

Una estructura algebraica es un conjunto no vacío A con una o varias operaciones (internas o externas) definidas en él.

Grupos:

Un conjunto G no vacío provisto de una operación interna * tiene estructura de grupo si cumple las siguientes propiedades:

—Asociativa: $\forall$ a, b, c $\in$ G : a * (b * c) = (a * b) * c
—Existe elemento neutro: $\exists$ e $\in$ G / $\forall$ a $\in$ G : a * e = e * a = a
—Todo elemento tiene simétrico: $\forall$ a $\in$ G, $\exists$ a' $\in$ G : a * a' = a' * a = e

Además si (G, *) cumple la propiedad conmutativa, $\forall$ a, b $\in$ G : a * b = b * a se dice que G tiene estructura de grupo conmutativo o abeliano.

Ejemplo

a) (N, +) no es un grupo pues no se cumple la propiedad de elemento neutro. En efecto, el elemento neutro de la suma debería ser el cero y como ya sabemos $0 \notin N$.
b) (Z, +) es un grupo conmutativo en el que el elemento neutro es el $0 \in Z$ y para obtener el simétrico de un número entero basta cambiar su signo.

Otros grupos conmutativos son ($\mathbb{R}$, +) y ($\mathbb{C}$, +).

Nótese que para concluir todo lo dicho en este ejemplo basta con recordar las propiedades de la suma de números que ya se conocen.

Ejercicio

De las siguientes estructuras algebraicas decir cuáles son grupos y cuáles no:

a) (N, .)
b) (Z, .) b') (Z – {0}, .)
c) (Q, .) c') (Q – {0}, .)
d) ($\mathbb{R}$, .) d') ($\mathbb{R}$ – {0}, .)
e) ($\mathbb{C}$, .) e') ($\mathbb{C}$ – {0}, .)

Solución

c', d', e' son grupos conmutativos. Los demás no son grupos.

Una propiedad de los grupos: sea (G, *) un grupo. Entonces todo elemento de G es «regular» (simplificable), es decir

$$\forall a, b, c \in G : a * b = a * c \Rightarrow b = c$$
$$\forall a, b, c \in G : b * a = c * a \Rightarrow b = c$$

Demostración

Sean a, b, c $\in$ G tres elementos genéricos de G. Entonces por ser (G, *) un grupo $\exists$ a' $\in$ G simétrico de a y tenemos que:

$$a * b = a * c \Rightarrow a' * (a * b) = a' * (a * c) \Rightarrow (a' * a) * b = (a' * a) * c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e * b = e * c \Rightarrow b = c$$

$$b * a = c * a \Rightarrow (b * a) * a' = (c * a) * a' \Rightarrow b * (a * a') = c * (a * a') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b * e = c * e \Rightarrow b = c$$

y con esto queda demostrada la propiedad.

Subgrupos: Sea (G, *) un grupo y H un subconjunto no vacío de G cerrado para la operación interna *. Decimos que H es un subgrupo de G cuando el par $(H, *_H)$ tiene estructura de grupo.

Propiedades de un subgrupo: Sea H un subgrupo del grupo (G, *). Entonces:

a) El elemento neutro de H coincide con el elemento neutro de G.
b) Los elementos simétricos en H y en G de un elemento cualquiera de H coinciden.

Demostración

La demostración de estas propiedades la puede realizar el alumno, o si no la encontrará en cualquier texto de Algebra General.

Proposición

Sea (G, *) un grupo y H un subconjunto no vacío de G. Entonces:

$$H \text{ es un subgrupo de } G \Leftrightarrow \forall\, a, b \in H : a * b' \in H.$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sean a, b $\in$ H dos elementos genéricos de H.
Entonces:

$$H \text{ es un subgrupo de } G \overset{a, b \in H}{\Rightarrow} a, b' \in H \text{ y } H \text{ es cerrado para } * \Rightarrow a * b' \in H$$

⇐) Por hipótesis

$$\forall\, a, b \in H : a * b' \in H \qquad (1)$$

Demostraremos primero que $e \in H$.
Como $H \neq \varnothing$ podemos tomar uno de sus elementos. Sea $a \in H$. Entonces:

$$a \in H \underset{(1)}{\Rightarrow} a * a' \in H \Rightarrow e \in H$$

Veamos ahora que si $a \in H$, entonces $a' \in H$.

$$a \in H \underset{(1) \wedge e \in H}{\Rightarrow} e * a' \in H \Rightarrow a' \in H$$

Veamos ahora que H es cerrado para la operación * definida en G. Sean $a, b \in H$ dos elementos genéricos de H. Entonces:

$$a, b \in H \Rightarrow a, b' \in H \Rightarrow a * (b')' = a * b \in H$$

Así pues, hemos demostrado que si se cumple (1) H es cerrado para la operación * definida en G. Además, de la propiedad anterior se desprende inmediatamente que $e \in H$ es el elemento neutro de $(H, *_H)$ y $\forall\, a \in H$ el elemento $a' \in H$ es el simétrico de a en $(H, *_H)$. Nos falta demostrar que $*_H$ es asociativa en H, pero como por definición $*_H$ coincide con * cuando se opera con elementos de H, si * es asociativa en G, $*_H$ será asociativa en H.

Por tanto (1) $\Rightarrow$ H es un subgrupo de G.

Anillos:

Sea un conjunto no vacío A en el que se han definido dos operaciones internas que representamos por (+) y (.). Se dice que A con estas dos operaciones tiene estructura de «anillo» cuando cumple las siguientes propiedades:

—(A, +) es un grupo conmutativo. Al elemento neutro de este grupo se le llama elemento cero y el simétrico de un elemento $a \in A$ se representa por –a.

—La operación (.) es asociativa, es decir $\forall$ a, b, c $\in$ A : a . (b . c) = = (a . b) . c.
—La operación (.) es distributiva por la derecha y por la izquierda respecto a la operación (+), es decir,

$$\forall a, b, c \in A : a . (b + c) = a . b + a . c$$
$$\forall a, b, c \in A : (b + c) . a = b . a + c . a$$

Además si la operación (.) es conmutativa se dice que A tiene estructura de *anillo conmutativo.*

Si la operación (.) tiene elemento neutro a éste se le llama elemento unidad y el anillo se dice que es *unitario.*

Hay que advertir que el hecho de haber representado las operaciones en A con los signos (+) y (.) no significa que éstas deban coincidir necesariamente con las operaciones suma y producto de los conjuntos de números. La razón para haber adoptado estos signos es que el ejemplo modelo de la estructura de anillo es (Z, +, .) donde (+) y (.) son efectivamente la suma y el producto usuales en Z.

Otros ejemplos de anillos son (Q, +, .), ($\mathbb{R}$, +, .), ($\mathbb{C}$, +, .) que junto con el anterior son conmutativos y unitarios.

Algunas propiedades de los anillos: Sea (A, +, .) un anillo. Entonces:

a) $\forall$ a $\in$ A : a . 0 = 0 . a = 0
b) $\forall$ a, b, c $\in$ A se cumplen las siguientes reglas de cálculo:

$$a . (-b) = (-a) . b = -(a . b)$$
$$(-a) . (-b) = a . b$$

Demostración

El alumno puede demostrarlas o consultar algún texto de Algebra General.

Hay que advertir que en un anillo el producto de dos elementos distintos de cero puede ser igual a cero. A este tipo de elementos se les llama *divisores de cero* del anillo.

Subanillo: Sea (A, +, .) un anillo y sea H un subconjunto no vacío de A cerrado para las operaciones internas (+) y (.) definidas en A. Se dice que H es un subanillo de A cuando ($H, +_H, \cdot_H$) tiene estructura de anillo.

Proposición

Sea (A, +, .) un anillo y H un subconjunto no vacío de A. Entonces H es un subanillo de A $\Leftrightarrow \forall a, b \in H : a - b \in H \wedge a \,.\, b \in H$ donde $a - b = a + (-b)$.

Demostración

$\Rightarrow$) Sean $a, b \in H$ dos elementos genéricos de H.

H subanillo de (A, +, .) $\Rightarrow$ H es subgrupo de (A, +) $\Rightarrow$ $a - b \in H$.

Además H subanillo de (A, +, .) y $a, b \in H \Rightarrow a \,.\, b \in H$

$\Leftarrow$) Por hipótesis

$$\forall a, b \in H : a - b \in H \wedge a \,.\, b \in H \qquad (1)$$

$[\forall a, b \in H : a - b \in H] \Rightarrow$ H es un subgrupo de (A, +).

La suma es conmutativa en H por serlo en A.

Como $\forall a, b \in H : a \,.\, b \in H$, el conjunto H es cerrado para la operación (.) y con esta misma operación es asociativa y distributiva respecto a la (+) en A, también $(.)_H$ lo será en H.

Por tanto

$$(1) \Rightarrow \text{H es un subanillo de A.}$$

Cuerpos:

Sea un conjunto no vacío K en el que se han definido dos operaciones internas que representamos por (+) y (.).

Se dice que K con estas dos operaciones tiene estructura de «cuerpo» cuando cumple las siguientes propiedades:

— (K, +) es un grupo conmutativo.
— $(K - \{0\}, .)$ es un grupo.
— La operación (.) es distributiva por la derecha y por la izquierda respecto a la operación (+).

Además si la operación (.) es conmutativa se dice que K tiene estructura de *cuerpo conmutativo.*

Los simétricos respecto a la (+) y (.) en un cuerpo K reciben los nombres especiales de «opuestos» e «inversos» respectivamente.

Ejemplo

$(\mathbb{Q}, +, .)$, $(\mathbb{R}, +, .)$, $(\mathbb{C}, +, .)$ son cuerpos conmutativos.

Propiedades de los cuerpos: sea (K, +, .) un cuerpo. Es evidente que (K, +, .) será entonces un anillo. Por tanto las propiedades de los anillos se aplican íntegramente a los cuerpos.

Además:

a) $\forall\, a, b \in K : [a \,.\, b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0]$. Es decir todo cuerpo carece de divisores de cero.
b) Todo elemento de K distinto de cero es *regular* (simplificable) por la derecha y por la izquierda respecto a la operación (.), es decir

$$\forall\, a \in K - \{0\}, \forall\, b, c \in K : a \,.\, b = a \,.\, c \Rightarrow b = c$$
$$\forall\, a \in K - \{0\}, \forall\, b, c \in K : b \,.\, a = c \,.\, a \Rightarrow b = c$$

Demostración

El alumno puede demostrarlas o consultar algún texto de Algebra General.

Subcuerpos: sea (K, +, .) un cuerpo y sea H un subconjunto no vacío de K cerrado para las operaciones (+) y (.) definidas en K. Se dice que H es un «subcuerpo de K» cuando $(H, +_H, \cdot_H)$ tiene estructura de cuerpo.

Proposición

Sea (K, +, .) un cuerpo y sea H un subconjunto no vacío de K. Entonces:

$$\text{H es un subcuerpo de K} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\, a, b \in H : a - b \in H \\ \forall\, a, b \in H / b \neq 0 : a \cdot b^{-1} \in H \end{cases}$$

donde b^{-1} es el inverso de b.

Demostración

Esta demostración es ahora casi inmediata y el alumno la puede realizar sin dificultad.

Apéndice II

Aplicaciones lineales

1. APLICACIONES LINEALES

Sean dos K-espacios vectoriales V y V'. Representaremos por $\overline{0}$ y $\overline{0}'$ los vectores nulos de V y V' respectivamente.

Definición 1.1

Una aplicación $f : V \to V'$ se dice que es una aplicación lineal si cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in V : f(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x}) + f(\overline{y})$
2) $\forall\, \alpha \in K, \forall\, \overline{x} \in V : f(\alpha \,.\, \overline{x}) = \alpha \,.\, f(\overline{x})$

A las aplicaciones lineales de un K-espacio vectorial V en sí mismo se les llama endomorfismos de V.

Una aplicación lineal se denomina monomorfismo, epimorfismo, o isomorfismo según que sea inyectiva sobreyectiva o biyectiva respectivamente.

A los endomorfismos biyectivos se les llama automorfismos.

Se denomina forma lineal a toda aplicación lineal de un K-espacio vectorial V en el K-espacio vectorial K.

Ejercicio 1

Sean las aplicaciones:

a) $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3)$, $\forall\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

b) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f_2(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1)$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

Discutir si f_1, f_2 son aplicaciones lineales.

Solución

a) Veamos si f_1 cumple los dos axiomas de linealidad.

1) Sean $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ dos vectores genéricos de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$f_1(\overline{x} + \overline{y}) = f_1(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = \\ = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2 - x_3 - y_3) \quad (1)$$

$$f_1(\overline{x}) + f_1(\overline{y}) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3) + (y_1 + y_2, y_2 - y_3) = \\ = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_2 - x_3 + y_2 - y_3) \quad (2)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f_1 cumple el primer axioma de linealidad.

2) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar genérico y $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un vector genérico de $\mathbb{R}^3$. Entonces:

$$f_1(\alpha \,.\, \overline{x}) = f_1(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_2 - \alpha x_3) \quad (1)$$

$$\alpha f_1(\overline{x}) = \alpha \,.\, (x_1 + x_2, x_2 - x_3) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_2 - \alpha x_3) \quad (2)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f_1 cumple el segundo axioma de linealidad.

Conclusión: f_1 es una aplicación lineal.

b) Veamos si f_2 cumple los axiomas de linealidad:

1) Sean $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\overline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ dos vectores genéricos de $\mathbb{R}^2$. Entonces:

$$f_2(\overline{x} + \overline{y}) = f_2(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1) \quad (1)$$

$$f_2(\overline{x}) + f_2(\overline{y}) = (x_1, x_2 + 1) + (y_1, y_2 + 1) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 2) \quad (2)$$

Los resultados (1) y (2) no son idénticos, evidentemente.

De la observación de estos resultados podemos fácilmente deducir un caso en el que no se cumple la igualdad: $\overline{x} = (0, 0)$, $\overline{y} = (1, 1)$. En efecto:

$$f_2(\overline{x} + \overline{y}) = f_2(1, 1) = (1, 2)$$

$$f_2(\overline{x}) + f_2(\overline{y}) = (0, 1) + (1, 2) = (1, 3)$$

Por tanto f_2 no cumple el primer axioma de linealidad.
Conclusión: f_2 no es una aplicación lineal.

Proposición 1.1

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$. Entonces

1) $f(\overline{0}) = \overline{0}'$
2) $\forall\, \overline{x} \in V : f(-\overline{x}) = -f(\overline{x})$

Demostración

1) Sea $\overline{x} \in V$ un vector genérico de V. Entonces:

$$f(\overline{0}) = f(0 \,.\, \overline{x}) \underset{\text{f lineal}}{=} 0 \,.\, f(\overline{x}) \underset{f(\overline{x}) \in V'}{=} \overline{0}'$$

2) Sea $\overline{x} \in V$ un vector genérico de V. Entonces:

$$f(-\overline{x}) = f(-1 \,.\, \overline{x}) \underset{\text{f lineal}}{=} -1 \,.\, f(\overline{x}) = -f(\overline{x})$$

Nótese que si una aplicación $f : V \to V'$ no cumple alguna de estas propiedades no será una aplicación lineal. Este puede ser a veces un método cómodo para demostrar que ciertas aplicaciones no son lineales. Por ejemplo, en el ejercicio anterior vemos que $f_2(\overline{0}) = f_2(0, 0) = (0, 1) \neq \overline{0}'$, por tanto f_2 no es una aplicación lineal.

Sin embargo, el que una aplicación cumpla las propiedades 1) y 2) de esta proposición no es condición suficiente para que sea lineal.

Proposición 1.2

Una aplicación $f : V \to V'$ es lineal si y sólo si cumple la condición

$$\forall\, \alpha, \beta \in K, \quad \forall\, \overline{x}, \overline{y}, \in V: \; f(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}) = \alpha \,.\, f(\overline{x}) + \beta \,.\, f(\overline{y})$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sean $\alpha, \beta \in K$ dos escalares genéricos y $\bar{x}, \bar{y}$ dos vectores genéricos de V. Entonces:

$$f(\alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y}) \underset{\text{f lineal}}{=} f(\alpha \cdot \bar{x}) + f(\beta \cdot \bar{y}) \underset{\text{f lineal}}{=} \alpha \cdot f(\bar{x}) + \beta \cdot f(\bar{y})$$

$\Leftarrow$) Por hipótesis

$$\forall \alpha, \beta \in K, \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \in V: \ f(\alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y}) = \alpha \cdot f(\bar{x}) + \beta f(\bar{y}) \qquad (1)$$

Para demostrar que f es lineal será suficiente demostrar que cumple los dos axiomas de linealidad de la definición. Entonces:

Tomando en (1) $\beta = 0$ tenemos $f(\alpha \cdot \bar{x}) = \alpha \cdot f(\bar{x})$.

Tomando en (1) $\alpha = \beta = 1$ tenemos $f(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}) + f(\bar{y})$.

Por tanto (1) $\Rightarrow$ f es lineal.

Es evidente que la proposición 1.2 es generalizable al caso de un número finito de escalares y vectores. Así, las aplicaciones lineales se caracterizan porque la imagen de una combinación lineal de vectores es la misma combinación lineal de las imágenes de dichos vectores.

Proposición 1.3

Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita n. Entonces V es isomorfo al K-espacio vectorial K^n. (Existe un isomorfismo $f: V \to K^n$).

Demostración

Tomemos una base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ de V y sea $\bar{x} \in V$ un vector genérico de V tal que $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \bar{u}_i$. Definamos ahora la aplicación $f: V \to K^n$ por $f(\bar{x}) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in K^n$.

Evidentemente f hace corresponder a un vector dado de V la n-tupla de sus coordenadas en la base B elegida. De la proposición conocida que dice que en una base B todo vector tiene un único sistema de coordenadas deducimos que f es una aplicación.

Además, como en una base B a vectores distintos les corresponden sistemas de coordenadas distintas (f inyectiva) y toda n-tupla es sistema de coordenadas de un vector de V en la base B (f sobreyectiva) la aplicación f es biyectiva.

Demostraremos a continuación que f es lineal.

1) Sean $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{u}_i \in V$, $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \overline{u}_i \in V$ dos vectores genéricos de V. Entonces:

$$f(\overline{x}+\overline{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \cdot \overline{u}_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i \cdot \overline{u}_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)\overline{u}_i\right) = \tag{1}$$

$$= (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, ..., \alpha_n+\beta_n)$$

$$f(\overline{x}) + f(\overline{y}) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \tag{2}$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f cumple el primer axioma de linealidad.

2) Sea $\lambda \in K$ un escalar genérico y $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \overline{u}_i \in V$ un vector genérico de V. Entonces:

$$f(\lambda \cdot \overline{x}) = f\left(\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \overline{u}_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda \cdot \alpha_i)\overline{u}_i\right) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n) \tag{1}$$

$$\lambda \cdot f(\overline{x}) = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n) \tag{2}$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f cumple el segundo axioma de linealidad.

Conclusión: f es una aplicación lineal biyectiva (isomorfismo) de V en K^n.

Nótese que la elección de B es arbitraria, por tanto el isomorfismo construido no es único.

Proposición 1.4

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$ y consideremos un sistema ligado $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\} \subset V$. Entonces el sistema de vectores $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), ..., f(\bar{u}_n)\} \subset V'$ es también ligado.

Demostración

$$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\} \text{ ligado} \Rightarrow \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n - \{(0, 0, ..., 0)\} \,/$$

$$/\, \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + ... + \lambda_n\bar{u}_n = \bar{0} \text{ (combinación lineal no nula)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n - \{(0, 0, ..., 0)\} \,/$$

$$f(\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + ... + \lambda_n\bar{u}_n) = f(\bar{0}) \Rightarrow$$

$$\underset{\text{f lineal}}{\Rightarrow} \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n - \{(0, 0, \ldots, 0)\} \,/$$

$$\lambda_1 f(\bar{u}_1) + \lambda_2 f(\bar{u}_2) + ... + \lambda_n f(\bar{u}_n) = \bar{0}' \text{ (combinación lineal no nula)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\{(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), ..., f(\bar{u}_n)\} \text{ es ligado.}$$

Proposición 1.5

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$ y consideremos un sistema de vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ de V. Entonces si $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), ..., f(\bar{u}_n)\}$ es un sistema libre, $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ es también un sistema libre.

Demostración

Buscaremos las combinaciones lineales de los vectores $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ que sean iguales al vector nulo de V.

$$\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + ... + \lambda_n\bar{u}_n = \bar{0} \Rightarrow f(\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + ... + \lambda_n\bar{u}_n) = f(\bar{0}) \Rightarrow$$

$$\underset{\text{f lineal}}{\Rightarrow} \lambda_1 f(\bar{u}_1) + \lambda_2 f(\bar{u}_2) + ... + \lambda_n f(\bar{u}_n) = \bar{0}' \Rightarrow$$

$$\underset{\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), ..., f(\bar{u}_n)\} \text{ libre}}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Por tanto $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ es libre.

Observación

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$ y consideremos un sistema libre $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\} \subset V$. Entonces el sistema $\{f(\overline{u}_1), f(\overline{u}_2), ..., f(\overline{u}_n)\}$ no es necesariamente libre. Es muy sencillo hallar un contraejemplo que confirma esta observación.

2. NUCLEO DE UNA APLICACION LINEAL

Sean los K-espacios vectoriales V y V'.

Definición 2.1

Se denomina núcleo de una aplicación lineal $f : V \to V'$ al conjunto que representamos por N(f) o Ker(f) definido por:

$$N(f) = \{\overline{x} \in V \,/\, f(\overline{x}) = \overline{0}'\}$$

Proposición 2.1

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$. Entonces N(f) es un subespacio vectorial de V.

Demostración

Evidentemente $\overline{0} \in N(f)$. Por tanto $N(f) \neq \emptyset$. Además

1) Sean $\overline{x}, \overline{y} \in N(f)$ dos vectores genéricos de N(f). Entonces:

$$f(\overline{x} + \overline{y}) \underset{\text{f lineal}}{=} f(\overline{x}) + f(\overline{y}) \underset{\overline{x}, \overline{y} \in N(f)}{=} \overline{0}' \Rightarrow \overline{x} + \overline{y} \in N(f)$$

2) Sea $\alpha \in K$ un escalar genérico y $\overline{x} \in N(f)$ un vector genérico de N(f). Entonces:

$$f(\alpha \overline{x}) \underset{\text{f lineal}}{=} \alpha \,.\, f(\overline{x}) \underset{\overline{x} \in N(f)}{=} \alpha \,.\, \overline{0}' = \overline{0}' \Rightarrow \alpha \,.\, \overline{x} \in N(f)$$

Conclusión: N(f) es un subespacio vectorial de V.

Proposición 2.2

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$. Entonces:

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow N(f) = \{\bar{0}\}$$

Demostración

$\Rightarrow$) Sea $\bar{x} \in N(f)$ un vector genérico de $N(f)$. Entonces:

$$\bar{x} \in N(f) \Rightarrow f(\bar{x}) = \bar{0}' \underset{\text{f lineal}}{\Rightarrow} f(\bar{x}) = f(\bar{0}) \underset{\text{f inyectiva}}{\Rightarrow} \bar{x} = \bar{0}$$

Por tanto, $N(f) = \{\bar{0}\}$

$\Leftarrow$) Sean $\bar{x}, \bar{y} \in V$ dos vectores genéricos de V. Entonces:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{y}) \Rightarrow f(\bar{x}) - f(\bar{y}) = \bar{0}' \underset{\text{f lineal}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(\bar{x} - \bar{y}) = \bar{0}' \Rightarrow \bar{x} - \bar{y} \in N(f) \underset{N(f) = \{\bar{0}\}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \bar{x} - \bar{y} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$$

Por tanto f es inyectiva.

Proposición 2.3

Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal inyectiva.

Entonces si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\} \subset V$ es un sistema libre de vectores, el sistema $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), ..., f(\bar{u}_n)\} \subset V'$ es libre.

Demostración

Buscaremos las combinaciones lineales del sistema $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), ..., f(\bar{u}_n)\}$ que sean iguales al vector nulo de V'.

$$\lambda_1 f(\bar{u}_1) + \lambda_2 f(\bar{u}_2) + ... + \lambda_n f(\bar{u}_n) = \bar{0}' \underset{\text{f lineal}}{\Rightarrow} f(\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n) = f(\bar{0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + ... + \lambda_n \bar{u}_n = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

($\Rightarrow$: f inyectiva; $\bar{0}$: $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ es libre)

Por tanto $\{f(\bar{u}_1), f(\bar{u}_2), ..., f(\bar{u}_n)\}$ es un sistema libre.

Ejercicio 2

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial P_1 de los polinomios en una indeterminada de grado menor igual que uno con coeficientes reales. Consideremos la aplicación $f : P_1 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(a_1x + a_o) = \frac{a_1}{2} + a_o, \qquad \forall\, a_1x + a_o \in P_1.$$

Se pide:

a) Demostrar que f es una aplicación lineal.
b) Hallar el N(f).

Solución

a)

1) Sean $p(x) = a_1x + a_o \in P_1$, $q(x) = b_1x + b_o \in P_1$ dos vectores genéricos de P_1. Entonces:

$$\begin{aligned} f(p(x) + q(x)) &= f(a_1x + a_o + b_1x + b_o) = \\ &= f((a_1 + b_1)x + (a_o + b_o)) = \\ &= \frac{a_1 + b_1}{2} + a_o + b_o \end{aligned} \qquad (1)$$

$$f(p(x)) + f(q(x)) = \frac{a_1}{2} + a_o + \frac{b_1}{2} + b_o \qquad (2)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f cumple la primera condición de linealidad.

2) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar genérico y $p(x) = a_1x + a_o \in P_1$ un vector genérico de P_1. Entonces:

$$f(\alpha p(x)) = f(\alpha a_1x + \alpha a_o) = \frac{\alpha a_1}{2} + \alpha a_o \qquad (1)$$

$$\alpha f(p(x)) = \alpha\left(\frac{a_1}{2} + a_o\right) = \frac{\alpha a_1}{2} + \alpha a_o \qquad (2)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f cumple la segunda condición de linealidad.

Conclusión: f es una aplicación lineal.

b) Sea $p(x) = a_1x + a_o \in P_1$ un vector genérico de P_1. Entonces:

$$p(x) \in N(f) \Rightarrow f(p(x)) = 0 \Rightarrow f(a_1x + a_o) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{2} + a_o = 0 \Rightarrow a_1 = -2a_o$$

Por tanto,

$$N(f) = \{p(x) = a_1x + a_o \in P_1 \,/\, a_1 = -2a_o\} =$$
$$= \{p(x) = -2a_ox + a_o \,/\, a_o \in \mathbb{R}\} = L(\{-2x + 1\})$$

Conclusión: $N(f) = L(\{-2x + 1\})$

3. IMAGEN DE UNA APLICACION LINEAL

Sean dos K-espacios vectoriales V y V'.

Proposición 3.1

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$ y consideremos un subespacio vectorial S de V. Entonces:

$$f(S) = \{\overline{x}' \in V' \,/\, \exists\, \overline{x} \in S : f(\overline{x}) = \overline{x}'\} \subset V'$$

es un subespacio vectorial de V'.

Demostración

1) Sean $\overline{x}' = f(\overline{x}) \in f(S)$, $\overline{y}' = f(\overline{y}) \in f(S)$ dos vectores genéricos de f(S). Entonces $\overline{x}, \overline{y} \in S$ y:

$$\overline{x}' + \overline{y}' = f(\overline{x}) + f(\overline{y}) \underset{\text{f lineal}}{=} f(\overline{x} + \overline{y}) \in f(S)$$

2) Sea $\alpha \in K$ un escalar genérico y $\overline{x}' = f(\overline{x}) \in f(S)$ un vector genérico de f(S). Entonces:

$$\alpha\overline{x}' = \alpha f(\overline{x}) \underset{\text{f lineal}}{=} f(\alpha\overline{x}) \in f(S)$$

Por tanto f(S) es un subespacio vectorial de V'.

Nótese que como consecuencia inmediata de esta proposición tenemos que f(V) es un subespacio vectorial de V'.

Proposición 3.2

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$. Si $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}$ es un sistema generador del subespacio vectorial S de V, entonces $\{f(\overline{u}_1), f(\overline{u}_2), ..., f(\overline{u}_n)\}$ es un sistema generador del subespacio vectorial f(S) de V'.

Demostración

Sea $\overline{x}' = f(\overline{x}) \in f(S)$ un vector genérico de f(S). Entonces $\overline{x} \in S$ y:

$$S = L(\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_n\}) \Rightarrow \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) \in K^n / \overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,.\, \overline{u}_i \Rightarrow$$

$$\underset{\text{f lineal y } f(\overline{x}) = \overline{x}'}{\Rightarrow} \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) \in K^n / \overline{x}' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \,.\, f(\overline{u}_i)$$

Por tanto $\{f(\overline{u}_1), f(\overline{u}_2), ..., f(\overline{u}_n)\}$ es un sistema generador de f(S).

De esta proposición y de la que afirma que la imagen por la aplicación lineal inyectiva de un sistema de vectores libre es un sistema libre, obtenemos ahora como consecuencia inmediata que las aplicaciones lineales inyectivas conservan la dimensión de los subespacios vectoriales.

Definición 3.1

Sea la aplicación lineal $f : V \to V'$. Al subespacio vectorial f(V) de V' se le denomina subespacio imagen de la aplicación lineal f y se representa por Im(f).

Ejercicio 3

Sea la aplicación lineal $f = \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, x_3, x_1 - x_2), \qquad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

a) Consideremos el subespacio vectorial $S = L(\{\bar{u}_1 = (1, 0, 0), \bar{u}_2 = (2, 2, 0)\})$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar una base y la dimensión del subespacio vectorial f(S) de $\mathbb{R}^4$.

b) Hallar N(f) e Im(f) detallando una base y la dimensión de cada uno de ellos.

Solución

a) Disponemos de un sistema generador de S, por tanto podemos hallar un sistema generador de f(S).

$$f(\bar{u}_1) = f(1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$$
$$f(\bar{u}_2) = f(2, 2, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

Por tanto $f(S) = L(\{(1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0)\}) = L(\{(1, 0, 0, 1)\})$.

Por ser $(1, 0, 0, 1) \neq (0, 0, 0, 0)$, el sistema generador obtenido es también libre y por tanto una base de f(S).

Conclusión: $\{(1, 0, 0, 1)\}$ es una base de f(S) y $\dim [f(S)] = 1$

b) Hallemos el N(f):

$$(x_1, x_2, x_3) \in N(f) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, 0, x_3, x_1 - x_2) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto

$$N(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0\} =$$
$$= \{(x_1, x_1, 0) / x_1 \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1, 0)\})$$

Por ser el vector (1, 1, 0) no nulo, el sistema generador obtenido es una base de N(f).

Conclusión: {(1, 1, 0)} es una base de N(f) y dim [N(f)] = 1.

Hallemos Im(f) = f($\mathbb{R}^3$):

La imagen de cualquier sistema generador de $\mathbb{R}^3$ será un sistema generador de Im(f). Utilizaremos por comodidad el sistema generador de $\mathbb{R}^3$ más sencillo de que disponemos (su base canónica). Entonces:

$$\mathbb{R}^3 = L(\{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\})$$

$f(\bar{e}_1) = (1, 0, 0, 1)$
$f(\bar{e}_2) = (-1, 0, 0, -1)$
$f(\bar{e}_3) = (0, 0, 1, 0)$

Por tanto

$$\begin{aligned} Im(f) &= L(\{f(\bar{e}_1) = (1, 0, 0, 1), f(\bar{e}_2) = \\ &= (-1, 0, 0, -1), f(\bar{e}_3) = (0, 0, 1, 0)\}) \underset{f(\bar{e}_2) = -1 f(\bar{e}_1)}{=} \\ &= L(\{f(\bar{e}_1) = (1, 0, 0, 1), f(\bar{e}_3) = (0, 0, 1, 0)\}) \end{aligned}$$

Pero los vectores $f(\bar{e}_1)$, $f(\bar{e}_3)$ no son uno múltiplo del otro, por tanto forman sistema libre y una base de Im(f).

Conclusión: {(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)} es una base de Im(f) y dim [Im(f)] = 2

4. RELACION ENTRE LAS DIMENSIONES DEL NUCLEO Y DE LA IMAGEN DE UNA APLICACION LINEAL

Proposición 4.1

Sean dos K-espacios vectoriales V y V' y una aplicación lineal $f : V \to V'$ y supongamos que el K-espacio vectorial V es de dimensión finita. Entonces:

$$\dim(V) = \dim [N(f)] + \dim [Im(f)]$$

Demostración

Sea $\{\overline{u}'_1, \overline{u}'_2, ..., \overline{u}'_r\}$ una base del subespacio Im(f) de V' y sea un sistema $G = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_r\}$ de vectores de V tal que $f(\overline{u}_i) = \overline{u}'_i \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., r\}$.

El sistema G es libre por serlo el sistema $\{\overline{u}'_1, \overline{u}'_2, ..., \overline{u}'_r\}$. Por tanto

$$\dim [L(G)] = \dim [Im(f)] = r$$

Demostraremos a continuación que $V = N(f) + L(G)$.

Sea $\overline{x} \in V$ un vector genérico de V. Entonces

$$Im(f) = L(\{\overline{u}'_1, \overline{u}'_2, ..., \overline{u}'_r\}) \Rightarrow f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overline{u}'_i \text{ con } \alpha_i \in K, \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., r\}$$

Sea $\overline{y} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overline{u}_i \in L(G) \subset V$. Tenemos que

$$f(\overline{y}) = f\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overline{u}_i\right) \underset{\text{f lineal}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f(\overline{u}_i) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overline{u}'_i = f(\overline{x}) \Rightarrow f(\overline{y}) = f(\overline{x}) \Rightarrow f(\overline{x} - \overline{y}) = \overline{0}' \Rightarrow \overline{x} - \overline{y} \in N(f)$$

Poniendo ahora $\overline{x} - \overline{y} = \overline{x}_N$ tenemos que $\overline{x} = \overline{x}_N + \overline{y}$ con $\overline{x}_N \in N(f)$ e $\overline{y} \in L(G)$.

Con esto queda demostrado que $V = N(f) + L(G)$.

Consideremos ahora un vector genérico $\overline{z} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{u}_i \in L(G)$. Entonces,

$$\overline{z} \in N(f) \cap L(G) \Leftrightarrow f(\overline{z}) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \overline{u}'_i = \overline{0}' \underset{\{\overline{u}'_1, \overline{u}'_2, ..., \overline{u}'_r\} \text{ libre}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_i = 0, \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., r\} \Leftrightarrow \overline{z} = \overline{0}$$

Por tanto $N(f) \cap L(G) = \{\overline{0}\}$ y $V = N(f) \oplus L(G)$

Conclusión:

$$\dim(V) = \dim[N(f)] + \dim[L(G)] \underset{\dim[L(G)] = \dim[Im(f)]}{=} \dim[N(f)] + \dim[Im(f)]$$

5. RANGO DE UNA APLICACION LINEAL

Sean dos K-espacios vectoriales V y V'.

Definición 5.1

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$ y supongamos que V es de dimensión finita n. Se denomina rango de la aplicación lineal f, denotándose $r(f)$, a la dimensión del subespacio vectorial $Im(f)$ de V'.

Nótese que como consecuencia de esta definición y de la proposición anterior $r(f) \leq \dim(V)$. Además si V' es un espacio de dimensión finita $r(f) \leq \dim(V')$.

Proposición 5.1

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$ y supongamos que los K-espacios vectoriales V y V' son de dimensión finita. Entonces:

1) f es inyectiva $\Leftrightarrow$ $r(f) = \dim(V)$.
2) f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $r(f) = \dim(V')$.

Demostración

1) f inyectiva $\Leftrightarrow$ $\dim[N(f)] = 0 \Leftrightarrow \dim(V) = \dim[Im(f)] \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \dim(V) = r(f)$.
2) f sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $Im(f) = V' \Leftrightarrow \dim[Im(f)] = \dim(V') \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow r(f) = \dim(V')$

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que para que una aplicación lineal $f : V \to V'$ sea biyectiva es condición necesaria que $\dim(V) = \dim(V')$. Además:

$$f \text{ biyectiva} \Leftrightarrow r(f) = \dim(V) = \dim(V')$$

Ejercicio 4

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial P_3 de los polinomios en una indeterminada de grado menor o igual que tres y con coeficientes reales. Consideremos la aplicación $f : P_3 \to P_3$ definida por

$$f\,[p(x)] = p(x) + \frac{d\,[p(x)]}{dx}, \qquad \forall\, p(x) \in P_3$$

a) Demostrar que f es una aplicación lineal.
b) Hallar N(f) e Im(f).
c) Clasificar f.

Solución

a)

1) Sean $p(x), q(x) \in P_3$ dos vectores genéricos de P_3. Entonces:

$$\begin{aligned} f\,[p(x) + q(x)] &= p(x) + q(x) + \frac{d\,[p(x) + q(x)]}{dx} = \\ &= p(x) + q(x) + \frac{d\,[p(x)]}{dx} + \frac{d\,[q(x)]}{dx} \end{aligned} \qquad (1)$$

$$f\,[p(x)] + f\,[q(x)] = p(x) + \frac{d\,[p(x)]}{dx} + q(x) + \frac{d\,[q(x)]}{dx} \qquad (2)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f cumple el primer axioma de linealidad.

2) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un escalar genérico y $p(x) \in P_3$ un vector genérico de P_3. Entonces:

$$f\,[\alpha p(x)] = \alpha p(x) + \frac{d\,[\alpha p(x)]}{dx} = \alpha p(x) + \alpha \frac{d\,[p(x)]}{dx} \qquad (1)$$

$$\alpha f[p(x)] = \alpha\left[p(x) + \frac{d[p(x)]}{dx}\right] = \alpha p(x) + \alpha \frac{d[p(x)]}{dx} \qquad (2)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f cumple el segundo axioma de linealidad.

Conclusión: f es una aplicación lineal.

b) Consideremos un vector genérico $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o$ de P_3. Entonces:

$$p(x) \in N(f) \Leftrightarrow f[p(x)] = 0 \Leftrightarrow a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_o + 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 = 0 \\ a_o + a_1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_o = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow p(x) = 0$$

Conclusión: $N(f) = \{0\}$.

Hallaremos ahora Im(f). Utilizaremos en este apartado la base canónica de P_3. Entonces:

$$f(x^3) = x^3 + 3x^2 \qquad f(x) = x + 1$$
$$f(x^2) = x^2 + 2x \qquad f(1) = 1$$

Por tanto $Im(f) = L(\{x^3 + 3x^2, x^2 + 2x, x + 1, 1\})$.

Es fácil comprobar que el sistema generador obtenido es una base de Im(f) y $\dim [Im(f)] = 4$.

Conclusión: $Im(f) = P_3$.

Nótese que haciendo uso de la igualdad $\dim(P_3) = \dim [N(f)] + \dim [Im(f)]$, este último resultado era prácticamente inmediato a partir de $N(f) = \{0\}$.

c) Como $r(f) = \dim [Im(f)] = \dim(P_3) = 4$ tenemos que f es inyectiva y sobreyectiva.

Conclusión: f es biyectiva.

6. DETERMINACION Y EXISTENCIA DE APLICACIONES LINEALES

Proposición 6.1

Sea $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ una base de un K-espacio vectorial V de dimensión finita n y consideremos un sistema de vectores $\{\bar{u}'_1, \bar{u}'_2, ..., \bar{u}'_n\}$ de un K-espacio vectorial V'. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que:

$$f(\bar{u}_i) = \bar{u}'_i, \qquad \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Además si $\{\bar{u}'_1, \bar{u}'_2, ..., \bar{u}'_n\}$ es un sistema libre, f es inyectiva.

Demostración

Demostraremos en primer lugar la existencia. Sea

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{u}_i \in V$$

un vector genérico de V y definimos la aplicación $f : V \to V'$ tal que

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{u}'_i \in V'.$$

Evidentemente esta aplicación cumple las condiciones de la proposición:

$$f(\bar{u}_i) = \bar{u}'_i, \qquad \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Veamos que además f es lineal:

1) Sean $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{u}_i \in V$, $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{u}_i \in V$ dos vectores genéricos de V.

Entonces:

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = f\left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\bar{u}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\bar{u}'_i \qquad (1)$$

$$f(\bar{x}) + f(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{u}'_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \bar{u}'_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\bar{u}'_i \qquad (2)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f cumple el primer axioma de linealidad.

2) Sea $\lambda \in K$ un escalar genérico y $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{u}_i \in V$ un vector genérico de V. Entonces:

$$f(\lambda\overline{x}) = f\left[\sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)\overline{u}_i\right] = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)\overline{u}'_i \qquad (1)$$

$$\lambda f(\overline{x}) = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{u}'_{i_i} = \sum_{i=1}^{n}(\lambda\alpha_i)\overline{u}'_i \qquad (2)$$

Los resultados (1) y (2) son idénticos, por tanto f cumple el segundo axioma de linealidad.

Conclusión: hemos construido una aplicación lineal que cumple las condiciones de la proposición.

Demostraremos ahora la unicidad. Supongamos que existe otra aplicación lineal $g : V \to V'$ que cumple $g(\overline{u}_i) = \overline{u}'_i, \quad \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Veamos cuál sería la imagen del vector genérico $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{u}_i \in V$

$$g(\overline{x}) = g\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{u}_i\right) \underset{\text{g lineal}}{=} \sum_{i=1}^{n}\alpha_i g(\overline{u}_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{u}'_i$$

Pero entonces tenemos que $g(\overline{x}) = f(\overline{x}), \quad \forall\, \overline{x} \in V$.

Conclusión: g = f y sólo existe una aplicación lineal que cumpla las condiciones de la proposición.

Además al ser $\{\overline{u}'_1, \overline{u}'_2, ..., \overline{u}'_n\}$ la imagen de una base B de V, tenemos que $Im(f) = L(\{\overline{u}'_1, \overline{u}'_2, ..., \overline{u}'_n\})$. Si este sistema de vectores es libre será una base de Im(f) y entonces r(f) = n = dim(V).

Conclusión: Si $\{\overline{u}'_1, \overline{u}'_2, ..., \overline{u}'_n\}$ es libre, f es inyectiva.

Ejercicio 5

Hallar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$N(f) = L(\{(1, 0, 2), (0, -1, 1)\})$$

Solución

Como hemos visto en la proposición anterior, una forma muy simple de construir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ es asignar unas imágenes arbitrarias a una determinada base del espacio de definición $\mathbb{R}^3$. Ahora, para cumplir la condición impuesta por el problema es conveniente elegir una base que contenga los vectores (1, 0, 2), (0, –1, 1). Hay una proposición que permite obtener una base de $\mathbb{R}^3$ añadiendo al sistema de vectores libres $\{(1, 0, 2), (0, -1, 1)\}$ un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Una tal base es $\{(1, 0, 0), (1, 0, 2), (0, -1, 1)\}$. (Compruébese).

Ahora la solución es inmediata asignando a estos vectores imágenes apropiadas. Para esto deberemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

$$\dim [N(f)] = 2, \qquad \dim [Im(f)] = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim [N(f)] = 1$$
$$(1, 0, 2) \in N(f), \qquad (0, -1, 1) \in N(f)$$

Entonces:

$f(1, 0, 0)$ = un vector no nulo de $\mathbb{R}^4$. Por ejemplo (1, 0, 0, 0)
$f(1, 0, 2) = (0, 0, 0, 0)$
$f(0, -1, 1) = (0, 0, 0, 0)$

Es inmediato comprobar que f cumple la condición del problema.

Ejercicio 6

Hallar una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$Im(f) = L(\{(1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 2)\}) \wedge N(f) = L(\{(1, 0, 0)\})$$

Solución

Como se ha visto en el ejercicio anterior habrá que completar una base de $\mathbb{R}^3$ a partir del sistema libre $\{(1, 0, 0)\}$. Pero esta base puede ser la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Ahora bastará asignar a los vectores de la base canónica las imágenes apropiadas teniendo en cuenta que:

$$(1, 0, 0) \in N(f) \wedge Im(f) = L(\{(1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 2)\})$$

Entonces:

$f(1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$
$f(0, 1, 0) = (1, 2, 0, 0)$
$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1, 2)$

Ejercicio 7

Sean el subespacio $S = L(\{(1, 0, 1, 2), (2, \alpha, -1, 1), (0, -1, 1, 1)\})$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y el subespacio $T = \{a_1x + a_o / a_o, a_1 \in \mathbb{R}\}$ del $\mathbb{R}$-espacio vectorial P_2.

Hallar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que exista una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to P_2$ con $N(f) = S$ e $Im(f) = T$ y construir una aplicación lineal que satisfaga estas condiciones:

Solución

Evidentemente $T = L(\{x, 1\})$ y $\dim [Im(f)] = \dim T = 2$. Entonces:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim S + \dim T \Leftrightarrow 4 = \dim S + 2 \Leftrightarrow \dim S = 2.$$

Teniendo en cuenta que $\{(1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1)\}$ es un sistema de vectores libre, por no ser proporcionales tenemos:

$$\dim S = 2 \Leftrightarrow r(\{(1, 0, 1, 2), (2, \alpha, -1, 1), (0, -1, 1, 1)\} = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2, \alpha, -1, 1) \in L(\{(1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1)\}$$

Así pues los $\alpha \in \mathbb{R}$ buscados son los que cumplen esta condición y por tanto se obtendrán de la resolución de la siguiente ecuación vectorial:

$$(2, \alpha, -1, 1) = \lambda_1(1, 0, 1, 2) + \lambda_2(0, -1, 1, 1)$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_1 = 2 \\ -\lambda_2 = \alpha \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \\ \alpha = 3 \end{array}\right\} \text{ Por tanto } \alpha = 3$$

Construiremos a continuación una aplicación lineal que satisfaga las condiciones impuestas con $\alpha = 3$. Según el resultado anterior tenemos:

$$N(f) = S = L(\{(1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1)\}) \wedge Im(f) = T = L(\{x, 1\})$$

Completaremos previamente una base de $\mathbb{R}^4$ a partir del sistema libre $\{(1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1)\}$ base de N(f).

Una tal base es $\{(1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ como se puede comprobar.

Ahora bastará dar a los vectores de la base completada de $\mathbb{R}^4$ las imágenes apropiadas, teniendo en cuenta las condiciones exigidas:

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1, 2) &= 0 \\ f(0, -1, 1, 1) &= 0 \\ f(0, 0, 1, 0,) &= x \\ f(0, 0, 0, 1) &= 1 \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que la f así determinada cumple las condiciones exigidas.

Ejercicio 8

Sea un K-espacio vectorial V, un escalar $\alpha \in K$ y un vector $\overline{a} \in V$. Consideremos las aplicaciones $h : V \to V$ y $t : V \to V$ definidas por:

$$h(\overline{x}) = \alpha\overline{x}, \qquad \forall\, \overline{x} \in V$$

$$t(\overline{x}) = \overline{a} + \overline{x}, \qquad \forall\, \overline{x} \in V$$

a las que se denomina respectivamente homotecia vectorial de razón α y traslación vectorial de vector $\overline{a}$.

a) Demostrar que h es un endomorfismo lineal. Probar que si $\alpha \neq 0$ entonces h es un automorfismo lineal.
b) Demostrar que t no es una aplicación lineal si $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Solución

a) Veamos que h es una aplicación lineal.

1) Sean $\overline{x}, \overline{y} \in V$ dos vectores genéricos de V· Entonces:

$$h(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha(\overline{x} + \overline{y}) = \alpha\overline{x} + \alpha\overline{y} = h(\overline{x}) + h(\overline{y})$$

2) Sea $\lambda \in K$ un escalar genérico y $\overline{x} \in V$ un vector genérico de V·

$$h(\lambda\overline{x}) = \alpha(\lambda\overline{x}) = (\alpha\lambda)\overline{x} = \lambda(\alpha\overline{x}) = \lambda h(\overline{x})$$

Por tanto h es una aplicación lineal de V en V (endomorfismo).

Veamos ahora que si $\alpha \neq 0$, h es un automorfismo lineal:

1) Sean $\overline{x}, \overline{y} \in V$ dos vectores genéricos de V· Entonces:

$$h(\overline{x}) = h(\overline{y}) \Rightarrow \alpha\overline{x} = \alpha\overline{y} \Rightarrow \alpha(\overline{x} - \overline{y}) = \overline{0} \underset{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} \overline{x} - \overline{y} = \overline{0} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$$

Por tanto h es inyectiva si $\alpha \neq 0$.

2) Sea $\overline{y} \in V$ un vector genérico de V· Entonces:

$$h(\overline{x}) = \overline{y} \Rightarrow \alpha\overline{x} = \overline{y} \underset{\alpha \neq 0}{\Rightarrow} \overline{x} = \frac{1}{\alpha}\overline{y} \in V$$

Hemos hallado un algoritmo que nos da el origen por h de cualquier vector de V· Por tanto h es sobreyectiva si $\alpha \neq 0$.

Conclusión: si $\alpha \neq 0$ h es biyectiva. (Automorfismo).

b) En efecto $t(\overline{0}) = \overline{a} + \overline{0} = \overline{a} \neq \overline{0}$.
Por tanto t no es una aplicación lineal si $\overline{a} \neq \overline{0}$.

Ejercicio 9

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $P_2 = \{a_2x^2 + a_1x + a_o \,/\, a_2, a_1, a_o \in \mathbb{R}\}$.
Hallar todas las aplicaciones lineales $f : P_2 \to P_2$ tales que:

$$f(x^2) = x + 1 \qquad f^2(x) = 2 \qquad f(1) = x^2$$

Determinar el núcleo de cada aplicación lineal y clasificarlas.

Solución

Hallaremos primero $f(x) = ax^2 + bx + c \in P_2$. Entonces:

$$f^2(x) = f[f(x)] = f(ax^2 + bx + c) \underset{\text{f lineal}}{=} a\,f(x^2) + b\,f(x) + c\,f(1) =$$

$$= a(x+1) + b(ax^2 + bx + c) + cx^2 = 2 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} ba + c = 0 \\ a + b^2 = 0 \\ a + bc = 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} c = b^3 \\ a = -b^2 \\ p^2 - p - 2 = 0 \ \text{ con } p = b^2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} c = b^3 \\ a = -b^2 \\ p = \left\{\begin{array}{r} 2 \\ -1 \end{array}\right. \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} c = b^3 \\ a = -b^2 \\ b = \pm\sqrt{2} \vee b = \pm i \end{array}\right\}$$

desechamos la solución $b = \pm i \notin \mathbb{R}$ y nos quedan las soluciones:

$$\left(a = -2 \wedge b = +\sqrt{2} \wedge c = (\sqrt{2})^3\right) \vee \left(a = -2 \wedge b = -\sqrt{2} \wedge c = -(\sqrt{2})^3\right)$$

Por tanto existirán dos aplicaciones lineales que cumplen las condiciones del problema, determinadas por:

a) $f_1(x^2) = x + 1$
$f_1(x) = -2x^2 + \sqrt{2}x + (\sqrt{2})^3$
$f_1(1) = x^2$

b) $f_2(x^2) = x + 1$
$f_2(x) = -2x^2 - \sqrt{2}x - (\sqrt{2})^3$
$f_2(1) = x^2$

Hallemos ahora el núcleo de f_1:
Tenemos que

$$f_1(a_2x^2 + a_1x + a_o) = a_2(x+1) + a_1(-2x^2 + \sqrt{2}x + (\sqrt{2})^3) + a_o x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a_o - 2a_1 = 0 \\ \sqrt{2}a_1 + a_2 = 0 \\ (\sqrt{2})^3 a_1 + a_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a_o = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto $N(f_1) = \{0\}$.

Ahora $\dim [Im(f_1)] = \dim(P_2) - \dim [N(f_1)] = 3 = r(f)$.

Conclusión: f_1 es biyectiva.

Análogamente se resuelve f_2, obteniendo que $N(f_2) = \{0\}$ y f_2 es biyectiva.

Ejercicio 10

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (\alpha x + 3y, \alpha^2 x + (2\alpha + 1)y)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Hallar el subespacio vectorial $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (x, y)\}$ y determinar su dimensión según los distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Hallar α para que f sea un automorfismo.

Solución

a)

$$f(x,y) = (\alpha x + 3y, \alpha^2 x + (2\alpha + 1)y) = (x,y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha x + 3y = x \\ \alpha^2 x + (2\alpha + 1)y = y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y = \dfrac{1-\alpha}{3} x \\ (\alpha^2 + 2\alpha)x = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

$$\alpha^2 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = -2$$

Entonces:

Si $\alpha = 0 \vee \alpha = -2$ el sistema (1) queda:

$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{1-\alpha}{3} x \\ 0x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow y = \frac{1-\alpha}{3} x \wedge x \in \mathbb{R}$$

Si $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -2$ el sistema (1) queda:

$$\left.\begin{array}{r} y = \dfrac{1-\alpha}{3}x \\ x = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto:

$$\text{Si } \alpha = 0 \quad I = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{3}x\right\} = \left\{\left(x, \frac{1}{3}x\right) / x \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}\right)$$

$$\text{Si } \alpha = -2 \quad I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\} = \{(x,x) / x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1)\})$$

$$\text{Si } \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -2 \quad I = \{(x,y) / x = y = 0\} = \{(0,0)\}$$

Evidentemente:

$\dim(I) = 1$ si $\alpha = 0 \vee \alpha = -2$
$\dim(I) = 0$ si $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq -2$

b) $f(1, 0) = (\alpha, \alpha^2) \wedge f(0, 1) = (3, 2\alpha + 1)$
Por tanto $\text{Im}(f) = L(\{(\alpha, \alpha^2), (3, 2\alpha + 1)\})$.
Veamos qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ hacen $\dim [\text{Im}(f)] = 2$

$$\lambda_1(\alpha,\alpha^2) + \lambda_2(3,2\alpha+1) = (0,0) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ \alpha^2\lambda_1 + (2\alpha+1)\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_2 = -\dfrac{\alpha}{3}\lambda_1 \\ (\alpha^2 - \alpha)\lambda_1 = 0 \end{array}\right\}$$

Por tanto $\dim [\text{Im}(f)] = 2 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$.

Conclusión: f es automorfismo si $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$.

Ejercicio 11

Sea una aplicación lineal $f : V \to V$ siendo $\dim(V) = n$ y consideremos la aplicación lineal $f_o : V \to V$ definida por $f_o(\overline{x}) = \overline{0}, \quad \forall\, \overline{x} \in V$. Demostrar que $N(f) = \text{Im}(f) \Leftrightarrow [f^2 = f_o \wedge n = 2 \ \dim [\text{Im}(f)]]$.

Solución

$\Rightarrow$) Sea $\overline{x} \in V$ un vector genérico de V. Entonces:

$$f^2(\overline{x}) = f[f(\overline{x})] \underset{f(\overline{x}) \in Im(f) = N(f)}{=} \overline{0} \Rightarrow f^2(\overline{x}) = f_o(\overline{x}), \quad \forall \overline{x} \in V \Rightarrow f^2 = f_o$$

Además

$$n = \dim(V) = \dim [N(f)] + \dim [Im(f)] \underset{N(f) = Im(f)}{=} 2 \dim [Im(f)]$$

$\Leftarrow$) $\dim(V) = n = 2 \dim[Im(f)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim[N(f)] + \dim[Im(f)] = 2 . \dim[Im(f)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim[N(f)] = \dim[Im(f)]$

Veamos ahora que $Im(f) \subset N(f)$. En efecto $Im(f) = \{f(\overline{x}) / \overline{x} \in V\}$ y tenemos que

$$f[f(\overline{x})] = f^2(\overline{x}) \underset{\uparrow}{=} f_o(\overline{x}) = \overline{0}$$
$$f^2 = f_o$$

Por tanto $Im(f) \subset N(f)$ y $\dim[N(f)] = \dim[Im(f)]$.

Conclusión: $Im(f) = N(f)$

7. MATRIZ DE UNA APLICACION LINEAL

Consideremos una aplicación lineal $f : V \rightarrow V'$ siendo los K-espacios vectoriales V y V' de dimensiones n y m respectivamente.

Sea $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n\}$ una base de V y $B' = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, ..., \overline{e}'_m\}$ una base de V'. Entonces, si denotamos por la n-tupla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a las coordenadas de un vector cualquiera $\overline{x} \in V$ en la base B y por la m-tupla $(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ a las coordenadas del vector imagen $f(\overline{x}) \in V'$ en la base B', tenemos que:

$$f(\overline{x}) = f(x_1 . \overline{e}_1 + x_2 . \overline{e}_2 + ... + x_n . \overline{e}_n) =$$
$$= x_1 . f(\overline{e}_1) + x_2 . f(\overline{e}_2) + ... + x_n . f(\overline{e}_n)$$

Ahora bien, si representamos por las m-tuplas $(a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{mj})$, a las coordenadas respectivas de los vectores $f(\overline{e}_j) \in V' \quad \forall\, j \in \{1, 2, ..., n\}$ en la base B', se sigue que:

$$\begin{aligned} f(\overline{x}) &= x_1 \cdot f(\overline{e}_1) + x_2 \cdot f(\overline{e}_2) + ... + x_n \cdot f(\overline{e}_n) = \\ &= x_1 \cdot (a_{11} \cdot \overline{e}'_1 + a_{21} \cdot \overline{e}'_2 + ... + a_{m1} \cdot \overline{e}'_m) + \\ &\quad + x_2 \cdot (a_{12} \cdot \overline{e}'_1 + a_{22} \cdot \overline{e}'_2 + ... + a_{m2} \cdot \overline{e}'_m) + ... + \\ &\quad + x_n \cdot (a_{1n} \cdot \overline{e}'_1 + a_{2n} \cdot \overline{e}'_2 + ... + a_{mn} \cdot \overline{e}'_m) = \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) \cdot \overline{e}'_1 + \\ &\quad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n) \cdot \overline{e}'_2 + ... + \\ &\quad + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n) \cdot \overline{e}'_m \end{aligned}$$

Según esto, la m-tupla $(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ que representa a las coordenadas de $f(\overline{x}) \in V'$ en la base B', viene definida por:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

A la expresión matricial (1) se la denomina representación matricial o ecuación matricial de la aplicación lineal f respecto de las bases B y B' de V y V'.

La matriz $A \in M_{m \times n}(K)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denomina matriz de la aplicación lineal f respecto de las bases B y B' de V y V'.

Observemos finalmente que:

Las columnas de la matriz A vienen definidas por las m-tuplas $(a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1})$, $(a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2})$, ..., $(a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})$ que representan a las coordenadas respectivas de los vectores $f(\overline{e}_1)$, $f(\overline{e}_2)$, ... , $f(\overline{e}_n) \in V'$ en la base B'.

La expresión matricial (1) nos permite conocer la m-tupla $(x'_1, x'_2, ..., x'_m)$ que representa a las coordenadas del vector imagen $f(\overline{x}) \in V'$ en la base B', supuesta conocida la matriz A y la n-tupla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que representa a las coordenadas del vector origen $\overline{x} \in V$ en la base B.

Ejercicio 12

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y, y + z) \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Hallar la matriz A de la aplicación lineal f respecto de las bases $B = \{\overline{e}_1 = (0, 1, 1), \overline{e}_2 = (1, 0, 1), \overline{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ y $B' = \{\overline{e}'_1 = (1, -1), \overline{e}'_2 = (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Solución

Hallemos los vectores $f(\overline{e}_1)$, $f(\overline{e}_2)$, $f(\overline{e}_3) \in \mathbb{R}^2$:

$f(\overline{e}_1) = f(0, 1, 1) = (-1, 2)$

$f(\overline{e}_2) = f(1, 0, 1) = (1, 1)$

$f(\overline{e}_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1)$

Determinemos los pares (a_{11}, a_{21}), (a_{12}, a_{22}), (a_{13}, a_{23}) que representan a las coordenadas respectivas de los vectores $f(\overline{e}_1)$, $f(\overline{e}_2)$, $f(\overline{e}_3) \in \mathbb{R}^3$ en la base B':

$$(-1, 2) = a_{11} \cdot (1, -1) + a_{21} \cdot (0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = -1 \\ a_{21} = 1 \end{cases}$$

$$(1, 1) = a_{12} \cdot (1, -1) + a_{22} \cdot (0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 1 \\ a_{22} = 2 \end{cases}$$

$$(0, 1) = a_{13} \cdot (1, -1) + a_{23} \cdot (0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 1 \end{cases}$$

Luego la matriz $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ de la aplicación lineal f respecto de las bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, viene definida por:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13

Sea el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $P = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \,/\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ y el endomorfismo lineal $f : P \to P$ definido por:

$$f(p(x)) = p(x) - \frac{dp(x)}{dx} \qquad \forall\, p(x) \in P$$

Hallar la matriz A del endomorfismo lineal f respecto de la base usual o canónica de P.

Solución

Recordemos que $B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ es la base usual de P.

En este ejercicio se considera la misma base de referencia B en el espacio original P y en el espacio imagen P.

Con estas consideraciones tenemos que:

$f(x^3) = x^3 - 3x^2$

$f(x^2) = x^2 - 2x$

$f(x) = x - 1$

$f(1) = 1 - 0 = 1$

Hallemos las cuaternas $(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$, $(a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$, $(a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43})$, $(a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44})$ que representan a las coordenadas respectivas de $f(x^3)$, $f(x^2)$, $f(x)$, $f(1) \in P$ en la base B:

$$x^3 - 3x^2 = a_{11} \cdot x^3 + a_{21} \cdot x^2 + a_{31} \cdot x + a_{41} \cdot 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{21} = -3 \\ a_{31} = 0 \\ a_{41} = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = a_{12} \cdot x^3 + a_{22} \cdot x^2 + a_{32} \cdot x + a_{42} \cdot 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{12} = 0 \\ a_{22} = 1 \\ a_{32} = -2 \\ a_{42} = 0 \end{cases}$$

$$x - 1 = a_{13} \cdot x^3 + a_{23} \cdot x^2 + a_{33} \cdot x + a_{43} \cdot 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{33} = 1 \\ a_{43} = -1 \end{cases}$$

$$1 = a_{14} \cdot x^3 + a_{24} \cdot x^2 + a_{34} \cdot x + a_{44} \cdot 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_{14} = 0 \\ a_{24} = 0 \\ a_{34} = 0 \\ a_{44} = 1 \end{cases}$$

Luego la matriz $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ del endomorfismo lineal f respecto de la base usual B de P, viene definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. APLICACION LINEAL ASOCIADA A UNA MATRIZ

Sea una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ y consideremos la aplicación $f: K^n \to K^m$ definida por:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

— La aplicación f es lineal. En efecto:

Tomemos dos escalares cualesquiera $\alpha, \beta \in K$ y dos vectores cualesquiera $(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(z_1, z_2, ..., z_n) \in K^n$, entonces considerando las propiedades relativas a las operaciones con matrices tenemos que:

$$A \cdot \left[\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right] = \alpha \cdot \left[A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right] + \beta \cdot \left[A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right]$$

De donde:

$$f[\alpha \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) + \beta \cdot (z_1, z_2, ..., z_n)] = \alpha \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta \cdot f(z_1, z_2, ..., z_n)$$

Por tanto la aplicación f es lineal.

— $A \in M_{m\times n}(K)$ es la matriz de la aplicación lineal f respecto de las bases usuales de K^n y K^m. En efecto:

Consideremos las bases usuales

$$B = \{\overline{e}_1 = (1, 0, 0, \overset{n}{\ldots}, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, 0, \overset{n}{\ldots}, 0), ..., \overline{e}_n = (0, 0, 0, \overset{n}{\ldots}, 1)\},$$

y

$$B' = \{\overline{e}'_1 = (1, 0, 0, \overset{m}{\ldots}, 0), \overline{e}'_2 = (0, 1, 0, \overset{m}{\ldots}, 0), ..., \overline{e}'_n = (0, 0, 0, \overset{m}{\ldots}, 1)\}$$

de K^n y K^m respectivamente.

Hallemos $f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2), ..., f(\overline{e}_n) \in K^m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \Rightarrow f(\overline{e}_1) = f(1, 0, 0, \overset{n}{\ldots}, 0) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, ..., a_{m1})$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \Rightarrow f(\overline{e}_2) = f(0, 1, 0, \overset{n}{\ldots}, 0) = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, ..., a_{m2})$$

. . . . . .

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow f(\overline{e}_n) = f(0, 0, 0, \overset{n}{\ldots}, 1) = (a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, ..., a_{mn})$$

Hallemos las m-tuplas, que representan a las coordenadas respectivas de los vectores $f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), ..., f(\bar{e}_n) \in K^m$ en la base usual B' de K^m:

$$(a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) = a_{11} \cdot (1, 0, \overset{m}{\ldots}, 0) + a_{21} \cdot (0, 1, 0, \overset{m}{\ldots}, 0) + ... + \\ + ... + a_{m1} \cdot (0, 0, \overset{m}{\ldots}, 0, 1)$$

$$(a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}) = a_{12} \cdot (1, 0, \overset{m}{\ldots}, 0) + a_{22} \cdot (0, 1, 0, \overset{m}{\ldots}, 0) + ... + \\ + ... + a_{m2} \cdot (0, 0, \overset{m}{\ldots}, 0, 1)$$

. . . . . .

$$(a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}) = a_{1n} \cdot (1, 0, \overset{m}{\ldots}, 0) + a_{2n} \cdot (0, 1, 0, \overset{m}{\ldots}, 0) + ... + \\ + ... + a_{mn} \cdot (0, 0, \overset{m}{\ldots}, 0, 1)$$

Según esto, la matriz de la aplicación lineal f respecto de las bases usuales B y B' de K^n y K^m, viene definida por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz de la aplicación lineal f respecto de las bases usuales B y B' de K^n y K^m coincide con la matriz de partida $A \in M_{m \times n}(K)$.

— A la aplicación lineal $f: K^n \to K^m$ que acabamos de definir, se la denomina aplicación lineal asociada a la matriz $A \in M_{m \times n}(K)$.

Proposición 8.1

Consideremos una matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in M_{m \times n}(K)$ y sea la aplicación lineal $f: K^n \to K^m$ asociada a la matriz A. Se verifica que:

1.º) $\dim [\text{Im}(f)] = r(A)$.
2.º) f inyectiva $\Leftrightarrow r(A) = n$.

Demostración

1.º) $\bar{a}'_1 = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}) = f(\bar{e}_1)$ con $\bar{e}_1 = (1, 0, ..., 0) \in K^n$

$\bar{a}'_2 = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}) = f(\bar{e}_2)$ con $\bar{e}_2 = (0, 1, ..., 0) \in K^n$

. . . . . .

$\bar{a}'_n = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}) = f(\bar{e}_n)$ con $\bar{e}_n = (0, 0, ..., 1) \in K^n$

son los vectores columna de la matriz A.

Entonces:

$$r(A) = r(\{\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, ..., \bar{a}'_n\}) = r(\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), ..., f(\bar{e}_n)\}) =$$
$$= \dim [L(\{f(\bar{e}_1), f(\bar{e}_2), ..., f(\bar{e}_n)\})] = \dim [f(K^n)] = \dim [\text{Im}(f)]$$

2.º) f inyectiva $\Leftrightarrow$ $N(f) = \{\bar{0}\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim K^n = 0 + \dim [\text{Im}(f)]$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $n = \dim [\text{Im}(f)]$ $\Leftrightarrow$ $n = r(A)$

Ejercicio 8

Hallar la aplicación lineal asociada a la matriz $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

La aplicación lineal asociada a la matriz $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ es la aplicación f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 3x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$

Es decir, la aplicación lineal f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ asociada a la matriz $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ viene definida por:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_2, x_1) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

Ejercicio 9

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & \alpha \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

en donde α es un parámetro que toma valores reales.

1.º) Hallar la aplicación lineal f_α asociada a la matriz A.
2.º) Determinar α para que f_α no sea inyectiva.

Solución

1.º) La aplicación lineal asociada a la matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es la aplicación f_α: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defninida por:

$$f_\alpha(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha + 1 & \alpha \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = (\alpha + 1)\, x_1 + \alpha\, x_2 \\ y_2 = 2x_1 + \alpha\, x_2 \end{cases}$$

Es decir, la aplicación lineal f_α: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ asociada a la matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ viene definida por:

$$f_\alpha(x_1, x_2) = ((\alpha + 1)\, x_1 + \alpha\, x_2, 2x_1 + \alpha\, x_2) \qquad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

2.º) Determinemos el núcleo $N(f_\alpha)$ de la aplicación lineal f_α según los distintos valores del parámetro real α:

$$(x_1, x_2) \in N(f_\alpha) \Leftrightarrow f_\alpha(x_1, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((\alpha + 1)\, x_1 + \alpha\, x_2,\ 2x_1 + \alpha\, x_2) = (0, 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (\alpha + 1)\, x_1 + \alpha\, x_2 = 0 \\ 2x_1 + \alpha\, x_2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} -\dfrac{\alpha\,(\alpha + 1)}{2}\, x_2 + \alpha\, x_2 = 0 \\ x_1 = -\dfrac{\alpha}{2}\, x_2 \end{array}\right\}$$
$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha\,(1 - \alpha)\, x_2 = 0 \\ x_1 = -\dfrac{\alpha}{2}\, x_2 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

— Si $\alpha = 0$ el sistema lineal (1) admite las soluciones:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \lambda \end{cases} \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

y en consecuencia $N(f_o) = \{(0, \lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

— Si $\alpha = 1$ el sistema lineal (1) admite las soluciones:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\lambda}{2} \\ x_2 = \lambda \end{cases} \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

y en consecuencia $N(f_1) = \left\{ \left(-\dfrac{\lambda}{2}, \lambda \right) / \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

— Si $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ el sistema lineal (1) admite únicamente la solución:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

y en consecuencia $N(f_\alpha) = \{(0, 0)\}$

Finalmente tenemos que:

$$f_\alpha \text{ no inyectiva } \Leftrightarrow N(f_\alpha) \neq \{(0, 0)\} \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = 1$$

Ejercicio 10

Sea una matriz $A \in M_{m \times n}(K)$ y consideremos el sistema de ecuaciones lineales homogéneas expresado matricialmente por:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demostrar que el conjunto S de soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas coincide con el núcleo de la aplicación lineal f asociada a la matriz A.

Solución

La aplicación lineal $f: K^n \to K^m$ asociada a la matriz A viene definida por:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m) \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Según esto, resulta que:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \in S \Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, \overset{m}{\ldots}, 0) \Leftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_n) \in N(f)$$

Luego

$$S = N(f)$$

Apéndice III

Nociones básicas sobre análisis matricial y sistemas dinámicos continuos

1. NOCIONES BASICAS SOBRE ANALISIS MATRICIAL

En lo sucesivo denotaremos abreviadamente por $[p_{ij}]_{r \times s}$ a una matriz $P \in M_{r \times s}(\mathbb{C})$.

Se denomina sucesión de matrices a toda aplicación $f : N \to M_{r \times s}(\mathbb{C})$ definida por $f(h) = A^{\underline{h}} \quad \forall\, h \in N$, denotándola abreviadamente por: $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$.

Una sucesión de matrices $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ se denomina convergente si converge cada una de las sucesiones de números complejos $(a_{ij}^{\underline{h}})_{h \in N}$. Si $(a_{ij}^{\underline{h}})_{h \in N} \to a_{ij}$ para todo $i \in \{1, 2, ..., r\}$ y para todo $j \in \{1, 2, ..., s\}$ se dice que $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ converge a la matriz $A = [a_{ij}]_{r \times s}$ denotándose $(A^{\underline{h}})_{h \in N} \to A$ o bien $\lim_{h \to \infty} A^{\underline{h}} = A$.

Ejercicio 1

Sea la sucesión de matrices $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ con término general $A^{\underline{h}}$ definido por:

$$A^{\underline{h}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{2^h} & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ converge y hallar $\lim_{h \to \infty} A^{\underline{h}}$

Solución

En principio observemos que:

$$a_{11}^{h} = 1 \quad \forall\, h \in N \qquad a_{21}^{h} = \frac{1}{2^h} \quad \forall\, h \in N$$

$$a_{12}^{h} = \frac{1}{h} \quad \forall\, h \in N \qquad a_{22}^{h} = 0 \quad \forall\, h \in N$$

Entonces como:

$$\left(a_{11}^{h}\right)_{h\in N} \to 1 \qquad \left(a_{21}^{h}\right)_{h\in N} \to 0$$

$$\left(a_{12}^{h}\right)_{h\in N} \to 0 \qquad \left(a_{22}^{h}\right)_{h\in N} \to 0$$

se sigue que $(A^h)_{h \in N}$ es convergente y además:

$$\left(A^{h}\right)_{h\in N} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \lim_{h\to\infty} A^{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entre las propiedades que se cumplen para las sucesiones de matrices destacamos las siguientes:

—Dadas dos sucesiones de matrices $(A^h)_{h \in N}$ y $(B^h)_{h \in N}$ con $A^h \in M_{r\times s}(\mathbb{C})$ y $B^h \in M_{r\times s}(\mathbb{C})$ para todo $h \in N$, se tiene que:

$$(A^h)_{h \in N} \to A \wedge (B^h)_{h \in N} \to B \;\Rightarrow\; (A^h + B^h)_{h \in N} \to A + B$$

$$\lambda \in \mathbb{C} \wedge (A^h)_{h \in N} \to A \;\Rightarrow\; (\lambda A^h)_{h \in N} \to \lambda \,.\, A$$

—Dadas dos sucesiones de matrices $(A^h)_{h \in N}$ y $(B^h)_{h \in N}$ con $A^h \in M_{r\times s}(\mathbb{C})$ y $B^h \in M_{s\times v}(\mathbb{C})$ para todo $h \in N$, se tiene que:

$$(A^h)_{h \in N} \to A \wedge (B^h)_{h \in N} \to B \;\Rightarrow\; (A^h \,.\, B^h)_{h \in N} \to A \,.\, B$$

—Sea la sucesión de matrices cuadradas $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ definidas por $A^{\underline{h}} = A^h$, $A \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$ y denominada sucesión geométrica. Entonces:

$$\rho(A) < 1 \Rightarrow (A^h)_{h \in N} \text{ converge}$$

siendo $\rho(A)$ el radio espectral de A, es decir, el módulo del valor propio de A de mayor módulo. Además, si $(A^h)_{h \in N}$ converge, lo hace hacia la matriz nula $[0]_{r \times r}$.

Ejercicio 2

Sea la matriz $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que la sucesión de matrices $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ definida por:

$$A^{\underline{h}} = A^h = A.A \overset{h}{\ldots\ldots} A$$

es convergente y hallar $\lim_{h \to \infty} A^h$.

Solución

Los valores propios de $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Entonces como $\rho(A) = \frac{1}{2} < 1$, concluimos que la sucesión geométrica $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ es convergente y además $\lim_{h \to \infty} A^h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3

Sea la matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Probar que la sucesión de matrices $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ definida por:

$$A^{\underline{h}} = A^h$$

es convergente y hallar $\lim_{h\to\infty} A^h$.

Solución

La matriz $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ es diagonalizable, obteniéndose fácilmente que:

$$P^{-1} \,.\, A \,.\, P = D \qquad \text{o bien} \qquad A = P \,.\, D \,.\, P^{-1}$$

en donde:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{3}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado:

$$A = P \,.\, D \,.\, P^{-1} \;\Rightarrow\; A^h = P \,.\, D^h \,.\, P^{-1}$$

y como:

$$\lim_{h\to\infty} D^h = \lim_{h\to\infty}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{4}\right)^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{h\to\infty} P\cdot D^h\cdot P^{-1} = P\cdot\left(\lim_{h\to\infty} D^h\right)\cdot P^{-1}$$

Concluimos que la sucesión de matrices $(A^h)_{h \in N}$ converge y además:

$$\lim_{h\to\infty} A^h = \lim_{h\to\infty} P \cdot D^h \cdot P^{-1} = P \cdot \left(\lim_{h\to\infty} D^h \right) \cdot P^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Dada una sucesión de matrices $(A^{\underline{h}})_{h \in N}$ se denomina serie de matrices de término general $A^{\underline{h}}$ al par de sucesiones

$$\left((A^{\underline{h}})_{h\in N}, (S^{\underline{h}})_{h\in N} \right)$$

en donde:

$$S^{\underline{h}} = A^{\underline{0}} + A^{\underline{1}} + \ldots + A^{\underline{h}} = \sum_{1=0}^{h} A^{\underline{1}}$$

conviniendo en representar a una tal serie por $\sum_{m=0}^{\infty} A^{\underline{m}}$.

Se dice que la serie $\sum_{h=0}^{\infty} A^{\underline{h}}$ converge a una matriz S si la sucesión de matrices $(S^{\underline{h}})_{h \in N}$ converge a S. Además a la matriz S se le denomina suma de la serie y se denota:

$$\sum_{h=0}^{\infty} A^{\underline{h}} = S$$

Para las series de matrices se obtienen, en particular, los siguientes resultados:

—Si la serie de potencias de números complejos $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h x^h$ converge $\forall\, x \in \mathbb{C} / |x| < r$, entonces la serie de matrices $\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h A^h$ converge $\forall$ $A \in M_{q\times q}(\mathbb{C}) / \rho(A) < r$.

Aplicando este resultado se pueden estudiar las siguientes series matriciales importantes:

—Puesto que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{C} \,/\, |x| < 1$$

entonces la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge si y sólo si $\rho(A) < 1$.

Además si $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ converge se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

—En el caso de la función exponencial:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x \qquad \forall\, x \in \mathbb{C},$$

la serie matricial $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ converge $\quad \forall\, A \in M_{q\times q}(\mathbb{C})$ y se define

$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Es frecuente denotar a e^A por $\exp(A)$.

—De la misma manera se puede definir:

$$\operatorname{sen} A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1} \qquad \forall\, A \in M_{q\times q}(\mathbb{C})$$

$$\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} A^{2k} \qquad \forall\, A \in M_{q\times q}(\mathbb{C})$$

Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se denomina función matricial a toda aplicación $A(.) : I \to M_{r\times s}(\mathbb{C})$ definida por:

$$A(t) = [a_{ij}(t)]_{r\times s} \qquad \forall\, t \in I$$

Una función matricial A(.) se dice continua sobre [a, b] $\subset$ I si todos los elementos $a_{ij}(.)$ son funciones continuas sobre [a, b].

Una función matricial A(.) se dice derivable sobre [a, b] $\subset$ I si todos los elementos $a_{ij}(.)$ son derivables sobre [a, b]. Además, la derivada de A(.) en un punto cualquiera t $\in$ [a, b] se define por:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right)_{r\times s}$$

siendo frecuente denotar $\dot{A}(t) = \frac{dA(t)}{dt}$.

Destacamos las siguientes propiedades:

—Si las funciones matriciales $A(.) : I \to M_{r\times s}(\mathbb{C})$ y $B(.) : I \to M_{r\times s}(\mathbb{C})$ son derivables sobre [a, b], entonces la función matricial $M(.) : I \to \to M_{r\times s}(\mathbb{C})$ definida por:

$$M(t) = A(t) + B(t) \qquad \forall\, t \in I$$

es derivable sobre [a, b] y además:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt} \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

—Si $\gamma \in \mathbb{C}$ y la función matricial $A(.) : I \to M_{r\times s}(\mathbb{C})$ es derivable sobre [a, b] $\subset$ I, entonces la función matricial $M(.) : I \to M_{r\times s}(\mathbb{C})$ definida por:

$$M(t) = \gamma\,.\,A(t) \qquad \forall\, t \in I$$

es derivable sobre [a, b] y además:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \gamma\,.\,\frac{dA(t)}{dt} \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

—Si las funciones matriciales $A(.) : I \to M_{r \times s}(\mathbb{C})$ y $B(.) : I \to M_{s \times u}(\mathbb{C})$ son derivables sobre $[a, b] \subset I$, entonces la función matricial $M(.) : I \to$ $\to M_{r \times u}(\mathbb{C})$ definida por:

$$M(t) = A(t) \,.\, B(t) \qquad \forall\, t \in I$$

es derivable sobre [a, b] y además:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} \,.\, B(t) + A(t) \,.\, \frac{dB(t)}{dt} \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

—Si la función matricial $A(.) : I \to M_{r \times r}(\mathbb{C})$ es tal que A(.) es regular y derivable sobre $[a, b] \subset I$, entonces la función matricial $M(.) : I \to$ $\to M_{r \times r}(\mathbb{C})$ definida por:

$$M(t) = A^{-1}(t) \qquad \forall\, t \in I$$

es derivable sobre [a, b] y además:

$$\frac{dM(t)}{dt} = -A^{-1}(t) \,.\, \frac{dA(t)}{dt} \,.\, A^{-1}(t) \qquad \forall\, t \in [a, b]$$

Una función matricial $A(.) : I \to M_{r \times s}(\mathbb{C})$ se dice integrable sobre $[a, b] \subset I$ si todos los elementos $a_{ij}(.)$ son integrables sobre [a, b]. Además, la integral de A(.) sobre [a, b] se define por:

$$\int_a^b A(\tau)\, d\tau = \left[\int_a^b a_{ij}(\tau)\, d\tau\right]_{r \times s}$$

Resaltando las siguientes propiedades:

—Si las funciones matriciales $A(.) : I \to M_{r \times s}(\mathbb{C})$ y $B(.) : I \to M_{r \times s}(\mathbb{C})$ son integrables sobre $[a, b] \subset I$, entonces la función matricial $M(.) : I \to$ $\to M_{r \times s}(\mathbb{C})$ definida por:

$$M(t) = A(t) + B(t) \qquad \forall\, t \in I$$

es integrable sobre [a, b] y además:

$$\int_a^b M(\tau)\, d\tau = \int_a^b A(\tau)\, d\tau + \int_a^b B(\tau)\, d\tau$$

—Si $\gamma \in \mathbb{C}$ y la función matricial $A(.) : I \to M_{r \times s}(\mathbb{C})$ es integrable sobre $[a, b] \subset I$, entonces la función $M(.) : I \to M_{r \times s}(\mathbb{C})$ definida por:

$$M(t) = \gamma \,.\, A(t) \qquad \forall\, t \in I$$

es integrable sobre [a, b] y además:

$$\int_a^b M(\tau)\, d\tau = \gamma \int_a^b A(\tau)\, d\tau$$

La función matricial exp(tA)

Para un escalar $t \in \mathbb{R}$ cualquiera pero fijo, la serie de matrices $\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(tA)^h}{h!} =$

$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} A^h$ converge para toda matriz $A \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$ y se define:

$$\exp(tA) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} A^h$$

Se verifican las siguientes propiedades:

—$\forall\, t, \tau \in \mathbb{R}$ y $\forall\, A \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$ se cumple que:

$$\exp(tA) \,.\, \exp(\tau A) = \exp((t + \tau)A)$$

—$\forall\, t \in \mathbb{R}$ y $\forall\, A, B \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$ se cumple que:

$$\exp(tA) \,.\, \exp(tB) = \exp(t(A + B)) \iff A \,.\, B = B \,.\, A$$

—$\forall\, t \in \mathbb{R}$ y $\forall\, A \in M_{r \times r}(\mathbb{C})$ la matriz $\exp(tA)$ es regular y

$$(\exp(tA))^{-1} = \exp(-tA)$$

—La función matricial exp(tA) es derivable sobre $\mathbb{R}$ y

$$\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A\exp(tA) = \exp(tA)\,A$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ hallemos exp(tA)

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\begin{pmatrix} -2t & 0 \\ 0 & -3t \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\begin{pmatrix} (-2t)^k & 0 \\ 0 & (-3t)^k \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!}(-2t)^k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!}(-3t)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-2t)^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-3t)^k \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Debido a que la matriz anterior es diagonal, la obtención de exp(tA) es muy sencilla, sin embargo no sucede así en el caso de una matriz cualquiera. Entonces utilizaremos el siguiente desarrollo:

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_k(t)\,A^k \text{ en donde:}$$

μ es el grado del polinomio mínimo de A y las funciones $\alpha_k(t)$ se obtienen del sistema de ecuaciones lineales:

$$t^s \exp(\lambda_r t) = \frac{d^s}{d\lambda^s} \sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_k(t)\lambda^k \Big|_{\lambda=\lambda_r}$$

para s = 0, 1, ..., $\mu_r - 1$ y r = 1, 2, ..., σ siendo $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\sigma$ los valores propios distintos de A de índices de multiplicidad respectivos $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_\sigma$ en el polinomio mínimo de A.

Veamos un ejemplo:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

El polinomio mínimo es $m(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1) = p(\lambda)$.
Los valores propios son

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 & \mu_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 & \mu_2 = 1 \end{cases} \qquad \mu_1 + \mu_2 = 3 = \mu$$

entonces

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{2} \alpha_k(t)\, A^k = \alpha_o(t) \,.\, I + \alpha_1(t) \,.\, A + \alpha_2(t) \,.\, A^2$$

Calculamos las funciones $\alpha_k(t)$

$$t^s \exp(\lambda_r t) = \frac{d^s}{d\lambda^s}(\alpha_o(t) + \alpha_1(t)\lambda + \alpha_2(t)\lambda^2)\Big|_{\lambda=\lambda_r}$$

$(s = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ \mu_r - 1;\ r = 1,\ 2)$

$$\begin{cases} 1 = \alpha_o(t) \\ t = \alpha_1(t) \\ \exp(t) = \alpha_o(t) + \alpha_1(t) + \alpha_2(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_o(t) = 1 \\ \alpha_1(t) = t \\ \alpha_2(t) = \exp(t) - t - 1 \end{cases}$$

Por tanto:

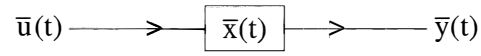
$$\exp(tA) = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (\exp(t) - t - 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \exp(t) - 1 & 0 & \exp(t) \end{pmatrix}$$

Finalmente conviene precisar que todo lo expuesto puede presentarse como caso particular de los conceptos de convergencia, derivación e integración en espacios vectoriales normados de dimensión finita.

2. NOCIONES BASICAS SOBRE SISTEMAS DINAMICOS CONTINUOS

Un sistema dinámico es un ente o dispositivo en donde se manifiesta una relación de tipo causa-efecto y que evoluciona en el transcurso del tiempo.



En un sistema dinámico es posible observar un vector $\bar{u}(t)$ de estímulo (entrada) que actúa sobre el sistema y un vector $\bar{y}(t)$ de respuesta (salida) motivada por un $\bar{u}(t)$. Además, es posible asignar al sistema un «estado», entendiendo por estado un vector $\bar{x}(t)$ que representa un conjunto de propiedades relevantes que dicho sistema posee en un instante determinado, de tal forma que el conocimiento de $\bar{x}(t_o)$ y $\bar{u}(t)$ para $t > t_o$ determina de manera única a $\bar{y}(t)$ para $t > t_o$.

El estado $\bar{x}(t)$ va a ser de alguna manera un resumen o memoria de la historia del sistema.

Si el estado $\bar{x}(t)$ viene definido, en cada instante t, por un vector constituido por un número finito n de componentes $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ el sistema dinámico se denomina sistema dinámico de dimensión finita y las componentes $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ reciben el nombre de variables de estado.

En lo sucesivo todo sistema dinámico considerado se supondrá de dimensión finita.

Una clase importante de sistemas dinámicos es la constituida por los denominados sistemas dinámicos continuos, los cuales vienen definidos por un par de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) & (1) \\ \bar{y}(t) = g(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) & (1') \end{cases} \qquad \forall\, t \in \left[t_o, \hat{t}\right] \subset \mathbb{R}^+$$

en donde $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ es el estado del sistema en el tiempo t, $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ la entrada del sistema en el tiempo t y $\bar{y}(t) \in \mathbb{R}^q$ la salida del sistema en el tiem-

po t, siendo además $\overline{u}(.) : [t_o, \hat{t}] \to \mathbb{R}^p$ y $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times [t_o, \hat{t}] \to \mathbb{R}^q$ aplicaciones continuas y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times [t_o, \hat{t}] \to \mathbb{R}^n$ una aplicación continua y continuamente diferenciable respecto de $\overline{x}$.

Un sistema dinámico continuo definido por (1) y (1'), se denomina sistema dinámico continuo lineal si las aplicaciones $\hat{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ y $\hat{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ definidas por:

$$\hat{f}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) = f(\overline{x}(t), \overline{u}(t), t)$$
$$\hat{g}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) = f(\overline{x}(t), \overline{u}(t), t)$$

son aplicaciones lineales.

Todo sistema dinámico continuo lineal definido por (1) y (1') admite una representación única de la forma:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = A(t)\overline{x}(t) + B(t)\overline{u}(t) & (2) \\ \overline{y}(t) = C(t)\overline{x}(t) + D(t)\overline{u}(t) & (2') \end{cases} \qquad \forall\, t \in \left[t_o, \hat{t}\right]$$

en donde las funciones matriciales

$$A(.) : [t_o, \hat{t}] \to M_{n\times n}(\mathbb{R}) \quad ; \quad B(.) : [t_o, \hat{t}] \to M_{n\times p}(\mathbb{R})$$
$$C(.) : [t_o, \hat{t}] \to M_{q\times n}(\mathbb{R}) \quad y \quad D(.) : [t_o, \hat{t}] \to M_{q\times p}(\mathbb{R})$$

son funciones matriciales continuas. A la matriz A(t) la denominaremos matriz de planta.

Antes de seguir adelante conviene precisar que en (1) y (1'), $\overline{x}(t)$ denota a la n-tupla $(x_1(t), ..., x_n(t))$ de $\mathbb{R}^n$, mientras que $\overline{x}(t)$ en (2) y (2') representa a la matriz columna $[x_1(t) \ ... \ x_n(t)]^T$ de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Este abuso de lenguaje, que facilitará la exposición a posteriori, está justificado por el isomorfismo estructural existente entre los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Este razonamiento se hace extensible a $\overline{u}(t)$ e $\overline{y}(t)$.

Si las funciones matriciales A(.), B(.), C(.) y D(.) son constantes sobre $[t_o, \hat{t}]$, el sistema definido por (2) y (2') se denomina sistema dinámico continuo lineal invariante en el tiempo.

Consideremos un sistema dinámico continuo lineal invariante en el tiempo definido por:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\,\bar{x}(t) + B\,\bar{u}(t) & (3) \\ \bar{y}(t) = C\,\bar{x}(t) + D\,\bar{u}(t) & (3') \end{cases}$$

en donde t recorre el intervalo $[t_o, \hat{t}] \subset \mathbb{R}^+$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{q\times n}(\mathbb{R})$ y $D \in M_{q\times p}(\mathbb{R})$.

Resolución

Multiplicando por la izquierda por la matriz exp(–tA) a ambos miembros de la ecuación matricial diferencial (3), se sigue que:

$$\exp(-tA)\,\dot{\bar{x}}(t) = \exp(-tA)A\,\bar{x}(t) + \exp(-tA)B\bar{u}(t) \qquad \forall\ t \in \left[t_o, \hat{t}\right]$$

Es decir:

$$\exp(-tA)\,\dot{\bar{x}}(t) - \exp(-tA)A\,\bar{x}(t) = \exp(-tA)B\bar{u}(t) \qquad \forall\ t \in \left[t_o, \hat{t}\right]$$

$$\frac{d}{dt}(\exp(-tA)\,\bar{x}(t)) = \exp(-tA)B\bar{u}(t) \qquad \forall\ t \in \left[t_o, \hat{t}\right]$$

Integrando entre t_o y $t \in [t_o, \hat{t}]$ resulta que:

$$\exp(-tA)\,\bar{x}(t) - \exp(-t_oA)\,\bar{x}_o = \int_{t_o}^{t} \exp(-\tau A)B\bar{u}(\tau)\,d\tau \qquad \forall t \in \left[t_o, \hat{t}\right]$$

$$\exp(-tA)\,\bar{x}(t) = \exp(-t_oA)\,\bar{x}_o + \int_{t_o}^{t} \exp(-\tau A)B\bar{u}(\tau)\,d\tau \qquad \forall t \in \left[t_o, \hat{t}\right]$$

De donde multiplicando por la izquierda por la matriz exp(tA) a ambos miembros de la última ecuación obtenida, se deduce operando:

$$\bar{x}(t) = \exp((t-t_o)A)\,\bar{x}_o + \int_{t_o}^{t} \exp((t-\tau)A)B\bar{u}(\tau)\,d\tau \qquad \forall\ t \in \left[t_o, \hat{t}\right]$$

en donde $\bar{u}(.)$ es una entrada dada y $\phi(., t_o) : [t_o, \hat{t}] \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R})$ definida por $\phi(t, t_o) = \exp((t - t_o)A)$ es la denominada matriz de transición de estado del sistema dinámico continuo lineal invariante en el tiempo definido por (3) y (3'), siendo sus propiedades fundamentales:

—$\exp((t_2 - t_o)A) = \exp((t_2 - t_1)A)\exp((t_1 - t_o)A) \quad \forall\, t_1, t_2 \in [t_o, \hat{t}]$

—$\det[\exp((t - t_o)A)] = \exp((\text{traza } A)(t - t_o)) \quad \forall\, t \in [t_o, \hat{t}]$

—$\exp((t - t_o)A)$ es inversible para todo $t \in [t_o, \hat{t}]$ y además:

$$[\exp((t - t_o)A)]^{-1} = \exp((t_o - t)A)$$

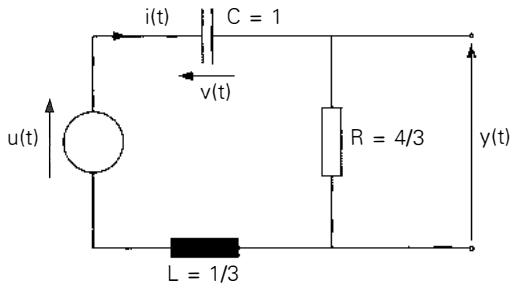
Por otro lado, el valor de la salida y(.) viene definida por:

$$\bar{y}(t) = C(t)\exp((t - t_o)A)\bar{x}_o +$$

$$+ C(t)\int_{t_o}^{t} \exp((t - \tau)A)B\bar{u}(\tau)\,d\tau + D(t)\bar{u}(t) \quad \forall t \in [t_o, \hat{t}]$$

Ejercicio 4

Resolver el siguiente circuito eléctrico caracterizándolo como un sistema dinámico continuo lineal invariante en el tiempo:



Solución

Si consideramos las variables de estado:

$$\begin{cases} x_1(t) = v(t) \\ x_2(t) = i(t) \end{cases}$$

Obtendremos el sistema dinámico continuo lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{pmatrix}0 & 4/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$$

con la condición inicial $\begin{pmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

estudiado en el intervalo $[0, \hat{t}]$.

Según el desarrollo teórico anterior, su solución $\overline{x}(t)$ viene dada por la fórmula:

$$\overline{x}(t)=\exp(tA)\,\overline{x}_o+\int_0^t \exp((t-\tau)A)\,Bu(\tau)\,d\tau$$

Debemos hallar en primer lugar exp(tA), para lo que necesitamos conocer el polinomio mínimo de la matriz A.

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -3 & -\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+3$$

$$p(\lambda)=0\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda=-1\\ \lambda=-3\end{cases}$$

$p(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+3)$ y por tanto,

$m(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda+3),\quad \mu=2$

Recordemos que $\exp(tA)=\sum_{k=0}^{\mu-1}\alpha_k(t)A^k$. En este caso

$$\exp(tA)=\sum_{k=0}^{1}\alpha_k(t)A^k=\alpha_o(t)\,I+\alpha_1(t)A$$

$\alpha_o(t)$ y $\alpha_1(t)$ son las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} \exp(-t) = \alpha_o(t) - \alpha_1(t) \\ \exp(-3t) = \alpha_o(t) - 3\alpha_1(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_o(t) = \frac{1}{2}(3\exp(-t) - \exp(-3t)) \\ \alpha_1(t) = \frac{1}{2}(\exp(-t) - \exp(-3t)) \end{cases}$$

luego:

$$\exp(tA) = \alpha_o(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3\exp(-t) - \exp(-3t)) & \frac{1}{2}(\exp(-t) - \exp(-3t)) \\ -\frac{3}{2}(\exp(-t) - \exp(-3t)) & -\frac{1}{2}(\exp(-t) - 3\exp(-3t)) \end{pmatrix}$$

y

$$\exp((t-\tau)A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3\exp(\tau - t) - \exp(3(\tau - t))) & \frac{1}{2}(\exp(\tau - t) - \exp(3(\tau - t))) \\ -\frac{3}{2}(\exp(\tau - t) - \exp(3(\tau - t))) & -\frac{1}{2}(\exp(\tau - t) - 3\exp(3(\tau - t))) \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\bar{x}(t) = \exp(tA)\underset{\bar{0}}{\bar{x}_o} + \int_0^t \exp((t-\tau)A)\,B\,u(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^t \exp((t-\tau)A)\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} u(\tau)\,d\tau \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(\exp(\tau - t) - \exp(3(\tau - t))) \\ -\frac{3}{2}(\exp(\tau - t) - 3\exp(3(\tau - t))) \end{pmatrix} u(\tau)\,d\tau$$

Si consideramos $u(\tau) = 1 \qquad \forall\, \tau \in [0, \hat{t}\,]$

$$x_1(t) = \int_0^t \frac{3}{2}(\exp(\tau - t) - \exp(3(\tau - t)))\,d\tau$$

$$x_2(t) = \int_0^t -\frac{3}{2}(\exp(\tau - t) - 3\exp(3(\tau - t)))\,d\tau$$

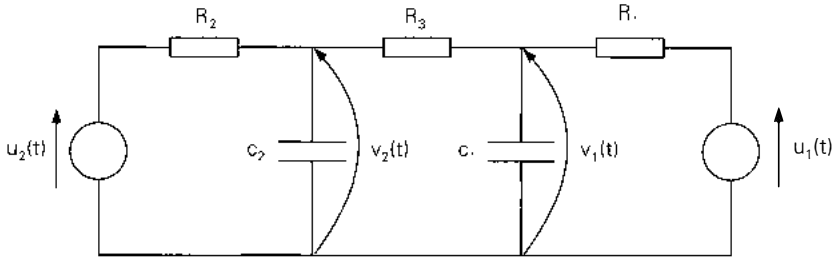
$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{3}{2}(1 - \exp(-t) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\exp(-3t)) \\ x_2(t) &= -\frac{3}{2}(1 - \exp(-t) - 1 + \exp(-3t)) \end{aligned} \qquad \forall\, t \in [0, \hat{t}\,]$$

Además, la salida

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 4/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = 2(\exp(-t) - \exp(-3t))$$

Ejercicio 5

Resolver el siguiente circuito eléctrico:



Considerando:

$$C_1 = C_2 = 0.5; \qquad R_1 = R_2 = R_3 = 2$$

Solución

Resolviendo el circuito por el método de nudos:

$$\frac{v_1 - v_2}{R_3} + \frac{v_1 - u_1}{R_1} + C_1 \frac{dv_1}{dt} = 0$$

$$\frac{v_2 - v_1}{R_3} + \frac{v_2 - u_2}{R_2} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = 0$$

Podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\frac{v_1(t) - v_2(t)}{2} + \frac{v_1(t) - u_1(t)}{2} + 0.5 \frac{dv_1(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{v_2(t) - v_1(t)}{2} + \frac{v_2(t) - u_2(t)}{2} + 0.5 \frac{dv_2(t)}{dt} = 0$$

Si ponemos

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \dot{v}_1(t) \quad \text{y} \quad \frac{dv_2(t)}{dt} = \dot{v}_2(t)$$

se puede escribir el sistema dinámico continuo lineal invariante en el tiempo:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

Estudiaremos el circuito en el segmento de tiempo $[0, \hat{t}]$ partiendo de la condición inicial

$$\begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de planta es $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Determinación de la matriz de transición de estado

—Polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1)$$

—Polinomio mínimo:

$$m(\lambda) = p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)$$

—Valores propios:

$$m(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 & \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 & \mu_2 = 1 \end{cases}$$

—Matriz de transición de estado $\phi(t, t_o) = \exp((t - t_o)A)$.

En este caso $t_o = 0$, luego $\phi(t, 0) = \exp(tA) = \alpha_o(t)I + \alpha_1(t)A$, en donde:

$$\begin{cases} \exp(-3t) = \alpha_o(t) - 3\alpha_1(t) \\ \exp(-t) = \alpha_o(t) - \alpha_1(t) \end{cases}$$

Operando:

$$\begin{cases} \alpha_o(t) = \frac{1}{2}\left[3\exp(-t) - \exp(-3t)\right] \\ \alpha_1(t) = \frac{1}{2}\left[\exp(-t) - \exp(-3t)\right] \end{cases}$$

de donde:

$$\exp(tA) = \frac{1}{2}\left[3\exp(-t) - \exp(-3t)\right]\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\exp(-t) - \exp(-3t)\right]\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \exp(-t) + \exp(-3t) & \exp(-t) - \exp(-3t) \\ \exp(-t) - \exp(-3t) & \exp(-t) + \exp(-3t) \end{pmatrix}$$

Determinación de las variables de estado $v_1(t)$ y $v_2(t)$ para cualquier instante $t \in [0, \hat{t}]$

Según se ha visto anteriormente, la solución $\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}$ viene dada por la fórmula:

$$\bar{v}(t) = \phi(t, t_o)\bar{v}_o + \int_{t_o}^{t} \exp((t-\tau)A)\, B\, \bar{u}(\tau)\, d\tau$$

que en nuestro caso, al ser $t_o = 0$ y $\bar{v}_o = \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ queda:

$$\bar{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \exp((t-\tau)A) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix} d\tau \quad \forall\ t \in [0, \hat{t}],$$

en donde $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$ es una entrada dada definida sobre $[0, \hat{t}]$.

En particular para $\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ constante sobre $[0, \hat{t}]$:

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \exp((t-\tau)A) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} d\tau \qquad \forall\ t \in [0, \hat{t}]$$

Operando se obtiene:

$$v_1(t) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\exp(-t) - \frac{1}{6}\exp(-3t)\right)u_1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\exp(-t) + \frac{1}{6}\exp(-3t)\right)u_2$$

$$v_2(t) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\exp(-t) + \frac{1}{6}\exp(-3t)\right)u_1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\exp(-t) - \frac{1}{6}\exp(-3t)\right)u_2$$

$$\forall t \in [0, \hat{t}]$$

Bibliografía de referencia

AGNEW, J.L.; KNAPP, R.C. *Linear Algebra with Applications*. Brooks/Cole Publishing Company 1989.

ANZOLA, M.; CARUCHO, J. *Problema de Algebra*. Autores, Madrid (1976).

AYRES, F. *Matrices*. Mcgraw-Hill. Serie Schaum (1969).

BELLMAN, R. *Introduction to matrix analysis*. McGraw-Hill (1970).

BROYDEN, C.G. *Basic matrices*. Macmillan (1975).

CAGNAC, G.; RAMIS, E.; COMMEAU, J. G. *Géométrie*. Masson (1976).

CARBO CARRE, R.; PASCUAL LLORENC, D. *Algebra matricial y lineal*. McGraw-Hill. Serie Schaum (1987).

CASANOVA GONZALEZ-MATEO, J.; VILA GINESTA, J. *Exámenes de Algebra Lineal*. Ediciones Universidad y Cultura (1986).

COULON, A.E. *Matrices. Origen, álgebra, aplicaciones*. Paraninfo (1984).

COXETER, H.S.M. *Fundamentos de geometría*. Limusa (1971).

DE BURGOS, J. *Curso de álgebra y geometría*. Alhambra (1977).

DE BURGOS, J. *Algebra lineal*. McGraw-Hill (1993).

DE DIEGO, B.; GORDILLO, E.; VALEIRAS, G. *Problemas de álgebra lineal*. Deimos (1984).

DE LA VILLA, A. *Problemas de Algebra*. CLAGSA (1994).

DETTMAN, J.W. *Introducción al álgebra lineal y a las ecuaciones diferenciales*. McGraw-Hill (1975).

DIEUDONNE, J. *Algebra lineal y Geometría elemental*. Selecciones Científicas (1971).

DONEDDU, A. *Structures fondamentales*. Vuibert (1976).

DONEDDU, A. *Polynômes et algèbre linéaire*. Vuibet (1976).

DONEDDU, A. *Espaces euclidiens et hermitiens. Géométries*. Vuibert (1977).

FADDEVA, V.N. Métodos de cálculo de álgebra lineal. Paraninfo (1973).

GANTMACHER, F.R. *Théorie de matrices*. Dunod (1966).

GARCIA GARCIA, J.; LOPEZ PELLICER, M. *Algebra lineal y geometría*. Marfil (1983).

GARCIA GARCIA, J.; LOPEZ PELLICER, M. *Algebra lineal y geometría. Ejercicios.* Marfil (1984).
GOLOVINA, L.I. *Algebra lineal y algunas de sus aplicaciones.* Mir (1974).
GOULT, R.J. *Applied linear algebra.* Ellies Horwood (1978).
HEINHOLD, J.; RIEDMULLER, B. *Algebra lineal y geometría analítica.* Reverté (1981).
HIRSCH, M.W.; SMALE, S. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal.* Alianza Universidad (1985).
HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Algebra lineal.* Prentice-Hall International (1973).
LANCASTER, P.; TISMENETSK£, M. *The Theory of matrices.* Academic Press (1984).
LANG, S. *Linear Algebra.* Addison-Wesley (1971).
Lipschutz, S. *Algebra lineal.* McGraw-Hill. Serie Schaum (1971).
MAC LANE, S.; BIRKHOFF, G. *Algèbre.* Gauthiers-Willars (1971).
MARTIN, P. *Applications de l'algèbre et de l'analyse a la géométrie.* Armand Colin (1967).
NERIN, E.D. *Algebra lineal y teoría de matrices.* Limusa (1977).
NOBLE, B. *Applications of undergraduate mathematics in engineering.* The Mathematical Association of America (1967).
NOBLE, B.; DANIEL, J.W. *Applied linear algebra.* Prentice-Hall (1977).
PROSKURIAKOS, I.V. *Problemas de álgebra lineal.* Reverté (1978).
PUERTA, F. *Algebra lineal.* Marcombo (1976).
QUEYSANNE, M. *Algèbre.* Armand Colin (1964).
QUEYSANNE, M.; REVUZ, A. *Geometría.* C.E.C.S.A. (1976).
REZA, F. *Los espacios lineales en la ingeniería.* Reverté (1977).
RIAZA, P. *Complementos de matemáticas.* U.N.E.D. (1980).
RIVAUD, J. *Exercices d'algebre linéaire.* Vuibert (1978).
ROJO, J. *Algebra Lineal.* AC (1991)
RORRES, C.; ANTON, H. *Aplicaciones del álgebra lineal.* Limusa (1979).
SAWYER, E.C. *An engineering approach to linear algebra.* Cambridge University Press (1972).
STRANG, G. *Algebra lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano (1982).
STRANG, G. *Introduction to Applied Matematics* Wellesley-Cambridge Press (1986).
THOMAS ARA, L.; RIOS GARCIA, M.E. *Algebra Lineal.* Autores, Santander (1975).
TORREGROSA SANCHEZ, J.R.; JORDAN LLUCH, C. *Algebra lineal y sus aplicaciones.* McGraw-Hill. Serie Schaum (1987).
VILA GINESTA, J. *Exámenes de álgebra lineal.* Ediciones Universidad y Cultura (1987).
VOEVODIN, V.V. *Algebra lineal.* Mir (1982).

El Algebra Lineal y Geometría junto con el Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico constituyen los fundamentos básicos de la formación matemática para la Ingeniería y Ciencias Experimentales. En esta obra, organizada en doce temas y tres apéndices, se desarrollan los elementos necesarios para una formación básica en Algebra Lineal y Geometría para estudiantes de Escuelas Técnicas y Facultades de Ciencias Experimentales. Los ocho primeros temas, dedicados al Algebra Lineal, están nucleados entorno de la estructura de espacio vectorial, el cálculo matricial, la estructura de espacio vectorial euclídeo y la teoría espectral. Los cuatro últimos temas presentan una introducción a la Geometría como una prolongación natural del Algebra Lineal.

El desarrollo de la obra está orientado a la formación integral del alumno, tratando un amplio espectro de conceptos básicos y métodos fundamentales, incluyendo la resolución de un buen número de ejercicios.