Kalkuluan barreneko ibilbidea

Mathematica erabilita II

M.ª Josefa González Gómez
Elisabete Alberdi Celaya
Jon Ander Rivera González
Isabel Eguia Ribero

EHU

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

Kalkuluan barreneko ibilbidea [Recurso electrónico]: Mathematica erabilita II /Mª Josefa González Gómez…[et al.]. – Datos. – [Leioa]: Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2026]. – 1 recurso en línea : PDF (167 p.). – (Unibertsitateko Eskuliburuak = Manuales Universitarios)
Modo de acceso: World Wide Web
ISBN: 978-84-1319-750-0

1. Cálculo. 2. Análisis matemático. 3. Mathematica (Programa de ordenador) I. González Gómez, María Josefa, coaut.

(0.034)517

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiaren bitartez.

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

ISBN: 978-84-1319-750-0

Gaien aurkibidea

Irudien zerrenda **IV**

Sarrera **1**

1 Integral mugagabea **2**

1.1 Jatorrizko funtzioak eta integral-funtzioak 2

1.2 Oinarrizko propietateak 2

1.3 Berehalako integralak 3

1.4 Aldagai-aldaketa 4

1.5 Zatikako integrazioa 5

1.6 Funtzio arrazionalen integrazioa 7

1.6.1 Erro erreal sinpleak 7

1.6.2 Erro erreal anizkoitzak 7

1.6.3 Erro konplexu sinpleak 8

1.6.4 Erro konplexu anizkoitzak 10

1.7 Funtzio trigonometrikoen integrazioa 11

1.7.1 Aldagai-aldaketa unibertsala 11

1.7.2 Funtzioa bikoitia da $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioetan 11

1.7.3 Funtzioa bakoitia da $\sin x$ edo $\cos x$ funtzioetan 12

1.7.4 Erabilgarriak diren zenbait formula 13

1.8 Funtzio irrazionalen integrazioa 14

1.9 Ordenagailuko praktikak 20

2 Integral mugatua **23**

2.1 Riemannen integrala 23

2.1.1 Goi-batura eta behe-batura 23

2.1.2 Riemannen integralaren definizioa . . . 24
2.1.3 Riemannen baturak . . . 26
2.2 Teorema garrantzitsuak . . . 26
2.2.1 Batez besteko balioaren teorema integral mugatuetarako . . 26
2.2.2 Barrowren teorema . . . 27
2.3 Barrowren erregela . . . 27
2.4 Integral inpropioak . . . 28
2.4.1 Funtzio bornagabea . . . 28
2.4.2 Eremu mugagabea . . . 29
2.5 Ordenagailuko praktikak . . . 29

3 Integral bikoitzak eta aplikazioak 42
3.1 Integral bikoitza lauki batean . . . 42
3.1.1 Integral iteratuak . . . 44
3.2 Integral bikoitzak eskualde lau orokorretan . . . 44
3.2.1 Integral bikoitzak I eta II motako eremuetan . . . 45
3.3 Integral bikoitzen propietateak . . . 47
3.4 Integral bikoitza koordenatu polarretan . . . 47
3.5 Ordenagailuko praktikak . . . 49

4 Integral hirukoitzak eta aplikazioak 66
4.1 Integral hirukoitza kutxa batean . . . 66
4.1.1 Integral iteratu hirukoitzak . . . 67
4.2 Integral hirukoitza eskualde solido orokorretan . . . 67
4.2.1 Lehenengo motako eremu solidoa . . . 68
4.2.2 Bigarren motako eremu solidoa . . . 70
4.2.3 Hirugarren motako eremu solidoa . . . 70
4.3 Integral hirukoitza koordenatu zilindrikoetan . . . 71
4.4 Integral hirukoitza koordenatu esferikoetan . . . 73
4.5 Ordenagailuko praktikak . . . 74

5 Eremu eskalarrak eta bektore-eremuak 92
5.1 Definizioak . . . 92
5.2 Operadore diferentzialak . . . 92
5.2.1 Gradientea . . . 92

5.2.2 Dibergentzia . . . 93
5.2.3 Errotazionala . . . 93
5.2.4 Laplaziarra . . . 94
5.2.5 Emaitza teorikoak . . . 95
5.3 Ordenagailuko praktikak . . . 98

6 Kurba parametrikoak 113
6.1 Definizioa . . . 113
6.1.1 Zenbait kurba parametriko . . . 113
6.1.2 Simetria eta periodikotasuna . . . 116
6.2 Kurba parametriko mota ezberdinak . . . 118
6.2.1 Kurba jarraitua . . . 118
6.2.2 Kurba erregularra . . . 119
6.2.3 Kurba itxia . . . 119
6.2.4 Kurba sinplea . . . 119
6.2.5 Jordanen kurba . . . 119
6.3 Puntu singularrak . . . 119
6.4 Ordenagailuko praktikak . . . 122

7 Lerro-integralak 136
7.1 Kurba parametriko baten integrala . . . 136
7.1.1 Kurba baten luzera . . . 136
7.1.2 Kurba parametriko baten azpiko azalera . . . 137
7.1.3 Biraketa-solido baten azalera . . . 138
7.2 Eremu eskalarren lerro-integrala . . . 138
7.2.1 Propietateak . . . 139
7.3 Bektore-eremuen lerro-integrala . . . 140
7.3.1 Propietateak . . . 140
7.4 Teorema garrantzitsuak . . . 141
7.4.1 Greenen teorema . . . 141
7.4.2 Stokesen teorema . . . 141
7.5 Ordenagailuko praktikak . . . 143

Bibliografia 159

Irudien zerrenda

2.1 Goi- eta behe-baturen adibideak. 24

2.2 Riemannen baturaren adibidea. 26

3.1 Bolumenak kalkulatzeko egindako prozesuaren adibide bat. 43

3.2 I motako eremu baten adibide bat. 45

3.3 II motako eremu baten adibide bat. 47

3.4 Koordenatu polarren adierazpena kasu ezberdinetan. 48

4.1 E_1 motako eremu solido baten adibide bat. 68

4.2 Ebazten ari garen integralaren E eremu solidoaren adierazpen grafikoa. 69

4.3 Koordenatu zilindrikoen adierazpen grafikoa. 71

4.4 Ebazten ari garen integralaren E eremu solidoaren adierazpen grafikoa. 72

4.5 Koordenatu esferikoen adierazpen grafikoa. 73

5.1 D gainazalaren banaketa D_1, D_2 eta D_3 gainazaletan. 96

6.1 Segmentu bat grafikoki irudikatuta. 114

6.2 Elipse bat grafikoki irudikatuta. 114

6.3 Zikloide bat grafikoki irudikatuta. 115

6.4 Arkimedesen espirala grafikoki irudikatuta. 115

6.5 Kardioide bat grafikoki irudikatuta. 116

6.6 Lemniskata grafikoki irudikatuta. 116

6.7 Erradioa $r = 1$ eta $k = 3$ duen helizea grafikoki irudikatuta, non altuera 6π baita. 117

6.8 α_1 eta α_2 kurba parametrikoak irudikatuta. 118

6.9 Lau puntu singularren adibideak grafikoki irudikatuta. 120

7.1 Sortzen den «hesiaren» adibide grafikoa. 139

7.2 Stokesen teoreman planteatu dugun kasuaren adibide grafiko bat. . 142

Sarrera

Liburu hau *Kalkuluan barreneko ibilbidea Mathematica erabilita I* liburuaren jarraipena da. Lehenengo liburuki hartan mintzagai izan genituen bai aldagai bakarreko funtzioak bai eta aldagai anitzekoak ere. Besteak beste, funtzioen limiteak, jarraitutasuna, deribagarritasuna eta optimizazioa aztertu genituen bertan.

Bigarren liburuki honetan, lehenik eta behin, integralak landuko ditugu: integral mugagabeak eta mugatuak, integral bikoitzak eta hirukoitzak eta haien aplikazioak, besteak beste. Horiek ikusi ostean, eremu eskalarrak eta bektore-eremuak izango ditugu aztergai. Kurba parametrikoak ere ikasiko ditugu, haien propietateetan erreparatuko dugu, eta haien sailkapena ere egingo dugu. Liburua itxiko dugu lerro-integralei tartea eskainiz: kurba parametrikoen integralak eta eremu eskalarren eta bektore-eremuen lerro-integralak nola egin ikusiko dugu.

Orduan egin genuen bezala, lan honetan ere, jarraitu beharreko prozedurak eskuz egiten irakasteaz gain, ordenagailuan nola egiten diren ere irakatsiko da. Horretarako, beharrezko aginduak zein diren azalduko da, eta oinarrizko programazioko prozedurak ere garatuko dira. Ordenagailu bidez ariketak ebazteko, Wolfram Mathematica softwarea erabiliko da. Mathematica kalkulurako eta programaziorako ingurune interaktiboa da. Software horrek, besteak beste, aljebra linealeko hainbat problema ebazteko tresnak ditu, ekuazioen erroak aurki ditzake, funtzioen deribatuak eta integralak kalkula ditzake, polinomioekin lan egin dezake, ekuazio diferentzialak ebatz ditzake, etab.

Software hori aukeratzeko beste arrazoietako bat izan da grafikoak bistaratzeko duen gaitasuna. Aldagai bakarreko funtzioen grafikoak, deribatuen interpretazioak edota integral mugatuen adierazpenak eskuz egitea posible den arren, ikusgarriago geratzen dira ordenagailuaren laguntzaz egiten direnean. Aldagai anitzeko funtzioekin lanean ari garenean, grafikoak eskuz irudikatzea ez da berehalako lana izaten; ordenagailuz nahiko erraz egin daitezke, ordea. Horrelakoetan, ordenagailu bidezko matematikak eta irudigintzak aldagai bakarraren kasuan baino garrantzi handiagoa hartzen du, eta ia ezinbesteko tresna bihurtzen da. Kontuan izan behar da, gainera, problemaren bistaratze geometrikoak asko laguntzen duela problemaren ebazpen matematikoan.

Egiturari dagokionez, liburua zazpi gaitan banatuta dago. Gai horietako bakoitzean teoria azaltzen da, eta ariketak ebazten dira bai eskuz eta baita ordenagailuaren laguntzaz ere.

1. kapitulua

Integral mugagabea

Integral mugagabeen teoriarekin hasiko dugu liburua, eta horiekin lanean jardungo dugu kapitulu honetan. Jatorrizko funtzioaren definizioa ematen hasiko gara, eta haren propietateak azaltzen. Horren ostean, berehalako integralak ikusiko ditugu. Eta azkenik, askotariko integralen sailkapena eta haiek ebazteko bideak emango ditugu.

1.1 Jatorrizko funtzioak eta integral-funtzioak

Definizioa. Izan bitez $f(x)$ eta $F(x)$ I tarte batean definituta dauden bi funtzio. Baldin $F(x)$ funtzioaren deribatu-funtzioa existitzen bada, eta honako hau betetzen bada:

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x),$$

orduan, $F(x)$ funtzioa $f(x)$-ren jatorrizko funtzio bat da, edo $f(x)\,dx$ diferentzialaren integral-funtzio bat. Honako era honetan adierazten da:

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

1.2 Oinarrizko propietateak

1. Izan bitez $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ funtzioak. Orduan:

$$\int (f_1(x) + ... + f_n(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + ... + \int f_n(x)\,dx.$$

2. Izan bedi $a \in \mathbb{R}$ eta jatorrizkoa duen $f(x)$ funtzioa. Orduan,

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx.$$

3. $F(x)$ funtzioa $f(x)$-ren jatorrizko funtzio bat da, honako hau betetzen bada:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k, \text{non } k \in \mathbb{R}.$$

1.3 Berehalako integralak

x^n motako funtzioak:

1. $$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \text{non } n \neq -1.$$

2. $$\int x^{-1} dx = \ln x + k.$$

Funtzio esponentziala:

1. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k, \text{non } \ (a > 0)\,.$$

2. $$\int e^x dx = e^x + k.$$

Funtzio trigonometrikoak:

1. $$\int \sin x dx = -\cos x + k.$$

2. $$\int \cos x dx = \sin x + k.$$

3. $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + k.$$

4. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + k.$$

Funtzio hiperbolikoak:

1. $$\int \sinh x dx = \cosh x + k.$$

2. $$\int \cosh x dx = \sinh x + k.$$

3. $$\int \frac{1}{\cosh^2 x} dx = \tanh x + k.$$

4.
$$\int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = -\coth x + k.$$

5.
$$\int \tanh x dx = \ln(\cosh x) + k.$$

6.
$$\int \coth x dx = \ln(\sinh x) + k.$$

Alderantzizko funtzio trigonometrikoak:

1.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + k.$$

2.
$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + k.$$

3.
$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + k.$$

1.4 Aldagai-aldaketa

Honako integral honetan:
$$\int f(x)dx,$$
$x = g(t)$ aldagai-aldaketa egiten badugu, $dx = g'(t)dt$ beteko da, eta integrala honako era honetan geratuko da:
$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Aldagai-aldaketa egitearen helburua da lortzen den integrala hasierakoa baino errazagoa izatea.

Adibideak:

1.- $\int \sqrt{a-bx}dx$. Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:
$$u = a - bx \Rightarrow du = -bdx \tag{1.1}$$
Eta integrala honako era honetan geratuko da:
$$\int \sqrt{a-bx}dx = \frac{-1}{b}\int u^{1/2}du = -\frac{2u^{3/2}}{3b} + k = -\frac{2(a-bx)^{3/2}}{3b} + k. \tag{1.2}$$

2.- $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx. \tag{1.3}$$

Eta integrala honako era honetan geratuko da:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}dx = \arcsin u + k = \arcsin e^x + k. \tag{1.4}$$

1.5 Zatikako integrazioa

$u(x)$ eta $v(x)$ funtzioak emanik, diferentzialaren propietateak erabiliz honako berdintza hau betetzen da:

$$d(u \cdot v) = udv + vdu \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu. \tag{1.5}$$

Hortaz, honako berdintza hau betetzen da:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Adibideak:

3.- $\int x\sin(3x)dx$.

Honako era honetan definituko ditugu:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin(3x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3}\cos(3x) \end{cases} \tag{1.6}$$

Zatikako integrazioa aplikatuz, honako hau daukagu:

$$\begin{aligned} \int x\sin(3x)dx &= \frac{1}{3}x\cos(3x) - \int \frac{1}{3}\cos(3x)dx = \\ &= \frac{1}{9}\sin(3x) - \frac{1}{3}x\cos(3x) + k. \end{aligned} \tag{1.7}$$

4- $\int e^{2x}x^2dx$. Honako era honetan definituko ditugu:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases} \tag{1.8}$$

Eta zatikako integrazioa erabiliz, honako hau daukagu:

$$\int e^{2x}x^2dx = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \int \frac{1}{2}e^{2x}2xdx. \tag{1.9}$$

Eta berriro zatikako integrazioa aplikatuko dugu:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Honako hau lortuko da:

$$\begin{aligned} \int e^{2x}x^2dx &= \frac{1}{2}\left(e^{2x}x^2\right) - \left(\frac{1}{2}e^{2x}x - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx\right) = \\ &= \frac{1}{4}e^{2x}\left(2x^2 - 2x + 1\right) + k. \end{aligned} \tag{1.11}$$

5.- $\int x^3 \ln(2x)dx$.

Honako era honetan definituko ditugu:

$$\begin{cases} u = \ln(2x) \\ dv = x^3dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{1}{4}x^4. \end{cases} \tag{1.12}$$

Zatikako integrazioa aplikatuz, honako hau daukagu:

$$\int x^3 \ln(2x)dx = \frac{1}{4}x^4 \ln(2x) - \int \frac{x^4}{4x}dx = -\frac{x^4}{16} + \frac{1}{4}x^4 \ln(2x) + k. \tag{1.13}$$

6.- $\int e^{ax} \cos(bx)dx$

Honako era honetan definituko ditugu:

$$\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \cos(bx)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax}dx \\ v = \frac{1}{b}\sin(bx). \end{cases} \tag{1.14}$$

Zatikako integrazioa aplikatu ostean, honako hau lortuko da:

$$\int e^{ax} \cos(bx)dx = \frac{e^{ax}\sin(bx)}{b} - \int \frac{ae^{ax}\sin(bx)}{b}dx. \tag{1.15}$$

Berriro zatikako integrazioa aplikatuko dugu, aukeraketa honako era honetan eginez:

$$\begin{cases} u = e^{ax} \\ dv = \sin(bx)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ae^{ax}dx \\ v = -\frac{1}{b}\cos(bx). \end{cases} \tag{1.16}$$

Eta honako hau lortuko da:

$$\begin{aligned} &\int e^{ax} \cos(bx)dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos(bx)dx - \frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx)\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^2\int e^{ax}\cos(bx)dx = be^{ax}\sin(bx) + ae^{ax}\cos(bx) - a^2\int e^{ax}\cos(bx)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int e^{ax}\cos(bx)dx = \frac{e^{ax}(a\cos(bx) + b\sin(bx))}{a^2 + b^2} + k. \end{aligned}$$

1.6 Funtzio arrazionalen integrazioa

Funtzio arrazional bat $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ eta $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, non $a_0, a_1, \cdots a_n, b_0, b_1, \cdots b_m \in \mathbb{R}$ funtzio polinomikoen zatiketa baita:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}. \tag{1.17}$$

$n \geq m$ bada polinomio bien arteko zatiketa egingo dugu, eta emaitza honako era honetan adieraziko dugu:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Z(x) + \frac{H(X)}{Q(X)}, \tag{1.18}$$

non $Z(x)$ zatidura baita eta $H(x)$ hondarra, eta hondarraren maila $Q(x)$ polinomioaren maila baino txikiagoa izango da.

1.6.1 Erro erreal sinpleak

Honako funtzio arrazional hau era honetan deskonposatzen da:

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}. \tag{1.19}$$

Eta funtzio horren integrala honako hau da:

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}dx = \int \frac{A_1}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx = \\ = A\ln(x-a) + B\ln(x-b) + k.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Adibidea:

7.- $\frac{3x+5}{(x+2)(x-1)}$.

$$\frac{3x+5}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{3(x+2)} + \frac{8}{3(x-1)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{3x+5}{(x+2)(x-1)}dx = \frac{1}{3}\ln(x+2) + \frac{8}{3}\ln(1-x) + k.$$

1.6.2 Erro erreal anizkoitzak

Honako funtzio arrazional hau era honetan deskonposatzen da:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x-b)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{B}{x-b}. \tag{1.21}$$

Eta funtzio horren integrala honako hau da:

$$\int \frac{P(x)}{(x-a)^n(x-b)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{A_2}{(x-a)^2}dx + ...+ \\ + \int \frac{A_n}{(x-a)^n}dx + \int \frac{B}{x-b}dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{P(x)}{(x-a)^n(x-b)}dx = A_1 \ln(x-a) - \frac{A_2}{(x-a)} + ... + \frac{A_n}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + \\ + B\ln(x-b) + k.$$

Adibidea:

8.- $\int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)^2(x-3)}$

Honako era honetan deskonposa daiteke integrala:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+1)^2(x-3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3}$$

Zenbakitzaileak berdinduta, honako adierazpen hau daukagu:

$$x^2+1 = A_1(x-3)x(x+1)^2 + A_2(x-3)(x+1)^2 + B_1(x-3)x^2(x+1) + \\ + B_2x^2(x-3) + Cx^2(x+1)^2.$$

x aldagaiari balioak emanez, ekuazio linealetako sistema bat lortuko dugu. Eta handik a, b, c, d eta e ezezagunak lortuko ditugu:

$$A_1 = \frac{5}{9}, A_2 = -\frac{1}{3}, B_1 = -\frac{5}{8}, B_2 = -\frac{1}{2}, C = \frac{5}{72}.$$

Hortaz, funtzioa honako era honetan deskonposatuko da:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x+1)^2(x-3)} = -\frac{1}{3x^2} - \frac{5}{8(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{5}{9x} + \frac{5}{72(x-3)}.$$

Eta behin deskonposaketa daukagula, integrala kalkulatuko da:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x+1)^2(x-3)}dx = \frac{1}{72}\left(\frac{36}{x+1} + \frac{24}{x} + 5\ln(3-x) + 40\ln x - 45\ln(x+1)\right) + k.$$

1.6.3 Erro konplexu sinpleak

Funtzio arrazionaleko izendatzaileko polinomioaren deskonposaketan erro konplexu sinpleak dituen 2. mailako polinomio bat izanez gero, honako hau da deskonposaketa:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n(x-b)(x^2+px+q)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \\ + \frac{B}{x-b} + \frac{Cx+D}{x^2+px+q}.$$

Hortaz, integrala honako hau izango da:

$$\int \frac{P(x)}{(x-a)^n(x-b)(x^2+px+q)}dx = \int \frac{A_1}{x-a}dx + \int \frac{A_2}{(x-a)^2}dx + ... + \\ + \int \frac{A_n}{(x-a)^n}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx.$$

Eta mota honetako integralak egin beharko ditugu:

- $\int \frac{A_1}{x-a}dx = A_1 \ln(x-a)$ eta $\int \frac{B}{x-b}dx = B\ln(x-b)$.
- $\int \frac{A_k}{(x-a)^k} = \frac{A_k}{(x-a)^{k-1}}$, $k \neq 1$ bada.
- $\int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx =$

$$\int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx = \frac{C}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \int \frac{D-\frac{pC}{2}}{x^2+px+q}dx = \\ = \frac{C}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(D-\frac{pC}{2}\right)\int \frac{1}{(x-c)^2+d^2}dx = \\ = \frac{C}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{D-\frac{pC}{2}}{d^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-c}{d}\right)^2+1}dx.$$

Eta integral horretan $u = \frac{x-c}{d}$ aldagai-aldaketa eginez, $du = \frac{1}{d}du$, honako hau geratuko zaigu:

$$\frac{C}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{\left(D-\frac{pC}{2}\right)}{d}\int \frac{1}{u^2+1}du = \\ \frac{C}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{\left(D-\frac{pC}{2}\right)}{d}\arctan\left(\frac{x-c}{d}\right).$$

Adibidea:

9.- Egin honako integral hau: $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx$.

$x^2-6x+13$ erro konplexuetako polinomioa da. Haren erroak dira $x_1 = 3-2i$ eta $x_2 = 3+2i$. Polinomioa honako era honetan idatz daiteke:

$$x^2-6x+13 = (x-3)^2+2^2.$$

Eta eskatzen diguten integralaren garapena honako hau da:

$$\int \frac{2x-1}{x^2-6x+13}dx = \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx + \int \frac{6-1}{x^2-6x+13}dx = \\ = \ln\left(x^2-6x+13\right) + 5\int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}dx = \\ = \ln\left(x^2-6x+13\right) + \frac{5}{2^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+1}dx.$$

$u = \frac{x-3}{2}$ aldagai-aldaketa egingo dugu. Hortaz, $du = \frac{dx}{2}$ izango da. Eta aldagai-aldaketa integralean ordezkatuz, honako hau daukagu:

$$\ln\left(x^2-6x+13\right)+\frac{5}{2}\int\frac{1}{u^2+1}du = \\ = \ln\left(x^2-6x+13\right)+\frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)+k.$$

1.6.4 Erro konplexu anizkoitzak

Izan bedi honako integral hau:

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx.$$

Bere emaitza honako hau dela frogatuko dugu:

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+k.$$

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:

$$x=a\tan t\Rightarrow dx=a(1+\tan^2 t)dt$$

Goiko aldagai-aldaketa hori kontuan hartuta, honako hauek dira $\sin t$ eta $\cos t$ funtzioen adierazpenak:

$$\begin{cases}\sin t=\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}},\\ \cos t=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.\end{cases}$$

Beraz, aldagai-aldaketa hori kontuan hartuta, honako era honetan geratuko da integrala:

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^3}\int\frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2}dt=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t dt= \\ =\frac{1}{a^3}\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{a^3}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)= \\ =\frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2}+k.$$

Hortaz, frogatuta geratuko da honako berdintza hau:

$$\int\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+k.$$

1.7 Funtzio trigonometrikoen integrazioa

Atal honetan, funtzio trigonometrikoak agertzen diren integralak ebatziko ditugu. Ezer baino lehen, garrantzitsua da honako erlazio hauek gogoratzea:

$$\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \sin^2(2x) = 2\sin x \cos x, \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \\ \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}. \end{cases}$$

Integral trigonometrikoen barruan zenbait kasu bereiziko ditugu.

1.7.1 Aldagai-aldaketa unibertsala

Aldagai-aldaketa unibertsala honako hau da:

$$\begin{cases} \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt. \end{cases} \end{cases}$$

Eta beti da posible aplikatzea.

Adibidea:

10.- $\int \frac{1}{\sin x+1}$

Aipatu dugun aldagai-aldaketa aplikatuz, honako hau lortzen da:

$$\int \frac{1}{\sin x + 1}dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+1} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t^2+2t+1}dt = \\ = 2\int \frac{1}{(1+t)^2}dt = \frac{-2}{(1+t)} = \frac{-2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + k.$$

1.7.2 Funtzioa bikoitia da $\sin x$ eta $\cos x$ funtzioetan

Kasu honetan, honako aldagai-aldaketa orokor hau egingo dugu:

$$\begin{cases} \tan x = t \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}. \end{cases} \end{cases}$$

Adibidea:

11.- $\int \frac{2}{\sin^2 x+2}dx$

Aldagai-aldaketa orokorra eginez, honako hau daukagu:

$$\int \frac{2}{\sin^2 x + 2} dx = \int \frac{2}{\left(\frac{t^2}{1+t^2} + 2\right)(1+t^2)} dt = \int \frac{2}{2+3t^2} dt =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}} t\right) + k = \sqrt{\frac{2}{3}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \tan x\right) + k.$$

1.7.3 Funtzioa bakoitia da $\sin x$ edo $\cos x$ funtzioetan

- Funtzioa $\sin x$ funtzioan bakoitia denean, honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt.$$

Adibidea:

12.- $\int \sin^5 x dx$.

$$\int \sin^5(x) dx = \int \sin^4(x) \sin(x) dx = \int \sin(x) \left(1 - \cos^2(x)\right)^2 dx =$$
$$= -\int \left(1 - t^2\right)^2 dt = -\int \left(t^4 - 2t^2 + 1\right) dt =$$
$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t + k = \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{\cos^5 x}{5} - \cos x + k.$$

- Funtzioa $\cos x$ funtzioan bakoitia denean, honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:

$$\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt.$$

Adibidea:

13.- $\int \frac{\cos x}{2\sin x - \cos^2 x + 1} dx$.

Aldagai-aldaketa eginez, honako integral honetara iritsiko gara:

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x - \cos^2 x + 1} dx = \int \frac{dt}{2t + t^2}$$

Irten den funtzio arrazionala honako era honetan deskonposa daiteke:

$$\frac{1}{t^2 + 2t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+2} = \frac{1}{2t} - \frac{1}{2(t+2)}.$$

Eta deskonposaketa hori kontuan hartuz egingo dugu integrala:

$$\int \frac{dt}{2t + t^2} = \int \frac{1}{2t} dt - \int \frac{1}{2(t+2)} dt = \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{2}\ln(t+2) + k.$$

Aldagai-aldaketa desegitea bakarrik geratzen zaigu:

$$\int \frac{\cos x}{2\sin x - \cos^2 x + 1} dx = \frac{1}{2}\ln(\sin x) - \frac{1}{2}\ln(\sin x + 2) + k.$$

1.7.4 Erabilgarriak diren zenbait formula

- $I(m,n)=\int \cos^m x \sin^n x dx$ motako integralean zatikako integrazioa aplikatuz gero, honako adierazpen hauetako batera iritsiko gara:

  a) $\sin x$ funtzioaren berretzailea txikitzen denean, honako hau lortuko dugu:

$$I(m,n)=\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2)-\frac{1}{m+n}\cos^{m+1}x\sin^{n-1}x.$$

  b) Eta $\cos x$ funtzioaren berretzailea txikitzen denean, beste hau lortuko dugu:

$$I(m,n)=\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)+\frac{1}{m+n}\cos^{m-1}x\sin^{n+1}x.$$

- $\sin mx$ eta $\cos nx$ funtzioen arteko biderketen integrazioan honako berdintza hauek erabil daitezke:

$$\begin{cases}\sin(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left(\sin((m+n)x)+\sin((m-n)x)\right),\\ \cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos((m+n)x)+\cos((m-n)x)\right),\\ \sin(mx)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left(\cos((m-n)x)-\cos((m+n)x)\right),\end{cases}$$

  Horiek kontuan hartuta, honako emaitza hauek lortzen dira:

$$\begin{cases}\int\sin(mx)\cos(nx)dx=\frac{-\cos(m-n)x}{2(m-n)}-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)},\\ \int\cos(mx)\cos(nx)dx=\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)},\\ \int\sin(mx)\sin(nx)dx=\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}-\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)},\end{cases}$$

Adibideak:

14.- $\int \sin(3x)\cos(12x)dx$.

$$\int \sin(3x)\cos(12x)dx=\frac{1}{18}\cos(9x)-\frac{1}{30}\cos(15x)+k.$$

15.- $\int \cos(15x)\cos(3x)dx$.

$$\int \cos(15x)\cos(3x)dx=\frac{1}{24}\sin(12x)+\frac{1}{36}\sin(18x)+k.$$

16.- $\int \sin(2x)\sin(3x)dx$.

$$\int \sin(2x)\sin(3x)dx=\frac{\sin(x)}{2}-\frac{1}{10}\sin(5x)+k.$$

1.8 Funtzio irrazionalen integrazioa

Helburua da aldagai-aldaketa egokia eginez ematen diguten integral irrazionala integral arrazional bihurtzea.

Zenbait mota bereiziko ditugu.

- **I motakoak.** $\int R\left(x^{m/n}, x^{p/q}, x^{r/s}, ...\right) dx$ motako integralak. Egin beharreko aldagai-aldaketa honako hau da:

$$x = t^{\alpha},\ \text{non } \alpha = m.k.t.(n, p, s, ...) \Rightarrow dx = \alpha t^{\alpha-1} dt.$$

Hau da, α berretzaileen izendatzaileen multiplo komunetako txikiena da. Aldaketa horrek integrala arrazional bihurtzen du.

Adibideak:

17.- $\int \frac{2}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} dx$.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3 dt$.

$$\int \frac{2}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} dx = \int \frac{2}{3t+t^2} 4t^3 dt = \int \frac{8t^2}{3+t} dt.$$

t aldagaian arrazionala den funtzioa geratzen zaigu. Zenbakitzailearen maila izendatzailearena baino handiagoa denez, zatiketa egingo dugu:

$$\frac{8t^2}{3+t} = 8t - 24 + \frac{72}{t+3}.$$

Eta integrala honela geratuko zaigu:

$$\int \frac{8t^2}{3+t} dt = \int (8t - 24 + \frac{72}{t+3}) dt = 4t^2 - 24t + 72\ln(t+3) + k.$$

Eta amaitzeko, aldagai-aldaketa desegin behar da:

$$\int \frac{2}{3\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}} dx = 4\sqrt{x} - 24\sqrt[4]{x} + 72\ln(\sqrt[4]{x}+3) + k.$$

- **II motakoak.** $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}, ...\right) dx$ motako integralak. Egin beharreko aldagai-aldaketa honako hau da:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = t^{\alpha},\ non\ \alpha = m.k.t.(n, p, s, ...) \Rightarrow x = \frac{dt^{\alpha} - b}{a - ct^{\alpha}}.$$

Aldaketa horrek ere integral irrazionala arrazional bihurtzen du.

Adibideak:

18.- $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} dx$.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:

$$\frac{1-x}{x+1} = t^2 \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt.$$

Horrela, honela geratzen da integrala:

$$I = \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}dx = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}t\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = \int \frac{-4t^2}{(1-t^2)(1+t^2)}dt.$$

Aurreko integrala arrazionala da t aldagaian, eta bi erro erreal sinple eta erro konplexu bat ditu. Honako era honetan deskonposa daiteke:

$$\frac{-4t^2}{(1-t^2)(t^2+1)} = \frac{2}{t^2+1} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}.$$

Integrala eginez, honako emaitza hau lortzen da:

$$\int \left(\frac{2}{t^2+1} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right)dt = 4\left(\frac{1}{4}\ln(1-t) - \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{1}{2}\arctan t\right).$$

Eta aldagai-aldaketa desegitean, $t = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$, emaitza honako hau da:

$$I = \ln\left(1 - \sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right) - \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} + 1\right) + 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\right) + k.$$

- **III motakoak.** Integral binomikoa: $I = \int x^m (a+bx^n)^p\,dx$, non a eta b konstanteak baitira, eta m, n eta p zenbaki arrazionalak.

  Honako aldagai-aldaketa hau egingo da:

  $$x^n = t \Rightarrow x = t^{1/n} \Rightarrow dx = \frac{1}{n}t^{(1-n)/n}dt.$$

  Eta integralak itxura hau hartuko du: $\frac{1}{n}\int t^q(a+bt)^p dt$, $q = \frac{m-n+1}{n}$ izanik.

  a) motakoak: p zenbaki osoa denean: $I = \int R(t, t^q)\,dt$ integrala aurretik aztertutako I motakoa da.

  Adibideak:

  19.- $\int \frac{x^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$.

  Honako integral hau daukagu:

  $$I = \int \frac{x^2}{(\sqrt{x}+2)^2}\,dx = \int x^2\left(x^{1/2}+2\right)^{-2}dx.$$

  Aldagai-aldaketa egingo dugu: $x^{1/2} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$, eta integrala honako era honetan geratuko da:

  $$I = 2\int t^5(t+2)^{-2}dx = \int \frac{t^5}{(t+2)^2}dt.$$

Goiko integrala arrazionala da t aldagaian, eta honako era honetan deskonposatzen da:

$$\int \left(t^3 - 4t^2 + 12t + \frac{80}{t+2} - \frac{32}{(t+2)^2} - 32\right) dt = \\ = \frac{t^4}{4} - \frac{4t^3}{3} + 6t^2 - 32t + \frac{32}{t+2} + 80\ln(t+2).$$

Aldagai-aldaketa desegingo dugu $t = x^{1/2}$ azken emaitza lortzeko:

$$I = -\frac{1}{3}4x^{3/2} + \frac{x^2}{4} + 6x - 32\sqrt{x} + \frac{32}{\sqrt{x}+2} + 80\ln\left(\sqrt{x}+2\right).$$

b) motakoak: q zenbaki osoa denean: $I = \int R\left(t, (a+bt)^p\right) dt$ integrala aurretik aztertutako II motakoa da.

Adibideak:

20.- $I = \int x^3 \left(1 + x^{2/3}\right)^{1/2} dx$.

Aldagai-aldaketa egingo dugu: $x^{2/3} = t \Rightarrow x = t^{3/2} \Rightarrow dx = \frac{3}{2}t^{1/2}dt$, eta integrala honako era honetan geratuko da:

$$I = \frac{3}{2}\int t^5(t+1)^{1/2}dt.$$

Beste aldagai-aldaketa bat egingo dugu: $1+t = z^2 \Rightarrow t = z^2-1 \Rightarrow dt = 2zdz$:

$$I = \frac{3}{2}\int t^5(t+1)^{1/2}dt = \frac{3}{2}\int 2\left(z^2-1\right)^5 z^2 dt = \\ = \frac{3}{2}\int \left(2z^{12} - 10z^{10} + 20z^8 - 20z^6 + 10z^4 - 2z^2\right) dz = \\ = \frac{3z^{13}}{13} - \frac{15z^{11}}{11} + \frac{10z^9}{3} - \frac{30z^7}{7} + 3z^5 - z^3.$$

Aldagai-aldaketa desegingo dugu $z = \sqrt{t+1}$:

$$I = -(t+1)^{3/2} + 3(t+1)^{5/2} - \frac{30}{7}(t+1)^{7/2} + \frac{10}{3}(t+1)^{9/2} - \frac{15}{11}(t+1)^{11/2} + \frac{3}{13}(t+1)^{13/2}.$$

Eta lehenengo egin dugun aldagai-aldaketa deseginez, $t = x^{2/3}$ azken emaitza lortuko dugu:

$$I = -\left(x^{2/3}+1\right)^{3/2} + 3\left(x^{2/3}+1\right)^{5/2} - \frac{30}{7}\left(x^{2/3}+1\right)^{7/2} + \frac{10}{3}\left(x^{2/3}+1\right)^{9/2} \\ - \frac{15}{11}\left(x^{2/3}+1\right)^{11/2} + \frac{3}{13}\left(x^{2/3}+1\right)^{13/2}.$$

c) motakoak: $p+q$ zenbaki osoa denean: $I = \int t^{p+q}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$ integrala aurretik aztertutako II motakoa da.

Adibideak:

21.- $\int x^2 \left(1-2x^2\right)^{-3/2} dx$.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $x^2 = t \Rightarrow x = t^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}$:

$$I = \frac{1}{2}\int t(1-2t)^{-3/2}t^{-1/2}dt = \frac{1}{2}\int t^{1/2}(1-2t)^{-3/2}dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int t^{1/2}t^{-3/2}\left(\frac{1-2t}{t}\right)^{-3/2} dt.$$

Eragiketak eginez, honako integral hau daukagu:

$$I = \frac{1}{2}\int t^{-1}\left(\frac{1-2t}{t}\right)^{-3/2} dt.$$

Goiko integrala II motako integral irrazionala da, eta dagokion aldagai-aldaketa egingo dugu: $\frac{1-2t}{t} = z^2 \Rightarrow t = \frac{1}{z^2+2} \Rightarrow dt = \frac{-2z}{(z^2+2)^2}dz$:

$$I = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{z^2+2}\right)^{-1} z^{-3/2}\frac{-2z}{\left(z^2+2\right)^2}dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int -\frac{2}{z^2\left(z^2+2\right)}dz = \int\left(\frac{1}{z^2+2} - \frac{1}{z^2}\right)dz =$$
$$= -2\left(-\frac{1}{2z} - \frac{\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}}\right).$$

Aldagai-aldaketa desegingo dugu: $z = \sqrt{\frac{1-2t}{t}}$:

$$I = \frac{t^{1/2}\sqrt{1-2t}}{1-2t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-2t}{t}}\right).$$

Eta lehenengo egin dugun aldagai-aldaketa deseginez helduko gara azken emaitzara, $t = x^2$:

$$I = \frac{x\sqrt{1-2x^2}}{1-2x^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1-2x^2}{x^2}}\right).$$

- **IV motakoak.** $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ motako integralak.

  ax^2+bx+c adierazpena karratu perfektuen batuketa gisa adieraziko dugu. Haren erroak honako hauek izango dira:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Erroak errealak direnean, $x_1 = p+q$ eta $x_2 = p-q$ gisa idatz daitezke, $p = \frac{-b}{2a}$ eta $q = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ izanik. Eta ax^2+bx+c adierazpena, p eta q aldagaien menpe, era honetan idatzita geratuko da:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = a((x-p)+q)((x-p)-q) = a\left((x-p)^2-q^2\right).$$

Erroak konplexuak direnean, $x_1 = p+iq$ eta $x_2 = p-iq$ gisa idatz daitezke, $p = \frac{-b}{2a}$ eta $q = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ izanik (p eta q lehengo berberak dira). Eta ax^2+bx+c adierazpena, p eta q aldagaien menpe, era honetan idatzita geratuko da:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = a\left((x-p)^2+q^2\right).$$

Kasu batean zein bestean $z = x-p$ aldagai-aldaketa egingo dugu, eta honako kasu hauek bereiziko dira:

- $\sqrt{q^2+z^2}$ erro konplexuak agertzen direnean.
- $\sqrt{z^2-q^2}$ erro errealak direnean eta $a>0$ denean.
- $\sqrt{q^2-z^2}$ erro errealak direnean eta $a<0$ denean.

Eta aldagai-aldaketa trigonometrikoa edo hiperbolikoa egin beharko da.

- $\sqrt{q^2+z^2}$ daukagunean, aldagai-aldaketa honako hau izango da: $z = q\sinh t$ edo $z = q\tan t$.
- $\sqrt{z^2-q^2}$ daukagunean, aldagai-aldaketa honako hau izango da: $z = \frac{q}{\cos t}$ edo $z = q\cosh t$.
- $\sqrt{q^2-z^2}$ daukagunean, aldagai-aldaketa honako hau izango da: $z = q\sin t$ edo $z = q\tanh t$.

Adibideak:

22.- $I = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $x = a\sin(t) \Rightarrow dx = a\cos(t)dt$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \int a^2\cos^2 t dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right) = \\ = a^2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}a^2(t+\sin t\cos t) = \\ = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)+k.\end{aligned}$$

23.- $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $x = a\sinh(t) \Rightarrow dx = a\cosh(t)dt$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \frac{a^2\sinh^2 t}{a\cosh(t)}a\cosh(t)dt = a^2\int \sinh^2 t dt =$$
$$= a^2\int \frac{\cosh 2t - 1}{2}dt = a^2\left(\frac{1}{4}\sinh 2t - \frac{1}{2}t\right) =$$
$$= \frac{1}{2}a^2(\sinh t\cosh t - t) = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} - \frac{1}{2}a^2\text{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + k.$$

Oharra:

$$\cosh t = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2+a^2}.$$

24.- $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $x = a\cosh(t) \Rightarrow dx = a\sinh(t)dt$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int \frac{a^2\cosh^2 t\cdot a\sinh(t)}{a\sinh(t)}dt = a^2\int \cosh^2 t dt =$$
$$= a^2\int \frac{\cosh(2t)+1}{2}dt = a^2\left(\frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{1}{2}t\right) =$$
$$= \frac{1}{2}a^2(\sinh t\cosh t + t) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} + \frac{1}{2}a^2\text{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right) + k.$$

Oharra:

$$\sinh t = \sqrt{\cosh^2 t - 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

25.- $I = \int \sqrt{x^2+6x+12}dx$.

$x^2+6x+12 = 0$ ekuazioaren erroak dira: $x_1 = -3-i\sqrt{3}$ eta $x_2 = -3+i\sqrt{3}$. Eta, beraz, $x^2+6x+12 = (x-p)^2+q^2$, $p=-3$ eta $q=\sqrt{3}$ izanik. Orain, honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu $z = x-p \Rightarrow dz = dx$:

$$\int \sqrt{x^2+6x+12}dx = \int \sqrt{q^2+z^2}dz.$$

Bigarren aldagai-aldaketa egingo dugu: $z = q\sinh t \Rightarrow dz = q\cosh t dt$:

$$\int \sqrt{q^2+z^2}dz = \int q^2\cosh^2 t dt = q^2\int \frac{\cosh(2t)+1}{2}dt =$$
$$= q^2\left(\frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{1}{2}t\right) = \frac{1}{2}q^2(\sinh t\cosh t + t) =$$
$$= \frac{1}{2}\left((x+3)\sqrt{x^2+6x+12} + 3\text{arcsinh}\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)\right) + k =$$
$$= \frac{1}{2}\left((x+3)\sqrt{x^2+6x+12} + 3 + k.\right.$$

1.9 Ordenagailuko praktikak

1.1 ariketa. $f(x) = \sin(2x)$ funtzioa emanik, kalkulatu $\int 3\sin(2x)dx$ integrala zuzenean, eta eskalar baten eta funtzio baten biderketaren propietatea erabilita. Ziurtatu bi emaitzak bat datozela.

```
f[x_] = Sin[2x]
```

Sin[2x]

$\int 3\sin(2x)dx$ integrala zuzenean kalkulatuko dugu:

```
zuzena = Integrate[(3 * f[x]), x]
```

$-\frac{3}{2}$Cos[2x]

Orain, funtzioaren integrala kalkulatuko dugu lehendabizi, eta, gero, konstanteaz biderkatuko dugu:

```
i1 = Integrate[f[x], x]
```

$-\frac{1}{2}$Cos[2x]

```
propietatea = 3 * i1
```

$-\frac{3}{2}$Cos[2x]

Eta emaitza biak bat datozela ikus daiteke.

1.2 ariketa. Kalkulatu $\int \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2+4}dx$ integrala aldagai-aldaketa erabilita:

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $u = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{2dx}{x^2+4}$:

$$\int \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int udu + k = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2} + k = \frac{1}{4}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + k.$$

Mathematica programa erabiliz, emaitza bera lortzen dela ikusiko dugu:

```
f[x_] = ArcTan[x/2]/(x^2 + 4);
Integrate[f[x], x]
```

$\frac{1}{4}\text{ArcTan}\left[\frac{x}{2}\right]^2$

1.3 ariketa. Kalkulatu $\int \frac{1}{x \ln x} dx$ integrala aldagai-aldaketa erabilita. Ziurtatu emaitza Mathematica erabilita.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$:

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u + k = \ln(\ln x) + k.$$

Mathematica programa erabiliz, emaitza bera lortzen dela ikusiko dugu:

```
f[x_] = 1/(x * Log[x]);
Integrate[f[x], x]
```

Log[Log[x]]

1.4 ariketa. Kalkulatu $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+1}} dx$ integrala aldagai-aldaketa erabilita. Ziurtatu emaitza Mathematica erabilita.

Honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu: $u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+1}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} du = \frac{1}{3}\text{arcsinh}(u) + k = \frac{1}{3}\text{arcsinh}\left(x^3\right) + k$$

Mathematica programa erabiliz, emaitza bera lortzen dela ikusiko dugu:

```
f[x_] = x^2/Sqrt[x^6+1];
Integrate[f[x],x]
```

$\frac{\text{ArcSinh}\left[x^3\right]}{3}$

1.5 ariketa. Kalkulatu $\int x \sin(3x) dx$ integrala Mathematica erabilita.

```
f[x_] = x * Sin[3 * x];
Integrate[f[x], x]
```

$$-\frac{1}{3}x\text{Cos}[3x] + \frac{1}{9}\text{Sin}[3x]$$

1.6 ariketa. Kalkulatu $\int x^3|ln(2x)dx$ integrala Mathematica erabilita.

```
f[x_] = x^3 * Log[2 * x];
Integrate[f[x], x]
```

$$-\frac{x^4}{16} + \frac{1}{4}x^4\text{Log}[2x]$$

1.7 ariketa. Kalkulatu $\int \frac{2x+1}{x^2-6x+13}dx$ integrala Mathematica erabilita.

```
∫ (2x+1)/(x^2-6x+13) dx
```

$$\frac{7}{2}\text{ArcTan}\left[\frac{1}{2}(-3+x)\right] + \text{Log}\left[13 - 6x + x^2\right]$$

1.8 ariketa. Kalkulatu $\int \frac{2}{\sin^2 x+2}dx$ integrala Mathematica erabilita.

```
f[x_] = 2/(Sin[x])^2+2;
∫ f[x] dx
```

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\text{ArcTan}\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\text{Tan}[x]\right]$$

1.9 ariketa. Kalkulatu $\int \frac{x^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$ integrala Mathematica erabilita.

```
f[x_] = x^2/(√x+2)^2;
∫ f[x] dx
```

$$\frac{64}{2+\sqrt{x}} - 64\sqrt{x} + 12x - \frac{8x^{3/2}}{3} + \frac{x^2}{2} + 160\text{Log}\left[2+\sqrt{x}\right]$$

2. kapitulua

Integral mugatua

Kapitulu honetan, integral mugatuak, Riemannen integral gisa ere ezagutzen direnak, landuko ditugu. Lehenik eta behin, Riemannen integralarekin lanean arituko gara. Goi- eta behe-baturak, Riemannen integralak eta Riemannen baturak definituko ditugu. Ondoren, zenbait teorema garrantzitsu azalduko ditugu. Gero, integral mugatuak kalkulatzeko, Barrowren erregela aurkeztuko dugu. Eta bukatzeko, integral inpropioak definituko ditugu.

2.1 Riemannen integrala

2.1.1 Goi-batura eta behe-batura

Izan bedi $y = f(x)$ funtzio bornatu bat $[a, b] \in \mathbb{R}$ tartean. $f(x)$ funtzioak, OX ardatzak eta $x = a$ eta $x = b$ zuzenek mugatzen duten esparruaren azalera kalkulatzen saiatuko gara, A gisa denotatuko duguna.

f funtzioa bornatua dagoenez $\exists m, M \in \mathbb{R}$ non $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$. m eta M balioei funtzioaren infimoa eta supremoa deritze, hurrenez hurren. Balio horiekin A azaleraren goi- eta behe-mugak lor ditzakegu:

$$m(b - a) \leq A \leq M(b - a).$$

Izan bedi $P_n = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ $[a, b]$ tartearen partiketa bat. Edozein $[x_i, x_{i+1}]$ azpitarterentzat $\exists m_i, M_i$ infimoa eta supremoa, non honako hau betetzen baita:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M.$$

Gainera, tarte bakoitzari dagokion azalera mugatu dezakegu infimoa eta supremoa erabiliz:

$$m_i(x_{i+1} - x_i) \leq A_i \leq M_i(x_{i+1} - x_i).$$

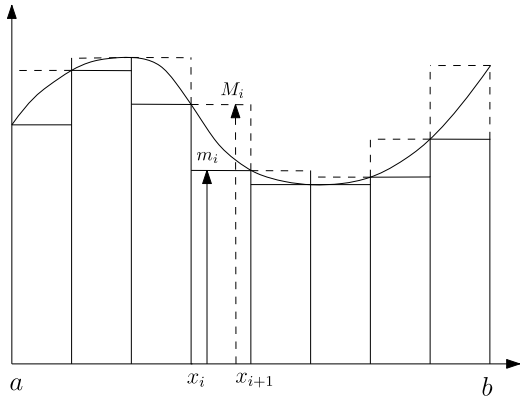
Beraz, $[x_i, x_{i+1}]$ tarte guztien azalerak batzen baldin baditugu, A azaleraren goi- eta behe-muga zehatzagoak lor ditzakegu:

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \leq A_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Definizioa. P_n partiketa bati dagozkion goi-batura eta behe-batura honako modu honetan definitzen dira:

- Behe-batura: $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i)$.
- Goi-batura: $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$.

s_n deitu dugun batura $f(x)$ kurbaren azpitik dauden laukizuzenen azaleren batura da. Aldiz, S_n $f(x)$ kurbaren gainetik dauden laukizuzenen azaleren batura da. Edozein P_n partiketarentzat $s_n \leq A \leq S_n$ betetzen da. 2.1 irudian, egoera honen adibide bat daukagu.



2.1 irudia. Goi- eta behe-baturen adibideak.

Demagun P_n partiketari puntu bat gehitzen diogula, adibidez x_i':

$$P_{n+1} = \{a = x_0, x_1, \cdots x_i, x_i', x_{i+1}, \cdots, x_n = b\}.$$

s_{n+1} eta S_{n+1} baldin badira P_{n+1} partiketaren behe- eta goi-baturak, honako hau betetzen da:

$$s_n \leq s_{n+1} \leq A \leq S_{n+1} \leq S_n.$$

Beraz, edozein partiketaren behe-batura beste edozein partiketaren goi-batura baino txikiagoa izango da.

2.1.2 Riemannen integralaren definizioa

Izan bedi P_n $[a, b]$ tartearen partiketa bat, eta s_n eta S_n f funtzioari dagozkion behe- eta goi-baturak. Orduan:

1. Edozein P_n partiketarako honako hau betetzen da:

$$s_n \leq A \leq S_n.$$

2. Baldin eta P_m partiketa bat existitzen bada non $P_n \subset P_m$, honako hau betetzen da:

$$s_n \leq s_m \leq A \leq S_m \leq S_n.$$

3. f funtzioa jarraitua baldin bada $[a, b]$ tartean, existitzen da s supremo bat behe-batura guztiak bornatzen dituena. Modu berean, existitzen da S infimo bat goi-batura guztiak bornatzen dituena:

$$s_n \leq s \leq A \leq S \leq S_n.$$

4. f funtzioa jarraitua baldin bada $[a, b]$ tartean, orduan:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R} : |s_n - S_n| < \epsilon.$$

Eta baldintza horrekin froga daiteke behe-baturaren s supremoak eta goi-baturaren S infimoak honako hau betetzen dutela:

$$s = A = S.$$

Beraz, $f(x)$ funtzioaren Riemannen integrala $[a, b]$ tartean, honako modu honetan definitzen da:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$f(x) \geq 0$ baldin bada $[a, b]$ tartean, integral honen balioa da funtzioak berak, OX ardatzak eta $x = a$ eta $x = b$ zuzenek mugatzen duten esparruaren azalera.

Propietateak

Izan bedi $f(x)$ $[a, b]$ tartean definituta dagoen funtzio bornatu bat. Orduan, honako propietate hauek betetzen dira:

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$
- $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

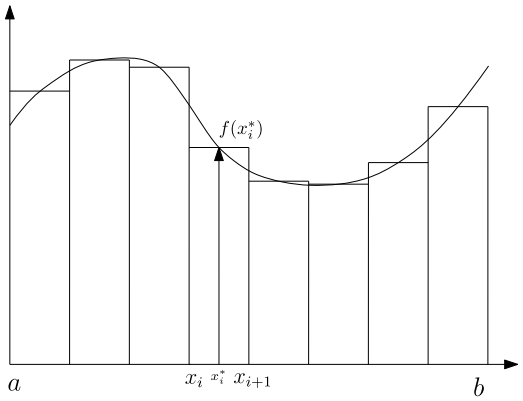
2.1.3 Riemannen baturak

Izan bitez $f(x)$ funtzio jarraitu bat $[a,b]$ tartean eta P_n $[a,b]$ tartearen partiketa bat. Goi- eta behe-baturak definitzerako orduan, $[x_i, x_{i+1}]$ tarte bakoitzerako haren m_i infimoa edo M_i supremoa hartu ditugu lehen. Orain, integrala hurbiltzeko tartearen erdiko puntua hartuko dugu, x_i^* denotatuko duguna, eta bere $f(x_i^*)$ irudia erabiliko dugu. 2.2 irudian egoera honen adibide bat ikus daiteke.

Beraz, integrala modu honetan hurbil dezakegu:

$$A \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_i,$$

non $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ baita. Batura hori Riemannen batura gisa ezagutzen da.



2.2 irudia. Riemannen baturaren adibidea.

$[a,b]$ tartearen partiketa gero eta finagoa egiten baldin badugu, lortuko dugun integralaren hurbilpena gero eta hobea izango da. Beraz, partiketa infinitesimal batera baldin bagoaz ($\Delta x_i \to 0$):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_i.$$

2.2 Teorema garrantzitsuak

2.2.1 Batez besteko balioaren teorema integral mugatuetarako

Izan bedi $f(x)$ funtzio jarraitu bat $[a,b]$ tartean. Orduan, existitzen dira m eta M balioak non:

$$\forall x \in [a,b] : m \leq f(x) \leq M.$$

Ondorioz, badakigu honako hau betetzen dela:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx \leq M.$$

Beraz, existitzen da c balio bat non:

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema. $f(x)$ funtzioa jarraitua baldin bada $[a,b]$ tartean, existitzen da $c \in [a,b]$ balio bat non:

$$\int_a^b f(x) = f(c)(b-a).$$

2.2.2 Barrowren teorema

Izan bedi $f(x)$ funtzio jarraitu bat $[a,b]$ tartean. Orduan, $f(x)$ funtzioaren integrala existitzen da $[a,X]$ tartean, non $X \in [a,b]$:

$$F(X) = \int_a^X f(x)\,dx.$$

$F(X)$ aldagai errealeko funtzio bat da.

Teorema. $f(x)$ funtzioa jarraitua bada $[a,b]$ tartean, $F(X) = \int_a^X f(x)\,dx$ gisa definitzen den funtzioa $f(x)$ funtzioaren jatorrizkoa da, hau da, $F'(x) = f(x)$.

2.3 Barrowren erregela

Suposa dezagun ezagutzen dugula $f(x)$ funtzioaren jatorrizko funtzioa den $G(X)$ funtzioa. Funtzio hori $F(X)$ funtziotik konstante batean desberdinduko litzateke: $F(X) = G(X) + k$. Izan ere, bi funtzioak $f(x)$-ren jatorrizkoak dira: $f(x) = F'(X) = (G(X)+k)' = G'(X)$.

Barrowren teoremaren berdintza $X \in [a,b]$ balio guztietarako bete behar da. Bereziki, $X = a$ kasurako. Beraz,

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 = G(a) + k \Rightarrow G(a) = -k.$$

Ondorioz, Barrowren erregela definitu dezakegu. Izan bedi $f(x)$ funtzio jarraitu bat $[a,b]$ tartean. $F(X)$ funtzioa $f(x)$-ren jatorrizkoa baldin bada, orduan:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Barrowren erregelak integral mugatuak kalkulatzeko modu bat ematen digu, jatorrizko funtzioak erabilita.

Adibidea. Kalkulatu $\int_0^1 (x^2+2x+3)\,dx$ integral mugatua.

Lehenik eta behin, $f(x)=x^2+2x+3$ funtzioaren jatorrizko funtzioa kalkulatuko dugu, non $F'(x)=f(x)$ betetzen baita:

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+3x.$$

Eta orain, Barrowren erregela aplika dezakegu integrala kalkulatzeko:

$$\int_0^1 (x^2+2x+3)\,dx = F(1)-F(0)=\frac{1}{3}+1+3-0=\frac{13}{3}.$$

2.4 Integral inpropioak

Integral inpropioa da integratu beharreko $f(x)$ funtzioa $[a,b]$ tartean bornatua ez dagoenean edo integratu beharreko eremua ez dagoenean mugatua.

2.4.1 Funtzio bornagabea

- $f(x)$ funtzioak infinitu balioa hartzen baldin badu $x=b$ puntuan, bere integral mugatua honako era honetan definitzen da:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx.$$

- $f(x)$ funtzioak infinitu balioa hartzen baldin badu $x=a$ puntuan, bere integral mugatua honako era honetan definitzen da:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx.$$

- $f(x)$ funtzioak infinitu balioa hartzen baldin badu $c\in(a,b)$ puntuan, bere integral mugatua honako era honetan definitzen da:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx+\lim_{\epsilon\to 0}\int_{c+\epsilon}^b f(x)\,dx.$$

Definitu ditugun limiteek balio errealak hartzen baldin badituzte, integrala konbergentea dela esango dugu. Kontrako kasuan, integrala dibergentea dela esango dugu.

Adibidea. Kalkulatu $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ integral mugatua.

Kasu honetan, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ funtzioa bornagabea da $x=3$ puntuan. Beraz, integrala kalkulatzeko honako limite hau erabili behar dugu:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{3-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}=\lim_{\epsilon\to 0}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=3-\epsilon}=\arcsin(1)-\arcsin(0)=\frac{\pi}{2}.$$

2.4.2 Eremu mugagabea

- $(-\infty, b]$ tarte mugagabearen integral mugatua honako era honetan definitzen da:
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$
- $[a, \infty)$ tarte mugagabearen integral mugatua honako era honetan definitzen da:
$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$
- $(-\infty, \infty)$ tarte mugagabearen integral mugatua honako era honetan definitzen da:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

Aurreko kasuan bezala, definitu ditugun limiteek balio errealak hartzen baldin badituzte, integrala konbergentea dela esango dugu. Hori gertatu ezik, integrala dibergentea dela esango dugu.

Adibidea. Kalkulatu $\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx$ integrala.

Kasu honetan, integrazio-eremua ez dago mugatua. Beraz, integrala kalkulatzeko honako limite hau kalkulatu behar da:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2} e^{2x}\Big|_{x=a}^{x=0} = \frac{1}{2}.$$

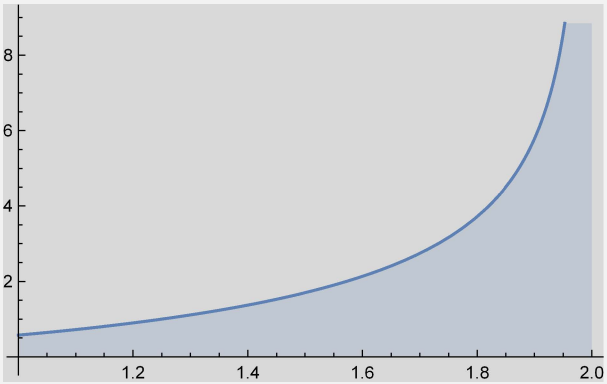
2.5 Ordenagailuko praktikak

2.1 ariketa. Kalkulatu honako integral inpropio hau: $\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$.

Funtzioa definituko dugu, eta $[1, 2]$ tartean haren adierazpena egingo dugu.

```
f[x_]:=x^2/Sqrt[4-x^2]; a = 1; b = 2;

Plot[f[x], {x, a, b}, Filling → Axis]
```



$[1, 2]$ tartean bornatu gabeko funtzioa da, $x = 2$ balioan funtzioa infinitura baitoa. Integrala zuzenean kalkula daiteke.

```
∫_1^2 x^2/Sqrt[4-x^2] dx
```

$\frac{1}{6}\left(3\sqrt{3}+4\pi\right)$

Ondoren, integral inpropioa kalkulatuko dugu definizioa erabilita:

```
i[c_] = Integrate[f[x], {x, a, c}]
```

ConditionalExpression $\left[\frac{1}{6}\left(3\sqrt{3}-3c\sqrt{4-c^2}-2\pi+12\text{ArcSin}\left[\frac{c}{2}\right]\right),\right.$
$\left.-2<\text{Re}[c]\leq 2 \| c\notin\mathbb{R}\right]$

Mathematica programak esan digu integrala ez dela existitzen $4-c^2<0$ denean. Orduan, integralaren limitea ezkerretik kalkulatuko dugu:

```
Limit[i[c], c -> 2, Direction -> 1]
```

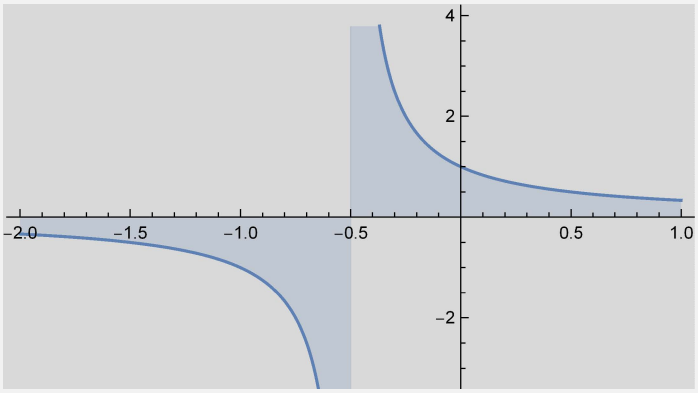
$\frac{1}{6}\left(3\sqrt{3}+4\pi\right)$

Eta emaitza finitua denez, integrala konbergentea da.

2.2 ariketa. Kalkulatu honako integral inpropio hau: $\int_{-2}^{1}\frac{1}{2x+1}dx$.

Funtzioa definituko dugu eta $[-2, 1]$ tartean haren adierazpena egingo dugu:

```
f[x_]:=1/(2x+1); a = -2; b = 1;
Plot[f[x], {x, a, b}, Filling → Axis]
```



Funtzioa ez da bornatua $[-2, 1]$ tartean, $x = -\frac{1}{2}$ denean infinitu egiten baita. Integrala zuzenean kalkulatzen saiatzen bagara, Mathematicak ez du emaitzarik ematen. Hortaz, definizioa aplikatuta kalkulatuko dugu emaitza:

```
i1[c_] = ∫_a^c 1/(2x+1) dx
```

ConditionalExpression $\left[\frac{1}{2}(-i\pi - \text{Log}[3] + \text{Log}[1 + 2c]), \text{Re}[c] \leq -\frac{1}{2} \middle\| c \notin \mathbb{R}\right]$

```
lim_{c→(-1/2)^-} i1[c]
```

$-\infty$

```
i2[c_] = ∫_c^b 1/(2x+1) dx
```

ConditionalExpression$\left[-\frac{1}{2}\text{Log}\left[\frac{1}{3}(1 + 2c)\right], \left(\left(\text{Re}\left[\frac{1}{-1+c}\right] \leq -\frac{2}{3} \| \text{Re}\left[\frac{1}{-1+c}\right] \geq 0\right) \&\& \left(\frac{1+2c}{2-2c} \notin \mathbb{R} \left\| \text{Re}\left[\frac{1+2c}{2-2c}\right] < -1 \right\| 2 + 3\text{Re}\left[\frac{1}{-1+c}\right] < 0\right)\right) \| \frac{1}{-1+c} \notin \mathbb{R}\right]$

```
lim_{c→(-1/2)^+} i2[c]
```

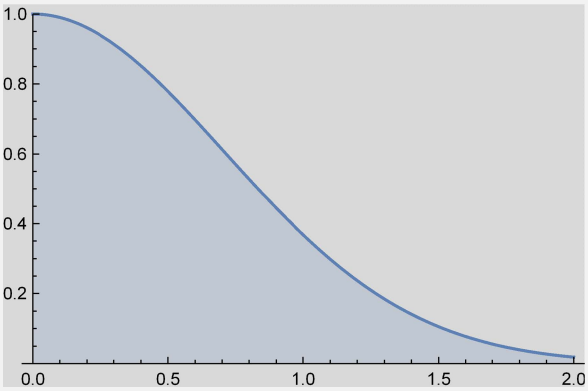
∞

Eta behintzat limiteetako bat infinitu denez, integrala dibergentea da.

2.3 ariketa. Kalkulatu honako integral inpropio hau: $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Funtzioa definituko dugu eta haren adierazpena egingo dugu:

```
f[x_]:=e^-x^2; a = 0; b = 2;
Plot[f[x], {x, a, b}, PlotRange → {0, 1}, Filling → Axis]
```



$[0, \infty)$ tartean bornatua den funtzioa da eta integrala zuzenean kalkula daiteke:

```
∫_0^∞ e^-x^2 dx
```

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Ondoren, integral inpropioa kalkulatuko dugu definizioa erabilita:

```
i[c_] = Integrate[f[x], {x, 0, c}]
```

$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\text{Erf}[c]$

$\text{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ banaketa normalaren integrala izanik.

```
Limit[i[c], c → Infinity]
```

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

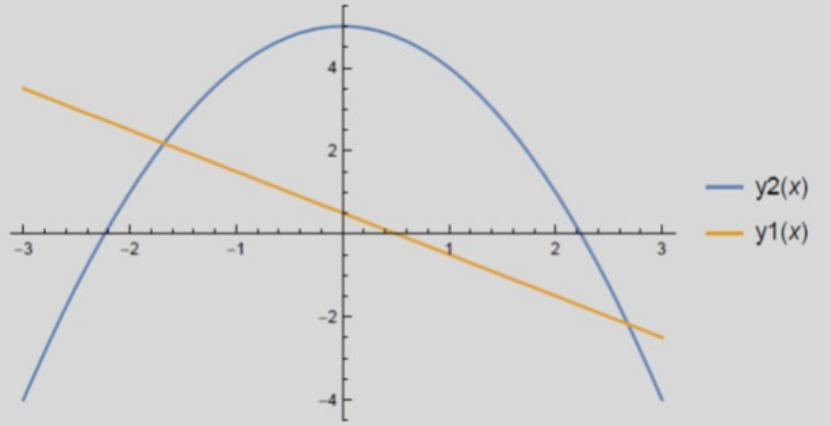
Eta limitea finitua denez, integrala konbergentea da.

2.4 ariketa. Kalkulatu honako funtzio hauen artean definitutako eremuaren azalera: $y = \frac{1}{2} - x$ eta $y = 5 - x^2$.

Funtzioak definituko ditugu, eta haien adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
y1[x_]:=1/2 - x; y2[x_]:=5 - x^2;

Plot[{y2[x], y1[x]}, {x, -3, 3}, PlotLegends → "Expressions"]
```



Ebakipuntuak kalkulatuko ditugu:

```
ebakipuntuak = Solve[y1[x]==y2[x], x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{19}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{19}\right)\right\}\right\}$$

Integrazioko mugak definituko ditugu:

```
a = x/.ebakipuntuak[[1]]
```

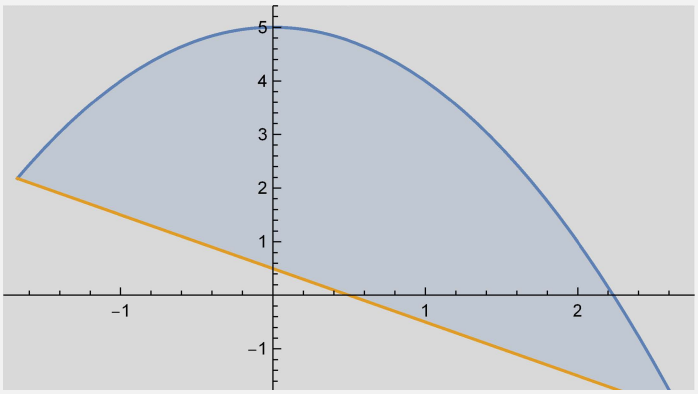
$$\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{19}\right)$$

```
b = x/.ebakipuntuak[[2]]
```

$$\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{19}\right)$$

Kurba bien arteko eremuaren azalera kalkulatu behar da:

```
Plot[{y2[x], y1[x]}, {x, a, b}, PlotLegends → "Expressions", Filling → {1 → {2}}]
```



Azalera hori kalkulatzeko, honako integral hau egin behar da:

```
azalera = ∫_a^b (y2[x] − y1[x]) dx
```

$$-\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{19}\right)^2+\frac{1}{24}\left(1-\sqrt{19}\right)^3+\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{19}\right)^2-\frac{1}{24}\left(1+\sqrt{19}\right)^3+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{19}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{19}\right)\right)$$

```
N[azalera]
```

13.8032

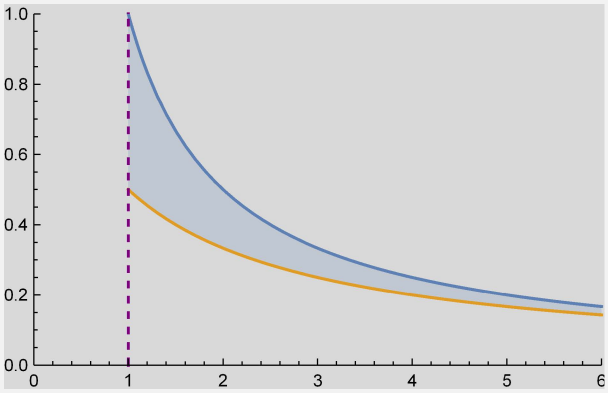
Hortaz, bi funtzioen arteko azalera $13,8032\ u^2$ da.

2.5 ariketa. Izan bedi D honako bi kurba hauek $x = 1$ zuzenaren eskuinean definitzen duten eremua: $y = \frac{1}{x}$ eta $y = \frac{1}{x+1}$. Kalkulatu D eremuaren azalera.

Funtzioen adierazpen grafikoa egingo dugu, eta eremua identifikatuko dugu:

```
g = Plot[{1/x, 1/(x+1)}, {x, 1, 6}, Filling → {1 → {2}}, PlotRange → {{1, 6}, {0, 1}}];
zuzena = ListPlot[{{1, 0}, {1, 1}}, Joined → True, PlotStyle → {Purple, Dashed}];

Show[{g, zuzena}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → {{0, 6}, {0, 1}}]
```



Honako integral inpropio hau kalkulatu behar da D eremuaren azalera kalkulatzeko:

$$A = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

Log[2]

$$N[A]$$

0.693147

Hortaz, D eremuaren azalera da $0,693147\ u^2$.

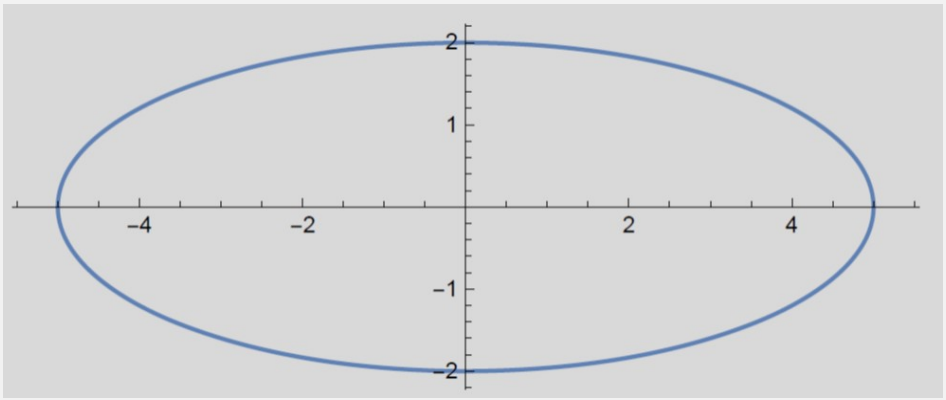
2.6 ariketa. Kalkulatu ekuazio parametrikoetan emanda dagoen honako elipse honek mugatzen duen azalera: $x(t) = 5\cos t$, $y = 2\sin t$.

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
x[t_] = a * Cos[t]; y[t_] = b * Sin[t];

elipse[t_, a_, b_] = {x[t], y[t]}; a = 5; b = 2;

ParametricPlot[elipse[t, a, b], {t, 0, 2Pi}, AspectRatio → Automatic]
```



Koordenatu parametrikoetan emandako kurbaren azalera honako formula hau erabilita kalkulatzen da: $A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$. Elipsearen goiko parteko azalera kalkulatuko dugu, eta simetriagatik balio hori bikoiztu egingo dugu:

```
azalera = 2 * ∫_π^0 (y[t] * x'[t]) dt
```

10π

Elipsearen azalera 10π u^2 da.

2.7 ariketa. Kalkulatu koordenatu polarretan $\rho^2 = a^2\cos(2\theta)$ ekuaziodun lemniskatak mugatutako eremuaren azalera.

Funtzioa definituko dugu koordenatu polarretan, eta ρ askatuko dugu ekuaziotik:

```
s = Solve [ρ^2==a^2 * Cos[2θ], ρ]
```

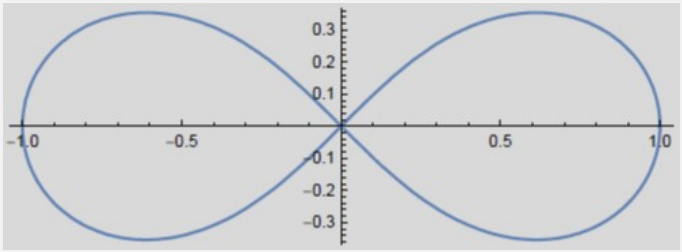
$$\left\{\left\{\rho \to -a\sqrt{\text{Cos}[2\theta]}\right\}, \left\{\rho \to a\sqrt{\text{Cos}[2\theta]}\right\}\right\}$$

```
lemniskata[θ_, a_] = ρ /. s[[2]]
```

$a\sqrt{\text{Cos}[2\theta]}$

Funtzioaren adierazpena egingo dugu, adibidez, $a = 1$ kasurako:

```
PolarPlot[lemniskata[θ, 1], {θ, 0, 2π}]
```



Koordenatu polarretan azalera kalkulatzeko adierazpena $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$ da. Grafikoa simetrikoa denez, lehenengo koadranteko azalera kalkulatuko dugu eta bider lau egingo dugu. Lehenengo koadrantean θ aldagaiak $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ tartean hartzen ditu balioak:

```
azalera = 4 * 1/2 ∫_0^(π/4) (lemniskata[θ, a])^2 dθ
```

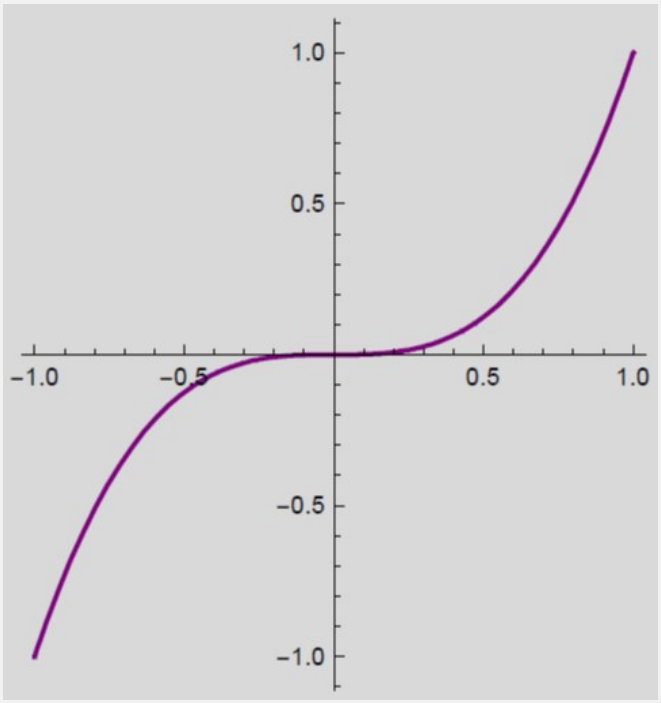
a^2

Beraz, lemniskataren barruko azalera a^2 u^2 da.

2.8 ariketa. Kalkulatu $y = x^3$ kurbaren $x = -1$ eta $x = 1$ tarteko zatiak OX ardatzarekiko biratzean sortzen den biraketa-gainazalaren azalera.

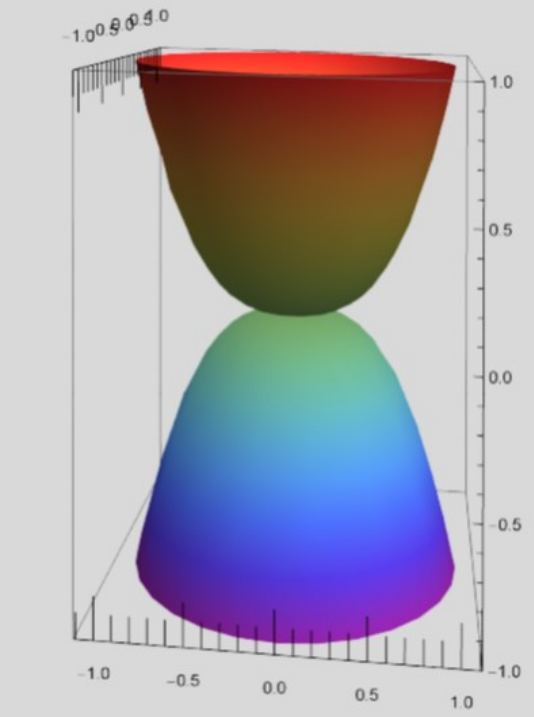
Funtzioa definituko dugu eta $[-1, 1]$ tartean irudikatuko dugu:

```
f[x_] = x^3;
Plot[f[x], {x, -1, 1}, AspectRatio → Automatic,
PlotStyle → {Thickness[0.008], Purple}]
```



Funtzioak OX ardatzarekiko biratzean sortzen den biraketa-gainazala ere irudikatu egingo dugu:

```
RevolutionPlot3D[f[x], {x, −1, 1}, RevolutionAxis → {0, 0, 1},
PlotRange → {−1, 1}, AspectRatio → 1.5,
Mesh → None, ColorFunction → "Rainbow"]
```



Azalera hori honako formula hau erabilita kalkula daiteke: $A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{a + (y')^2}\, dx$. $[0, 1]$ tarteko azalera kalkulatuko dugu, eta bider bi egingo dugu:

```
azalera = 2 * 2π * ∫_0^1 (f[x] * Sqrt[1 + (D[f[x], x])^2]) dx
```

$\frac{2}{27}\left(-1 + 10\sqrt{10}\right)\pi$

```
N[azalera]
```

7.12624

Hortaz, gainazalaren azalera $7,12624\ u^2$ da.

2.9 ariketa. Kalkulatu $y^2 = 4x$ eta $4x - 2y = 3$ funtzioek mugatzen duten eremuak OY ardatzarekiko biratzean sortzen den gorputzaren bolumena.

Funtzio bien arteko ebakipuntuak kalkulatuko ditugu:

```
ep = Solve[{y^2 == 4x, 4x - 2y - 3==0}]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{1}{4}, y \to -1\right\}, \left\{x \to \frac{9}{4}, y \to 3\right\}\right\}$

```
{x1, y1} = {x, y}/.ep[[1]]
```

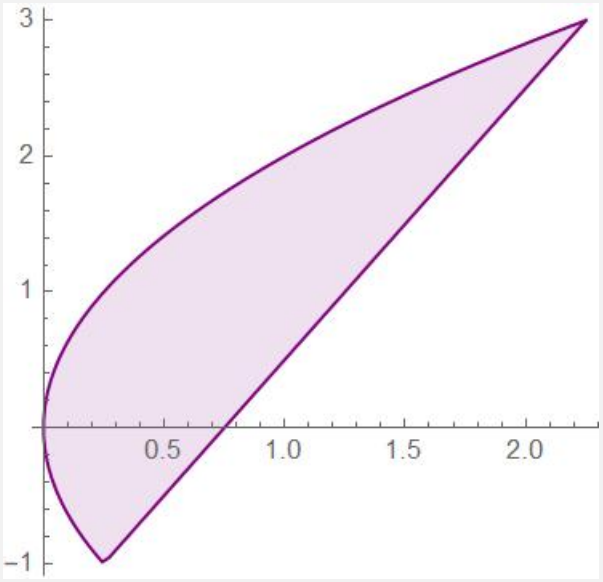
$\left\{\frac{1}{4}, -1\right\}$

```
{x2, y2} = {x, y}/.ep[[2]]
```

$\left\{\frac{9}{4}, 3\right\}$

Funtzioek mugatutako eremua irudikatuko dugu:

```
RegionPlot[{y^2<=4x&&4x - 2y - 3 ≤ 0}, {x, 0, x2}, {y, y1, y2}, Frame → False,
Axes → True, BoundaryStyle → Purple, PlotStyle → LightPurple]
```



y aldagaiaren balio bakoitzerako OX ardatzarekiko paraleloa den elementu diferentzial bat hartzen bada, eta OY ardatzarekiko birarazten bada, esparruak kanpoko disko bat eta barruko beste bat sortzen ditu. Kanpoko diskoak zuzenari dagokion x balioa dauka erradiotzat, eta barruko diskoak parabolari dagokion x aldagaiaren balioa. Beraz, solidoaren bolumena kalkulatzeko, kanpoko bolumenari barnekoa kenduko diogu:

```
bolumenkanpo = π * ∫_y1^y2 ((2 * y + 3)/4)^2 dy
```

$\frac{91\pi}{12}$

$$\textbf{bolumenbarru} = \pi * \int_{\textbf{y1}}^{\textbf{y2}} \left(y^2/4\right)^2 \, dy$$

$\frac{61\pi}{20}$

$$\textbf{bolumenOY} = \textbf{bolumenkanpo} - \textbf{bolumenbarru}$$

$\frac{68\pi}{15}$

Bila gabiltzan bolumenaren balioa da $\frac{68\pi}{15}$ u^3.

3. kapitulua

Integral bikoitzak eta aplikazioak

Kapitulu honetan integral bikoitzekin lan egingo dugu. Lehenik eta behin, integral mota hori definituko dugu, eta nola ebazten den azalduko dugu. Ondoren, Fubiniren teorema aurkeztuko dugu, eta bere erabilera justifikatuko dugu. Gero, integral bikoitzak edozein eskualdetan nola ebazten diren azalduko dugu, eta integral bikoitzen zenbait propietate aipatuko ditugu. Bukatzeko, integral bikoitza koordenatu polarretan nola ebazten den komentatuko dugu.

3.1 Integral bikoitza lauki batean

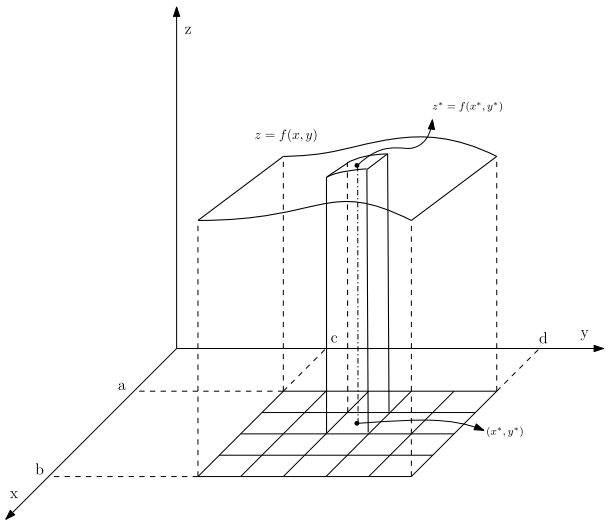
Izan bedi $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagaiko funtzio erreal bat, non haren domeinua edo izate-eremua R baita. Defini dezagun R, aldeak ardatzekiko paraleloak dituen laukizuzen itxi bat bezala:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d\}.$$

Suposa dezagun $f(x, y) \geq 0$ betetzen dela R domeinuan. Beraz, $f(x, y)$ funtzioaren grafikoa R laukizuzenaren gainean dagoen gainazal bat da. Defini dezagun $S \subset \mathbb{R}^3$ gorputza non:

- «zorua» R laukizuzena baita.
- «sabaia» $f(x, y)$ gainazala baita.
- «paretak» R gainazala mugatzen duten plano bertikalak baitira ($x = a, x = b, y = c$ eta $y = d$).

Helburua S gorputzaren bolumena (V_S) kalkulatzea izango da. Lehenik eta behin, R laukizuzenaren partiketa bat egin behar dugu. Horretarako, $[a, b]$ eta $[c, d]$ tarteen n eta m elementuko partiketa distantziakide bat hartuko dugu, non $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ eta $\Delta y = \frac{c-d}{m}$. Modu horretan, R laukizuzena nm laukizuzen txikitan banatzen da. Laukizuzen horiek R_{ij} gisa denotatuko ditugu, non $i = 1, \cdots, n$ eta $j = 1, \cdots, m$. R_{ij} laukizuzen bakoitzari dagokion S gorputzaren bolumenaren zatia kalkulatzeko domeinu horretako puntu bat hartuko dugu, (x^*_{ij}, y^*_{ij}). Horrela,



3.1 irudia. Bolumenak kalkulatzeko egindako prozesuaren adibide bat.

R_{ij} laukizuzena oinarri bezala duen zutabearen bolumena $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta x\,\Delta y$ gisa kalkulatzen da. 3.1 irudian grafikoki adierazi da egoera hori.

Prozesu hori nm laukizuzen txiki guztientzat errepikatzen baldin badugu, S gorputzaren bolumenaren hurbilpen bat lortuko dugu:

$$V_S \simeq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Beraz, R domeinuaren partiketa infinitura eramaten baldin badugu, S gorputzaren bolumenaren adierazpena daukagu:

$$V_S = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Definizioa. Izan bedi $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bi aldagaiko funtzio erreal bat R laukizuzenean definituta dagoena. f funtzioaren integral bikoitza modu honetan definitzen da R laukizuzenean:

$$\int\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta x\,\Delta y.$$

Limite hau existitzen baldin bada, f funtzioa R eremuan integragarria dela esango dugu.

Teorema (integragarritasuna). Izan bedi f bi aldagaiko funtzio erreal bat R laukizuzenean definituta dagoena. f mugatua baldin badago R eremuan eta jarraitua baldin bada puntu kopuru finitu batean izan ezik, orduan f integragarria da R eremuan.

3.1.1 Integral iteratuak

Izan bedi $f(x,y)$ bi aldagaiko funtzio bat $R=[a,b]\times[c,d]$ eremuan jarraitua dena. Aldagai batekiko integrala definitu dezakegu; adibidez, $\int_a^b f(x,y)\,dx$. Integral horretan y aldagaia konstante mantentzen da f funtzioa x-rekiko integratzen den bitartean. Integral horren emaitza y-ren menpekoa izango da, eta hori berriro integratu dezakegu, orain y-ren menpe, honako adierazpen hau lortuz:

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Integral horri *integral iteratu* deitzen zaio. Ohartu, egin dugun modu berean, lehenengo y-rekiko integratzen den integral iteratua definitu dezakegula:

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx.$$

Teorema (Fubini). Izan bedi $f: R\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ bi aldagaiko funtzio jarraitua $R=[a,b]\times[c,d]$ laukizuzenean. Orduan,

$$\int\int_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy.$$

Fubiniren teoremak integral bikoitzak laukizuzen batean ebazteko aukera ematen digu integral iteratuak erabiliz. Gainera, orokorrean Fubiniren teorema betetzeko nahikoa da suposatzea f funtzioa R-n mugatua dela, jarraitua dela kurba kopuru finitu batean izan ezik eta integral iteratuak existitzen direla.

Adibidea. Kalkulatu $\int\int_R x\,\sin(xy)\,dA$, non $R=\{(x,y): 0\le x\le\pi,\ 1\le y\le 2\}$.

Lehenengo y-rekiko integratzen baldin badugu integrala, modu honetan ebatz daiteke:

$$\begin{aligned}\int\int_R x\,\sin(xy)\,dA&=\int_0^\pi\int_1^2 x\,\sin(xy)\,dy\,dx=\int_0^\pi[-\cos(xy)]_{y=1}^{y=2}\,dx=\\&=\int_0^\pi -\cos(2x)+\cos(x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\sin(2x)+\sin(x)\right]_{x=0}^{x=\pi}=0.\end{aligned}$$

Aldiz, lehenengo x-rekiko integratzen baldin badugu, $x\,sin(xy)$ funtzioaren integrala kalkulatu beharko genuke, hau da, polinomio bat bider funtzio trigonometriko baten integrala kalkulatu beharko genuke. Argi eta garbi, kasu honetan errazagoa da integrala guk egin dugun ordenean ebaztea.

3.2 Integral bikoitzak eskualde lau orokorretan

Orain arte, $f(x,y)$ funtzioaren integral bikoitzak laukizuzenetan nola ebazten diren ikusi dugu. Emaitza horiek orokortu nahi ditugu. Horretarako, atal honetan integral bikoitzak eremu lau orokorretan definituko ditugu.

Suposa dezagun D eremu laua mugatua dagoela, hau da, existitzen dela R laukizuzen bat non $D \subset R$. Bi aldagaiko funtzio berri bat defini dezakegu non:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in R - D. \end{cases}$$

Existitzen baldi bada F-ren gaineko integral bikoitza R laukizuzenean, orduan f-ren gaineko integral bikoitza modu honetan defini daiteke D eremuan:

$$\int\int_R F(x,y)\,dA = \int\int_D f(x,y)\,dA.$$

Ohartu F integralaren eremua laukizuzen bat dela, eta guk badakigu nola kalkulatu integral bikoitzak mota horretako eremuetan. Bestalde, $F(x,y) = 0$ da $(x,y) \notin D$ betetzen denean. Beraz, ez du ezer gehitzen integralera.

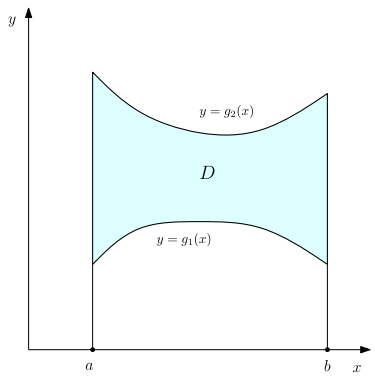
Aurreko atalean erabilitako arrazoiketa berdinarekin, erraza da frogatzea $\int\int_D f(x,y)\,dA$ integrala D gainazala «zoru» gisa eta $f(x,y)$ «sabai» gisa dituen gorputzaren bolumena dela. Modu berean, erraza da frogatzea berdinak direla bolumen hori eta R laukizuzena «zoru» gisa eta $F(x,y)$ «sabai» gisa dituen gorputzaren bolumena; izan ere, $F(x,y)$ funtzioak D eremutik kanpo ez dio integralari ezer gehitzen.

f funtzioa jarraitua baldin bada D eremuan eta eremuko mugak «joera ona» baldin badauka, froga daiteke F funtzioaren integral bikotza R eremuan existitzen dela eta, ondorioz, f funtzioaren integral bikoitza D eremuan ere existitzen dela. D eremuak bi mota desberdinetan sailkatuko ditugu: I motakoak eta II motakoak.

3.2.1 Integral bikoitzak I eta II motako eremuetan

Definizioa. D eremua I motakoa dela esango dugu, baldin eta x-ren menpeko bi funtzio jarraituren bitartez mugatua baldin badago (ikusi 3.2 irudia),

$$D_I = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$



3.2 irudia. I motako eremu baten adibide bat.

Suposa dezagun D eremua I motakoa dela. Orain, defini ditzagun R laukizuzena, non $D \subset R$ baita, eta F funtzioa, non $F = f$ baita D eremuan eta $F = 0$ baita $R - D$ eremuan.

Fubiniren teorema aplikatzen baldin badugu F funtzioaren integral bikoitzean:

$$\int\int_R F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx.$$

Kontuan izanda R eremuaren eta F funtzioaren definizioak, badakigu $F(x,y) = 0$ dela $y < g_1(x)$ edo $y > g_2(x)$ denean eta $F(x,y) = f(x,y)$ dela $g_1(x) < y < g_2(x)$ denean:

$$\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Beraz, I motako D eremuaren gaineko integral bikoitz bat integral iteratu gisa defini daiteke:

$$\int\int_{D_I} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Adibidea. Kalkulatu $\int\int_D (x^2+y)\,dx\,dy$, non D eremua $y = -x^2$ eta $y = x^2$ kurben eta $x = -1$ eta $x = 1$ zuzenen bitartez mugatuta baitago.

Gure D eremua honako modu honetan defini dezakegu:

$$D = \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ -x^2 \le y \le x^2\}.$$

Ikus daiteke I motako eremua dela. Beraz, integrala honela kalkula daiteke:

$$\int\int_D (x^2+y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-x^2}^{x^2} (x^2+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=-x^2}^{y=x^2} dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} 2x^4\,dx = \left[\frac{2x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{5}.$$

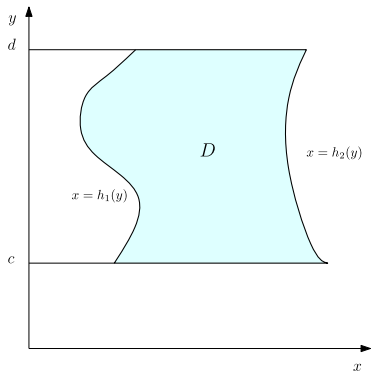
Argudio berdina erabilita, II motako D eremuaren gaineko integral bikoitza integral iteratu gisa defini daiteke.

Definizioa. D eremua II motakoa dela esango dugu, baldin eta y-ren menpeko bi funtzio jarraituren bitartez mugatua baldin badago (ikusi 3.3 irudia),

$$D_{II} = \{(x,y) : h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d\}.$$

II motako D eremuaren gaineko integral bikoitza integral iteratu gisa definitzen da:

$$\int\int_{D_{II}} f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$



3.3 irudia. II motako eremu baten adibide bat.

3.3 Integral bikoitzen propietateak

Izan bitez f eta g bi aldagaiko funtzioak eta D eremu lau orokor bat. Suposa dezagun $\int\int_D f(x,y)\,dA$ eta $\int\int_D g(x,y)\,dA$ integral bikoitzak existitzen direla. Orduan, honako propietate hauek bete egiten dira:

1. $\int\int_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \int\int_D f(x,y)\,dA + \int\int_D g(x,y)\,dA$.
2. $\int\int_D c\,f(x,y)\,dA = c\int\int_D f(x,y)\,dA$, non $c\in\mathbb{R}$ konstante bat baita.
3. Baldin eta $f(x,y)\geq g(x,y)$, $\forall (x,y)\in D$ bada, orduan:
$$\int\int_D f(x,y)\,dA \geq \int\int_D g(x,y)\,dA.$$
4. Baldin $D = D_1\cup D_2$, non D_1 eta D_2 disjuntuak baitira (agian mugan izan ezik), orduan:
$$\int\int_D f(x,y)\,dA = \int\int_{D_1} f(x,y)\,dA + \int\int_{D_2} f(x,y)\,dA.$$
5. $f(x,y)=1$ funtzio konstantea D eremuan integratzen badugu, emaitza D eremuaren azalera izango da:
$$\int\int_D 1\,dA = A(D).$$
6. Baldin $m\leq f(x,y)\leq M$, $\forall (x,y)\in D$ bada, orduan:
$$m\cdot A(D) \leq \int\int_D 1\,dA \leq M\cdot A(D).$$

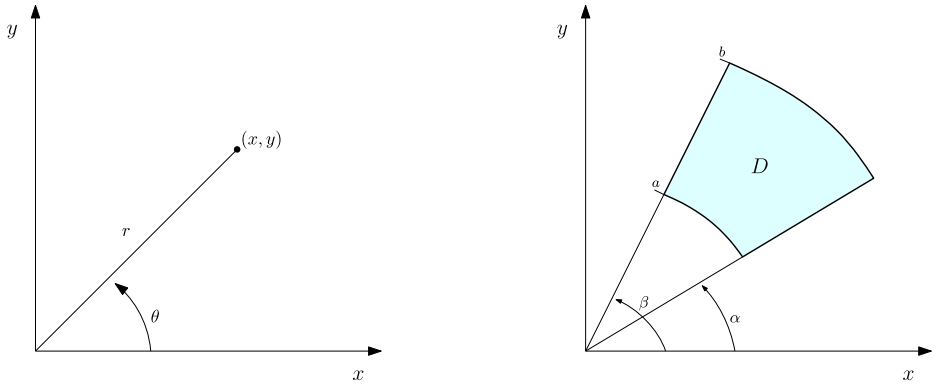
3.4 Integral bikoitza koordenatu polarretan

Suposa dezagun $\int\int_D f(x,y)\,dA$ kalkulatu nahi dugula, non D eremua zirkulu baten laurdena baita. Batzuetan, planoko eremuak errazago definitzen dira

koordenatu polarrak erabilita (r, θ) koordenatu kartesiarrak (x, y) erabilita baino. Bestalde, beste egoera batzuetan, koordenatu kartesiarretan $f(x, y)$ definituta dagoen bi aldagaiko funtzio batek adierazpen sinpleago bat izan dezake koordenatu polarretan definituta $f(r, \theta)$.

Eremu zirkular bat koordenatu polarretan adierazteko (r, θ) aldagaiak erabiliko ditugu, non r planoko puntu batek koordenatu-jatorriarekiko duen distantzia baita eta θ angelua x ardatzarekikoa baita. D eremua koordenatu polarretan honako era honetan definitzen da (ikusi 3.4 irudia):

$$D_{r\theta} = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$



(a) Puntu bat koordenatu polarretan adierazteko modua.

(b) D eremu zirkular bat koordenatu polarretan adierazteko modua.

3.4 irudia. Koordenatu polarren adierazpena kasu ezberdinetan.

Koordenatu kartesiarretan definituta dagoen bi aldagaiko funtzio bat koordenatu polarretara pasatu daiteke $x(r, \theta) = r\ \cos\theta$ eta $y(r, \theta) = r\ \sin\theta$ aldagai-aldaketa erabiliz:

$$f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = f(r\ \cos\theta, r\ \sin\theta).$$

Definizioa. Izan bedi f bi aldagaiko funtzio bat eta D eremu zirkular bat (D_{xy} koordenatu kartesiarretan definituta dagoenean eta $D_{r\theta}$ koordenatu polarretan definituta dagoenean). f funtzioaren gaineko integral bikoitza modu honetan definitzen da D eremuan koordenatu polarretan:

$$\int\int_{D_{xy}} f(x, y)\, dA = \int\int_{D_{r\theta}} f(x(r, \theta), y(r, \theta))\, r\, dr\, d\theta.$$

Ohartu koordenatu-aldaketa egiterakoan r termino bat agertzen dela integral barruan. Termino hori koordenatu-aldaketaren jakobiarrarekin erlazionatuta dago, hain zuzen ere $|J(r, \theta)| = r$.

Adibidea. Kalkulatu $\int\int_D (x^2 + y^2)\, x\, dA$, non D eremua erradio txikia 1 eta handia 4 duen eraztunaren lehenengo koadranteko zatia baita.

Lehenik eta behin, gure D eremua koordenatu polarretan adieraziko dugu:

$$D_{r\theta} = \{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 4,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Orain, integratu beharreko funtzioa koordenatu polarretan idatziko dugu $x = r\,\cos\theta$ eta $y = r\,\sin\theta$ aldagai-aldaketa eginez:

$$f(x = r\,\cos\theta, y = r\,\sin\theta) = (r^2\,\cos^2\theta + r^2\,\sin^2\theta)\,r\,\cos\theta = r^3\,\cos\theta.$$

Bukatzeko, jakobiarra integralaren adierazpenean gehituko dugu:

$$\int\int_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\,x\,dA = \int\int_{D_{r\theta}} r^3\,\cos\theta\,(r\,dr\,d\theta).$$

Eta orain integrala kalkula dezakegu:

$$\int\int_{D_{r\theta}} r^4\,\cos\theta\,d\theta\,dr = \int_1^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\,\cos\theta\,d\theta\,dr = \int_1^4 \left[r^4\,\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} dr = \int_1^4 r^4\,dr =$$
$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=1}^{r=4} = \frac{1023}{5}.$$

3.5 Ordenagailuko praktikak

3.1 ariketa. Kalkulatu bi era ezberdinetan honako integral honen balioa: $\int\int_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, non $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \le y \le x, 1 \le x \le 2\right\}$.

Funtzioen arteko ebakipuntuak kalkulatuko ditugu:

```
ep1 = Solve[{y == 1/x, x == 1}]; {x1, y1} = {x, y} /. ep1[[1]]
ep2 = Solve[{y == 1/x, x == 2}]; {x2, y2} = {x, y} /. ep2[[1]]
ep3 = Solve[{y == x, x == 1}]; {x3, y3} = {x, y} /. ep3[[1]]
ep4 = Solve[{y == x, x == 2}]; {x4, y4} = {x, y} /. ep4[[1]]
ep5 = Solve[{y == 1/x, y == x}]; {x5, y5} = {x, y} /. ep5[[2]]
```

$\{1, 1\}$

$\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$

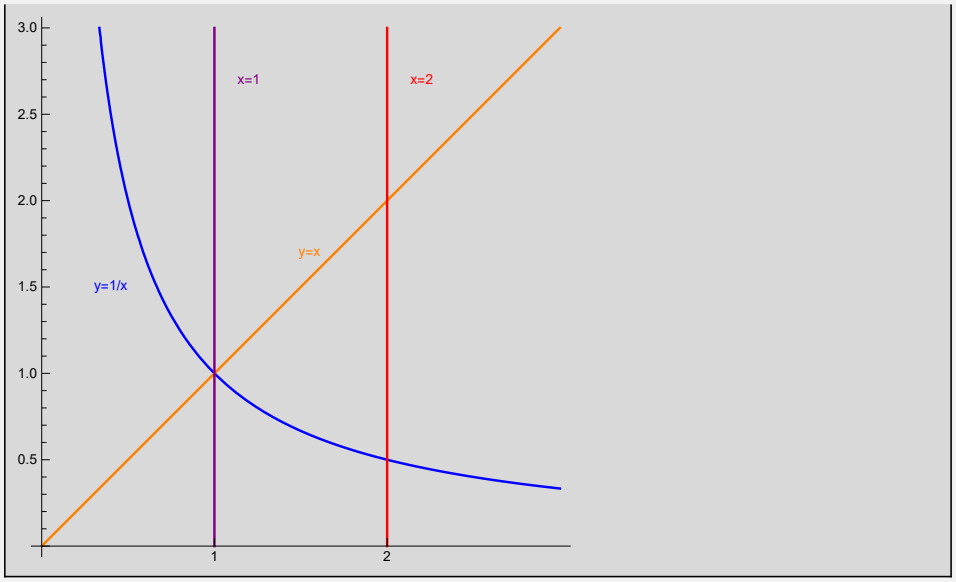
$\{1, 1\}$

$\{2, 2\}$

$\{1, 1\}$

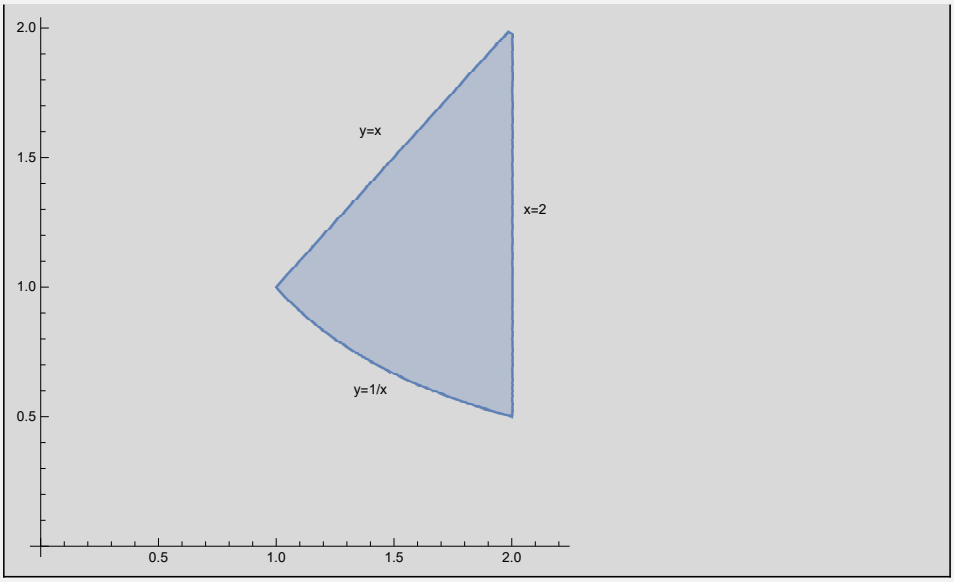
Funtzioen adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
etiketak = {Text["y=1/x", {0.4, 1.5}, {0, 0}], Text["y=x", {1.55, 1.7}, {0, 0}],
Text["x=1", {1.2, 2.7}, {0, 0}], Text["x=2", {2.2, 2.7}, {0, 0}]};
ContourPlot[{y == 1/x, y == x, x == 1, x == 2}, {x, 0, x2 + 1}, {y, 0, y4 + 1},
ContourStyle → {Blue, Orange, Purple, Red}, Frame → None, Axes → True,
Ticks → {{x1, x2}, Automatic}, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Funtzioek mugatzen duten eremuaren grafikoa ere egingo dugu:

```
etiketak2 = {Text["y=1/x", {1.4, 0.6}, {0, 0}],
Text["y=x", {1.4, 1.6}, {0, 0}], Text["x=2", {2.1, 1.3}, {0, 0}]};
RegionPlot[{y>=1/x&&y<=x&&x>=1&&x<=2}, {x, 0, 2.2}, {y, 0, 2},
Frame → None, Axes → True, Epilog → Graphics[etiketak2][[1]]]
```



Integrala bi eratara kalkulatzeko esaten digutenez, lehenengo era honetan integrazioko lehenengo aldagai gisa y aukeratuko dugu. D eremua $x = 1$ eta $x = 2$ zuzenek mugatuta dago. Hortaz, $a = 1$ eta $b = 2$ dira. Gainerako integrazio-limiteak kalkulatzeko eremua mugatzen duten funtzioetan, y aldagaia askatu behar da: $y = \frac{1}{x}$ eta $y = x$.

$$a = 1; b = 2;$$

$$\text{integralbikoitza1} = \text{Integrate}\left[\text{Integrate}\left[\frac{x^2}{y^2}, \{y, 1/x, x\}\right], \{x, a, b\}\right]$$

$$\frac{9}{4}$$

Lehenengo era honetan eginda, integralaren balioa $\frac{9}{4}$ da.

Bigarren eran, integrazioko lehenengo aldagai gisa x aukeratuko dugu. Kasu honetan, integrazio-eremua bi eremutan banatu behar dugu: D_1 eta D_2. D_1 eremua $y = \frac{1}{2}$ eta $y = 1$ zuzenek mugatzen dute; hortaz, $c_1 = \frac{1}{2}$ eta $d_1 = 1$. Eta D_2 eremua mugatzen duten zuzenak $y = 1$ eta $y = 2$ dira; eta, beraz, $c_2 = 1$ eta $d_2 = 2$. Ondoren, eremu bakoitzaren mugak diren funtzioetan x aldagaia askatu behar da. Horrela, D_1 eremuaren mugak dira $x = \frac{1}{y}$ eta $x = 2$; eta D_2 eremuarenak dira $x = y$ eta $x = 2$. Integral horiek planteatuko ditugu Mathematican:

$$\text{c1} = 1/2; \text{d1} = 1; \text{c2} = 1; \text{d2} = 2;$$

$$\text{integraleremu1} = \text{Integrate}\left[\text{Integrate}\left[\frac{x^2}{y^2}, \{x, 1/y, 2\}\right], \{y, \text{c1}, \text{d1}\}\right];$$

$$\text{integraleremu2} = \text{Integrate}\left[\text{Integrate}\left[\frac{x^2}{y^2}, \{x, y, 2\}\right], \{y, \text{c2}, \text{d2}\}\right];$$

```
integralbikoitza2 = integraleremu1 + integraleremu2
```

$\frac{9}{4}$

Eta bigarren era hau erabilita ere lehen lortu dugun emaitza bera lortzen da.

3.2 ariketa. $f(x) = x$ eta $g(x) = -x^2$ funtzioak emanik, kalkulatu bien arteko eremuaren azalera.

Funtzioak definituko ditugu eta haien arteko ebakipuntuak kalkulatuko ditugu:

```
f[x_] = x; g[x_] = -x^2;

s = Solve[f[x] == g[x], x]
```

$\{\{x \to -1\}, \{x \to 0\}\}$

```
x1 = x /. s[[1]]
```

-1

```
y1 = f[x1]
```

-1

```
x2 = x /. s[[2]]
```

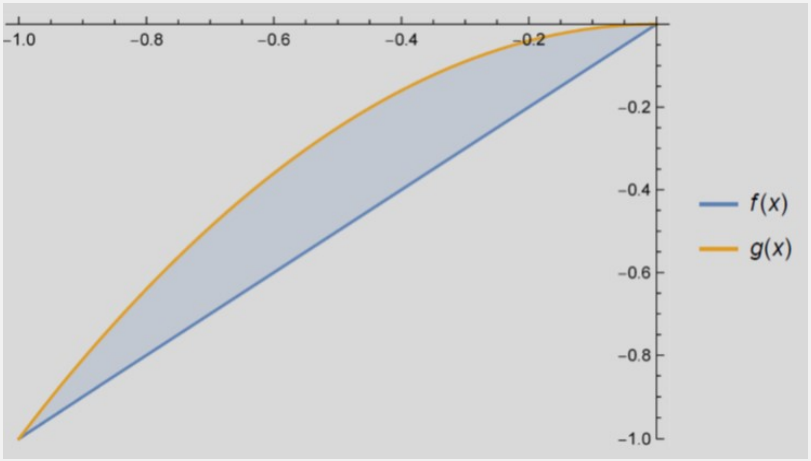
0

```
y2 = f[x2]
```

0

Bi funtzioen arteko ebakipuntuak dira $(-1, -1)$ eta $(0, 0)$. Bi funtzioek mugatzen duten eremuaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, x2, x1}, PlotRange → {y1, y2},
PlotLegends → "Expressions", Filling → {1 → {2}}]
```



y aldagaia hartuko dugu lehenengo integrazio-aldagai gisa. Eremua zuzenak eta parabolak, eta $x = -1$ eta $x = 0$ zuzen bertikalek mugatzen dute. Eremuaren azalera kalkulatuko dugu:

```
a = x1
b = x2
```

-1

0

```
azalera = ∫_a^b (∫_f[x]^g[x] 1 dy) dx
```

$\frac{1}{6}$

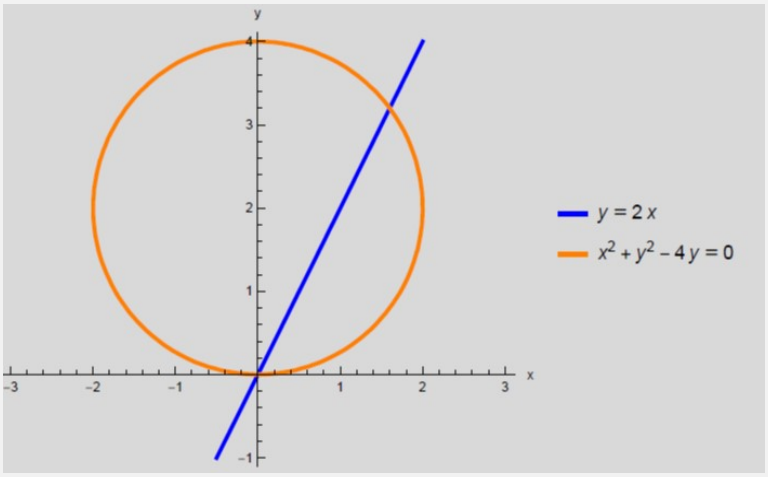
Hortaz, eremuaren azalera da $\frac{1}{6}\ u^2$.

3.3 ariketa. Kalkulatu $y = 2x$ eta $x^2 + y^2 - 4y = 0$ funtzioek mugatzen duten eremuaren azalera.

Funtzioak definituko ditugu eta haien adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot[{y == 2x, x^2 + y^2 - 4y == 0}, {x, -3, 3}, {y, -1, 4},
AspectRatio → Automatic,
```

```
ContourStyle → {{Blue, Thickness[0.008]}, {Orange, Thickness[0.008]}},
AxesLabel → {"x", "y"},
PlotLegends → "Expressions", Axes → True, Frame → False]
```



Funtzioen arteko ebakipuntuak kalkulatuko ditugu:

```
ep = Solve[{y == 2x, x^2 + y^2 − 4y == 0}]
```

$$\left\{\{x \to 0, y \to 0\}, \left\{x \to \frac{8}{5}, y \to \frac{16}{5}\right\}\right\}$$

```
{x1, y1} = {x, y}/.ep[[1]]
```

$$\{0, 0\}$$

```
{x2, y2} = {x, y}/.ep[[2]]
```

$$\left\{\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right\}$$

$(0, 0)$ eta $\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$ dira ebakipuntuak.

Lehenengo integrazio-aldagai gisa x aukeratuko dugu. Horrela, integral bakarraren bidez kalkula daiteke eremuaren azalera. Eremua mugatzen dute zuzenaren x aldagaiak eta zirkunferentziaren x-ren alde positiboak, eta $y = 0$ eta $y = \frac{16}{5}$ zuzen horizontalek. Integrazio-limiteak definituko ditugu:

```
c = y1
```

```
d = y2
```

$$0$$

$$\frac{16}{5}$$

```
s = Solve[y == 2x, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{y}{2}\right\}\right\}$$

```
x1 = x/.s[[1]]
```

$$\frac{y}{2}$$

```
s = Solve[x^2 + y^2 - 4y == 0, x]
```

$$\left\{\left\{x \to -\sqrt{4y - y^2}\right\}, \left\{x \to \sqrt{4y - y^2}\right\}\right\}$$

```
x2 = x/.s[[2]]
```

$$\sqrt{4y - y^2}$$

Kalkulatu ditugun integrazio-limiteak kontuan hartuta, eremuaren azalera kalkulatuko dugu:

```
azalera = ∫_c^d (∫_x1^x2 1 dx) dy
```

$$-\frac{8}{5} + 4\text{ArcTan}[2]$$

```
N[azalera]
```

$$2.82859$$

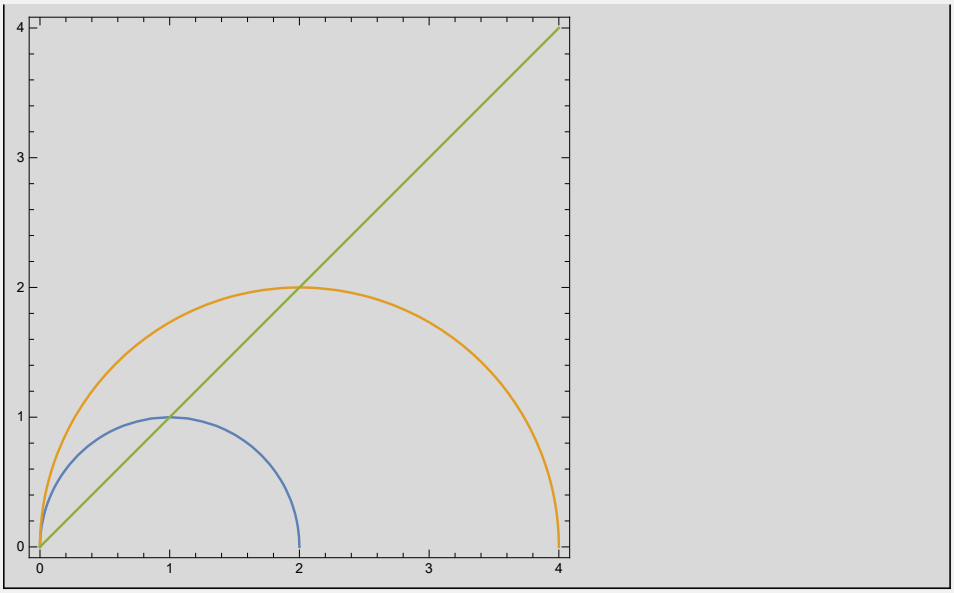
Eremuaren azalera da $2,82859\ u^2$.

3.4 ariketa. Kalkulatu $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x=0$, $y=x$ eta $y=0$ funtzioek mugatzen duten eremuaren azalera koordenatu polarrak erabilita.

Koordenatu polarretan emandako eremu baten azalera kalkulatzeko, $x=\rho\cos\theta$ eta $y=\rho\sin\theta$ adierazpenak ezagutu behar dira, jakobiarra $J(\rho,\theta)$ kalkulatu behar da, eta, ondoren, $\int\int_R f\left(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta\right)d\theta d\rho$ integrala kalkulatu behar da R izanik $\rho_1(\theta)$ eta $\rho_2(\theta)$ funtzioek mugatutako eremua, non $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$ baita.

Funtzioen adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot[{x^2 + y^2 - 2x == 0, x^2 + y^2 - 4x == 0, y == x}, {x, 0, 4}, {y, 0, 4}]
```



Ebakipuntuak kalkulatuko ditugu x eta y aldagaien mugak ezagutzeko:

```
s = Solve[x^2 + y^2 - 2x == 0, y]
```

$$\left\{\left\{y\to-\sqrt{2x-x^2}\right\},\left\{y\to\sqrt{2x-x^2}\right\}\right\}$$

```
c1 = y /. s[[2]]
```

$$\sqrt{2x-x^2}$$

```
s = Solve[x^2 + y^2 - 4x == 0, y]
```

$$\left\{\left\{y\to-\sqrt{4x-x^2}\right\},\left\{y\to\sqrt{4x-x^2}\right\}\right\}$$

```
c2 = y/.s[[2]]
```

$\sqrt{4x - x^2}$

```
s = Solve[c1 == x]
```

$\{\{x \to 0\}, \{x \to 1\}\}$

```
x1 = x/.s[[2]]
```

1

```
s = Solve[c2 == 0]
```

$\{\{x \to 0\}, \{x \to 4\}\}$

```
x2 = x/.s[[2]]
```

4

```
s = Solve[c2 == x]
```

$\{\{x \to 0\}, \{x \to 2\}\}$

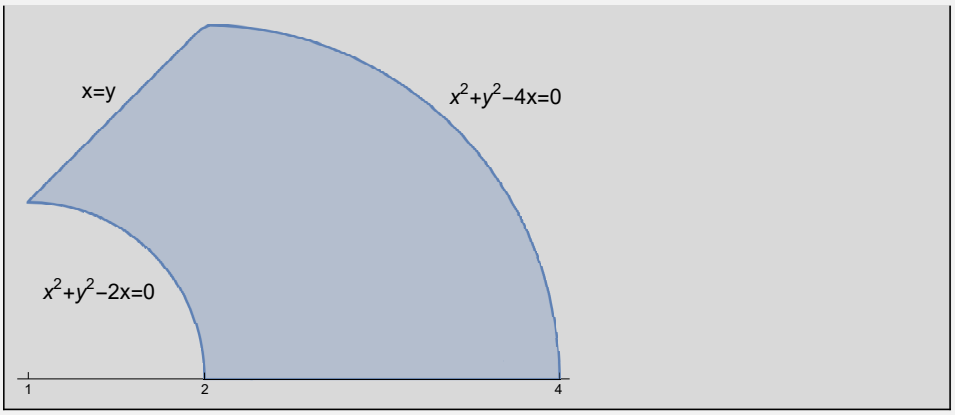
```
x3 = x/.s[[2]]
```

2

Eta kurbek mugatzen duten eremuaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
etiketak = {Text ["x^2 + y^2 - 2x = 0", {1.4, 0.5}, {0, 0}] ,
Text ["x^2 + y^2 - 4x = 0", {3.7, 1.6}, {0, 0}] ,
Text["x = y", {1.4, 1.6}, {0, 0}]};
```

```
RegionPlot[{x^2 + y^2 - 2x ≥ 0&&x^2 + y^2 - 4x ≤ 0&&y ≤ x}, {x, x1, x2}, {y, 0, x3},
Frame → None, Axes → True,
AxesOrigin → {0, 0}, AspectRatio → Automatic,
Ticks → {{x1, x2, x3}, Automatic},
Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Koordenatu polarrak erabilita definituko dugu funtzioa:

```
x = ρ * Cos[θ]; y = ρ * Sin[θ];

c1 = x^2 + y^2 - 2x==0//Simplify
```

$$\rho^2 == 2\rho\text{Cos}[\theta]$$

```
s = Solve[c1, ρ]
```

$$\{\{\rho \to 0\}, \{\rho \to 2\text{Cos}[\theta]\}\}$$

```
ρ1 = ρ/.s[[2]]
```

$$2\text{Cos}[\theta]$$

```
c2 = x^2 + y^2 - 4x==0//Simplify
```

$\rho^2 == 4\rho\text{Cos}[\theta]$

s = Solve[c2, ρ]

$\{\{\rho \to 0\}, \{\rho \to 4\text{Cos}[\theta]\}\}$

ρ2 = ρ/.s[[2]]

$4\text{Cos}[\theta]$

c3 = y == 0//Simplify

$\rho\text{Sin}[\theta] == 0$

s = Solve[c3]

$\{\{\theta \to 0\}, \{\rho \to 0\}\}$

θ1 = θ/.s[[1]]

0

c4 = x == y

$\rho\text{Cos}[\theta] == \rho\text{Sin}[\theta]$

s = Solve[c4]

$\left\{\left\{\theta \to -\frac{3\pi}{4}\right\}, \left\{\theta \to \frac{\pi}{4}\right\}, \{\rho \to 0\}\right\}$

θ2 = θ/.s[[2]]

$\frac{\pi}{4}$

Eremua mugatzen duten lerroen ekuazioak koordenatu polarretan $\rho_1 = 2\cos\theta$, $\rho_2 = 4\cos\theta$, $\theta_1 = 0$ eta $\theta_2 = \frac{\pi}{4}$ dira. $J(\rho, \theta)$ jakobiarra kalkulatuko dugu:

```
matrizea = Outer[D, {x, y}, {ρ, θ}];
jakobiarra = Det[matrizea]//Simplify
```

ρ

Eta bukatzeko, azalera kalkulatuko dugu koordenatu polarrak erabilita:

```
azalera = ∫_θ1^θ2 ∫_ρ1^ρ2 jakobiarra dρ dθ
```

$\frac{3(2+\pi)}{4}$

```
N[azalera]
```

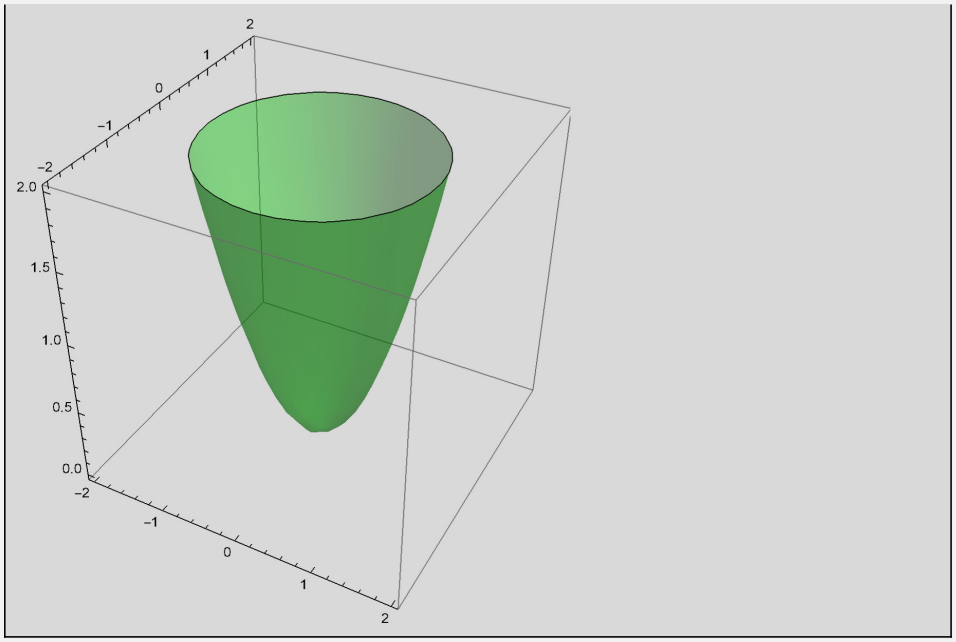
3.85619

Bila gabiltzan azaleraren balioa $3\frac{2+\pi}{4} \approx 3,85619\ u^2$ da.

3.5 ariketa. Kalkulatu $z = x^2 + y^2$ gainazalak mugatzen duen bolumena, OX eta OY ardatzek, eta $x = 2$ eta $y = 3$ funtzioek mugatzen duten eremua izanik integrazio-eremua.

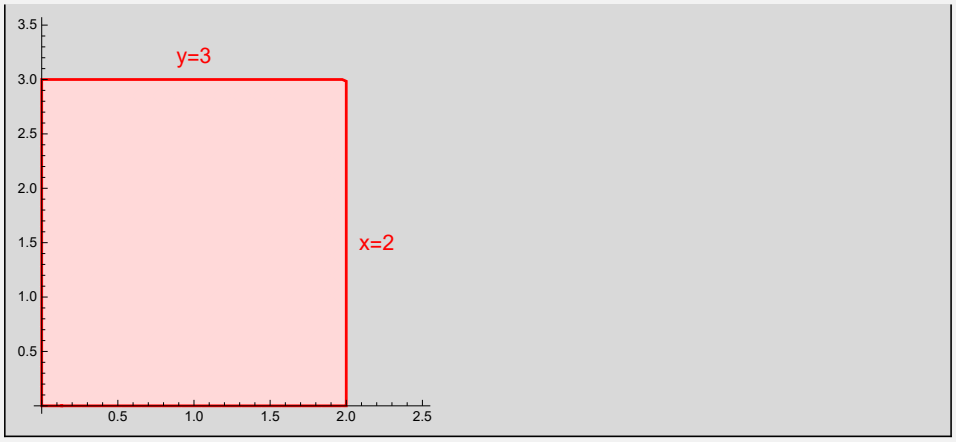
Gainazalaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 == z, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, 0, 2},
ContourStyle → Directive[Green, Opacity[0.4]],
Mesh → None]
```



Integrazio-eremuaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
etiketak = {Text["x=2", {2.2, 1.5}, {0, 0}], Text["y=3", {1, 3.2}, {0, 0}]};
RegionPlot[{x ≥ 0&&x ≤ 2&&y ≥ 0&&y ≤ 3}, {x, 0, 2.5}, {y, 0, 3.5},
Axes → True, Frame → None,
BoundaryStyle → {Red, Thickness[0.007]}, PlotStyle → LightRed,
Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Eta bila gabiltzan bolumena $V = \int\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ da, non $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ eta $y = 3$ baitira haren mugak:

```
v = Integrate [Integrate [x^2 + y^2, {y, 0, 3}] , {x, 0, 2}]
```

26

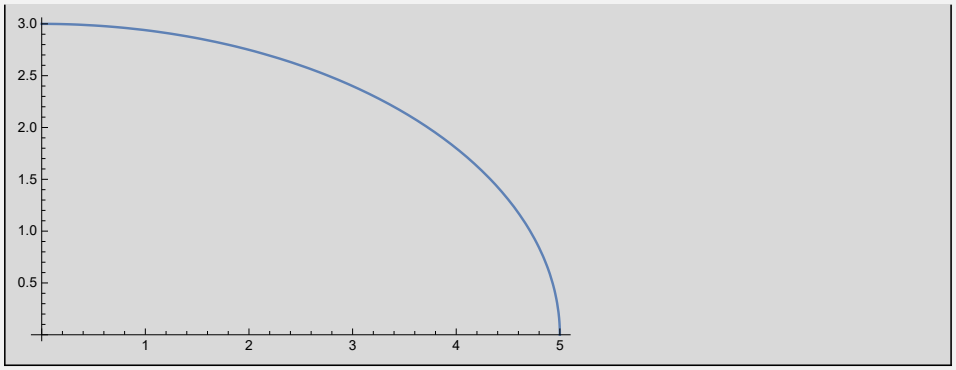
Hortaz, bolumenaren balioa da 26 u^2.

3.6 ariketa. Kalkulatu $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipseak lehenengo koadrantean mugatzen duen eremuaren grabitate-zentroa, jakinik haren puntu guztietan gainazaleko dentsitatea unitate batekoa dela.

A azaleradun D eremu baten (x_m, y_m) masa-zentroa honako era honetan kalkulatzen da: $x_m = \frac{1}{A}\int\int_D x dxdy$, $y_m = \frac{1}{A}\int\int_D y dxdy$, non $A\int\int_D \rho(x,y)dxdy$ baita.

Funtzioa definituko dugu eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu.

```
f[x_, y_] = x^2/25 + y^2/9 - 1;
ContourPlot[f[x, y] == 0, {x, 0, 5}, {y, 0, 3}, AspectRatio → Automatic,
Frame → None, Axes → True]
```



$a = 5$ ardatzerdi handia eta $b = 3$ ardatzerdi txikia dituen elipsea da. Lehenengo koadranteko eremuaren azalera da $A = \frac{1}{4}\pi ab = \frac{1}{4}15\pi$.

```
A = 15π/4;
```

Elipsearen ekuaziotik y aldagaia askatuko dugu:

```
s = Solve[f[x, y] == 0, y]
```

$$\left\{\left\{y \to -\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}\right\}, \left\{y \to \frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}\right\}\right\}$$

```
y2 = y/.s[[2]]
```

$$\frac{3\sqrt{25-x^2}}{5}$$

Lehenengo integrazio-aldagai gisa y aukeratuko dugu. Hortaz, integralaren limiteak izango dira $x = 0$, $x = 5$, $y = 0$ eta $y = \frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$. Eta $\rho = 1$ dela kontuan hartuta, (x_m, y_m) kalkulatuko dugu:

```
xm = Integrate[Integrate[x, {y, 0, y2}], {x, 0, 5}]/A
```

$$\frac{20}{3\pi}$$

```
ym = Integrate[Integrate[y, {y, 0, y2}], {x, 0, 5}]/A
```

$$\frac{4}{\pi}$$

```
masazentroa = {xm, ym}
```

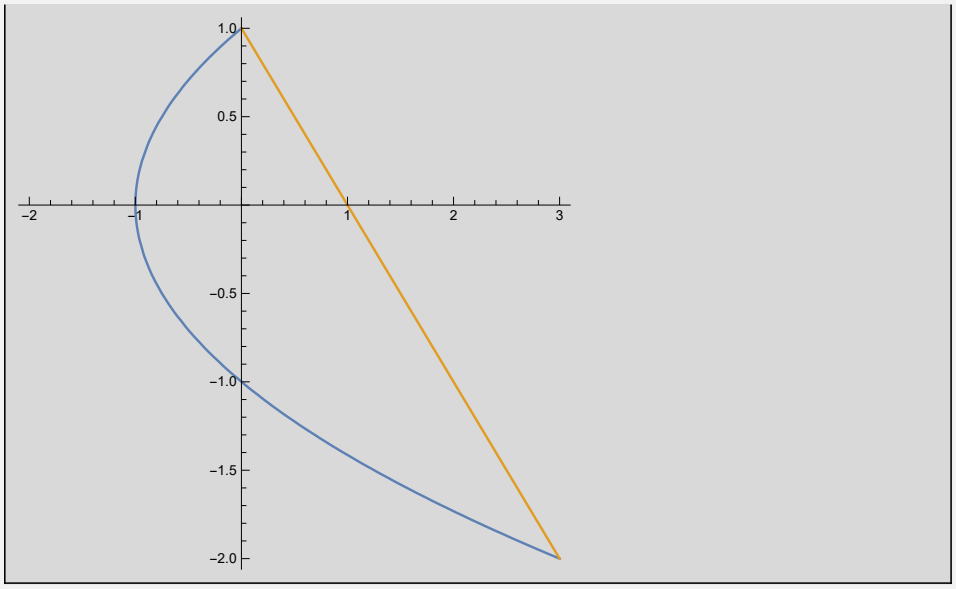
$$\left\{\frac{20}{3\pi}, \frac{4}{\pi}\right\}$$

Bila gabiltzan masa-zentroaren osagaiak dira $\left(\frac{20}{3\pi}, \frac{4}{\pi}\right)$.

3.7 ariketa. Kalkulatu honako funtzio hauek mugatutako eremuaren OX ardatzarekiko inertzia-momentua: $y^2 = x + 1$ eta $x + y = 1$.

$\rho(x, y)$ dentsitatedun D eremu baten I_x eta I_y inertzia-momentuak integral hauen bidez kalkulatzen dira: $I_x = \int\int_D y^2\rho(x, y)dxdy$ eta $I_y = \int\int_D x^2\rho(x, y)dxdy$. D eremuaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot[{y^2 == x + 1, x + y == 1},
{x, -2, 3}, {y, -2, 1}, Axes -> True, Frame -> None]
```



Eta grafikoen arteko ebakipuntuak kalkulatuko ditugu:

ep = Solve [{$y^2 == x + 1, x + y == 1$}]

$\{\{x \to 3, y \to -2\}, \{x \to 0, y \to 1\}\}$

{x1, y1} = {x, y}/.ep[[1]]

$\{3, -2\}$

{x2, y2} = {x, y}/.ep[[2]]

$\{0, 1\}$

Hau da, $(3, -2)$ eta $(0, 1)$ dira ebakipuntuak.

I_x kalkulatuko dugu $\rho = 1$ dela kontuan hartuz. Integrazioko lehenengo aldagai gisa x aukeratuko dugu, eta kontuan izango dugu integralaren mugak $y = 2$, $y = 1$, $x = y^2 - 1$ eta $x = 1 - y$ direla:

Ix = $\int_{y1}^{y2} \left(\int_{y^2-1}^{1-y} y^2 \, dx \right) dy$

```
63/20
```

Hortaz, $I_x = \frac{63}{20}$ da.

4. kapitulua

Integral hirukoitzak eta aplikazioak

Kapitulu honetan integral hirukoitzekin lan egingo dugu. Lehenik eta behin, integral mota hau definituko dugu, eta bere ebazpena kutxa batean nola egin azalduko dugu. Gero, integral hirukoitzak edozein eskualde solidotan nola ebazten diren azalduko dugu. Bukatzeko, integral hirukoitzak koordenatu zilindrikoetan eta esferikoetan nola ebatzi ikusiko dugu.

4.1 Integral hirukoitza kutxa batean

Aurreko kapitulua integral bikoitzak lauki batean definitzen hasi genuen. Ideia hori jarraituz, integral hirukoitzak kutxa batean definituko ditugu. Hiru dimentsioko kutxa bat modu honetan defini daiteke:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d,\, s \leq z \leq t\},$$

non $a, b, c, d, s, t \in \mathbb{R}$.

Integral hirukoitza definitzeko, Riemannen baturaren ideia erabiliko dugu. Lehen pausoa B gorputza kutxa txikiagoetan banatzea da. Hau da, B eremuaren partiketa bat definitu behar dugu. Horretarako $[a, b]$, $[c, d]$ eta $[s, t]$ tarteak zatituko ditugu Δx luzerako n zatitan, Δy luzerako m zatitan eta Δz luzerako l zatitan, hurrenez hurren. Horren adibide bisual bat Rubiken kuboa izango litzateke, non kutxa bat $n, m, l = 3$ hartuta 27 kutxa txikitan banatzen baita. Beraz, B gorputza nml kutxa txikitan banatuta dago,

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{k=1}^{l} B_{ijk}.$$

B_{ijk} kutxa txiki bakoitzaren puntu bat hartuta $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ Riemannen batura defini dezakegu:

$$S_{nml} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z.$$

Definizioa. Izan bedi $f : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hiru aldagaiko funtzio erreal bat B kutxan definituta dagoena. f funtzioaren integral hirukoitza B kutxan modu honetan definitzen da:

$$\int\int\int_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{n,m,l\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

4.1.1 Integral iteratu hirukoitzak

Integral bikoitzekin egin den bezala, integral hirukoitzak integral iteratu moduan adieraz daitezke.

Fubiniren teorema integral hirukoitzetarako. Izan bedi $f : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hiru aldagaiko funtzio jarraitua $B = [a,b] \times [c,d] \times [s,t]$ kutxan. Orduan,

$$\int\int\int_B f(x,y,z)\,dV = \int_s^t \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Integral hori lehenengo x aldagaiarekiko integratu behar dugu $[a,b]$ tartean, gero y aldagaiarekiko $[c,d]$ tartean, eta bukatzeko z aldagaiarekiko $[s,t]$ tartean. Beste bost ordena posible daude integral iteratua kalkulatzeko.

Orokorrean, Fubiniren teorema bete egingo da f funtzioa mugatua baldin badago B eremuan, jarraitua bada kurba kopuru finitu batean izan ezik eta integral iteratuak existitzen baldin badira.

Adibidea. Kalkulatu $\int\int\int_B z\,e^{xz}\,dV$, non $B = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ baita.

Adibide honetan goiko adierazpenean daukagun integrazio-ordena erabiliko dugu:

$$\begin{aligned}\int\int\int_B z\,e^{xz}\,dV &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 z\,e^{xz}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 [e^{xz}]_{x=0}^{x=1}\,dy\,dz = \\ &= \int_0^1\int_0^1 (e^z-1)\,dy\,dz = \int_0^1 [y(e^z-1)]_{y=0}^{y=1}\,dz = \\ &= \int_0^1 (e^z-1)dz = [e^z - z]_{z=0}^{z=1} = e-2.\end{aligned}$$

Irakurleak integral iteratua beste ordena batean ebatz dezake, emaitza berdina dela ikusiz.

4.2 Integral hirukoitza eskualde solido orokorretan

Integral hirukoitza eskualde solido orokor batean definitzeko integral bikoitzekin erabilitako ideia berbera erabiliko dugu.

Izan bitez $E \subset \mathbb{R}^3$ eskualde solido bat eta $f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funtzioa. f funtzioaren integrala eskualde solido orokor batean kalkulatzeko B kutxa bat

hartuko dugu, non $E \subset B$ betetzen baita. $F : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funtzioa era honetan definituko dugu:

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in E \\ 0, & (x,y,z) \in B - E. \end{cases}$$

Beraz, f funtzioaren integral hirukoitza modu honetan kalkula daiteke:

$$\int\int\int_E f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_B F(x,y,z)\,dV.$$

Integral hori existitzen da, baldin eta f funtzio jarraitua bada E eremuan eta E eremuaren muga «leuna» baldin bada.

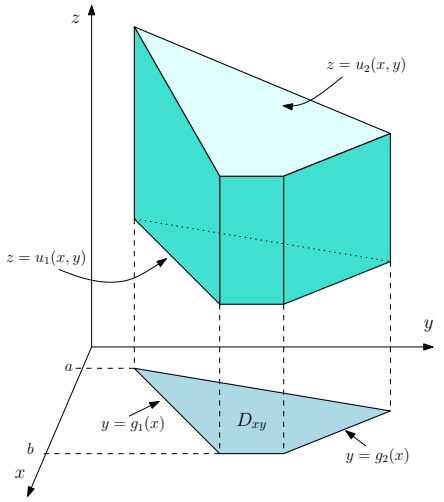
Orain, E eremuen sailkapen bat egingo dugu hiru motatako eremuak definituz. Ohartu, gerta daitekeela E eremu orokor bat aldi berean hiru motatakoa izatea edota mota horietako batekoa ere ez izatea.

4.2.1 Lehenengo motako eremu solidoa

Eremu solido orokor bat lehenengo motakoa dela esango dugu, baldin eta x eta y aldagaien menpeko bi funtzio jarraituren artean baldin badago:

$$E_1 = \{(x,y,z) : (x,y) \in D_{xy},\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\},$$

non D_{xy} E_1-en proiekzioa baita xy planoan. E_1 motako eremu baten adibidea 4.1 irudian ikus daiteke.



4.1 irudia. E_1 motako eremu solido baten adibide bat.

Beraz, E_1 motako eremu solido baten integrala modu honetan kalkula daiteke integral iteratuak erabiliz:

$$\int\int\int_{E_1} f(x,y,z)\,dV = \int\int_{D_{xy}} \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dA.$$

D_{xy} plano baten gainean definituta dagoen eremua da. Beraz, integral bikoitzekin lan egin dugunean ikusi dugun bezala, plano batean definituta dagoen eremu bat I edo II motakoa izan daiteke. Horren arabera, E_1 eremuaren bi adierazpen posible daude. Alde batetik, D_{xy} I motakoa baldin bada:

$$E_1^I = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\},$$

eta, bestalde, D_{xy} II motakoa baldin bada:

$$E_1^{II} = \{(x, y, z) : c \leq y \leq d,\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Orduan, E_1 eremu solidoaren gaineko integrala honako bi era hauetan kalkula daiteke, D_{xy} eremuaren motaren arabera:

- D_{xy} I motakoa bada:

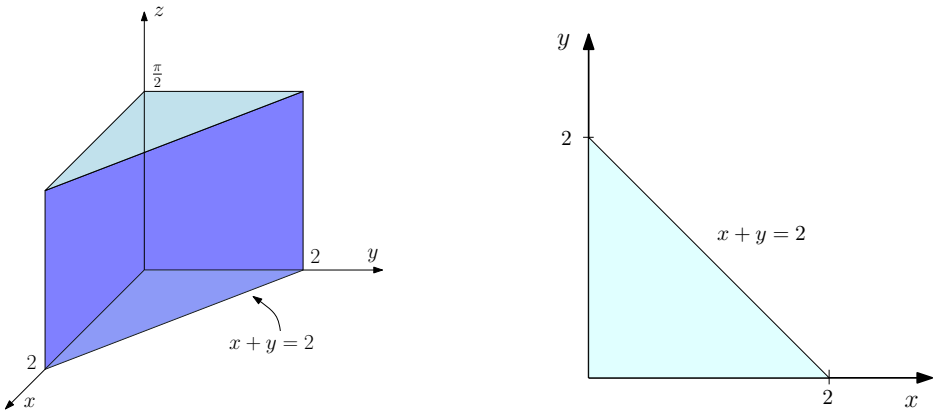
$$\int\int\int_{E_1^I} f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx.$$

- D_{xy} II motakoa bada:

$$\int\int\int_{E_1^{II}} f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy.$$

Adibidea. Kalkulatu $\int\int\int_E x^2 \cos(z)\, dV$ integrala, non E eremua $x = 0, y = 0, x + y = 1, z = 0, z = \frac{\pi}{2}$ planoek mugatzen baitute.

Lehenik eta behin, E eremu solidoa eta bere proiekzioa xy planoan irudikatuko ditugu. 4.2 irudian ikus daitezke grafiko horiek.



(a) E eremu solidoa.

(b) E eremuaren proiekzioa xy planoan.

4.2 irudia. Ebazten ari garen integralaren E eremu solidoaren adierazpen grafikoa.

E eremu solidoa I motakoa da. Bestalde, bere proiekzioa xy planoan, D_{xy}, I eta II motako eremua da aldi berean. Adibide honetan, integrala kalkulatzeko D_{xy}

eremu laua I motakotzat hartuko dugu. Beraz, D_{xy} eremua honako era honetan definitzen da:

$$D_{xy} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2 - x\}.$$

Ondorioz, E eremu solidoa E_1^I motakoa denez, honako era honetan defini dezakegu:

$$E_1^I = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq (2 - x),\ 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Eta orain prest gaude integrala kalkulatzeko:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_E x^2\,\cos(z)\,dV &= \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(z)\,dz\,dy\,dx = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} [x^2 \sin(z)]_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}}\,dy\,dx = \\
&= \int_0^2 \int_0^{2-x} x^2 dy\,dx = \int_0^2 [x^2 y]_{y=0}^{y=2-x} dx = \\
&= \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx = \\
&= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2^4}{3} - \frac{2^4}{4} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Irakurleak D_{xy} eremua II motakotzat hartuz, soluzio berdina lortuko du.

4.2.2 Bigarren motako eremu solidoa

Eremu solido orokor bat bigarren motakoa dela esango dugu, baldin eta y eta z aldagaien menpeko bi funtzio jarraituren artean baldin badago:

$$E_2 = \{(x, y, z) : (y, z) \in D_{yz},\ v_1(y, z) \leq x \leq v_2(y, z)\},$$

non D_{yz} E_2-ren proiekzioa baita yz planoan.

Beraz, E_2 motako eremu solido baten integrala honako era honetan kalkula daiteke integral iteratuak erabiliz:

$$\int\int\int_{E_2} f(x, y, z)\,dV = \int\int_{D_{yz}} \left[\int_{v_1(y,z)}^{v_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx\right] dA.$$

D_{yz} plano baten gainean definituta dagoen eremua da. Beraz, eremu lau hori I edo II motakoa izan daiteke. Ondorioz, lehen motako eremu solidoekin gertatzen den bezala, E_2 eremua bi motatakoa izan daiteke D_{yz}-ren arabera: E_2^I edo E_2^{II}.

4.2.3 Hirugarren motako eremu solidoa

Eremu solido orokor bat hirugarren motakoa dela esango dugu, baldin eta x eta z aldagaien menpeko bi funtzio jarraituren artean baldin badago:

$$E_3 = \{(x, y, z) : (x, z) \in D_{xz},\ w_1(x, z) \leq y \leq w_2(x, z)\},$$

non D_{xz} E_3-ren proiekzioa baita xz planoan.

Beraz, E_3 motako eremu solido baten integrala honako era honetan kalkula daiteke integral iteratuak erabiliz:

$$\int\int\int_{E_3} f(x,y,z)\,dV = \int\int_{D_{xz}} \left[\int_{w_1(x,z)}^{w_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA.$$

D_{xz} plano baten gainean definituta dagoen eremua da. Beraz, eremu lau hori I edo II motakoa izan daiteke. Ondorioz, aurreko kasuetan gertatzen den bezala, E_3 eremua bi motatakoa izan daiteke D_{xz}-ren arabera: E_3^I edo E_3^{II}.

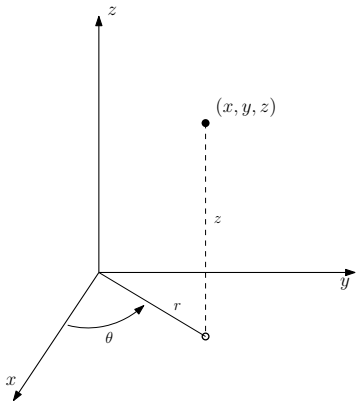
4.3 Integral hirukoitza koordenatu zilindrikoetan

Batzuetan, E eremu solidoaren arabera errazagoa izan daiteke koordenatu zilindrikoetan (r,θ,z) lan egitea kartesiarretan (x,y,z) baino. Modu berean, hiru aldagaiko funtzio batek adierazpen errazagoa izan dezake koordenatu zilindrikoetan kartesiarretan baino.

Koordenatu kartesiarretatik zilindrikoetara pasatzeko, honako aldagai-aldaketa erabili behar da:

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

non r aldagaia koordenatu jatorriaren eta xy planoan egindako puntuaren proiekzioaren arteko distantzia baita, θ aldagaia x ardatzaren eta xy planoan egindako puntuaren proiekzioaren arteko angelua, eta z puntuaren altuera izanik. 4.3 irudian grafikoki ikus daiteke koordenatu-aldaketa hori.



4.3 irudia. Koordenatu zilindrikoen adierazpen grafikoa.

Koordenatu kartesiarretan definituta dagoen hiru aldagaiko funtzio bat koordenatu zilindrikoetara pasatu daiteke $x(r,\theta) = r\,\cos\theta$ eta $y(r,\theta) = r\,\sin\theta$ aldagai-aldaketa erabiliz:

$$f(x(r,\theta), y(r,\theta), z) = f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta, z).$$

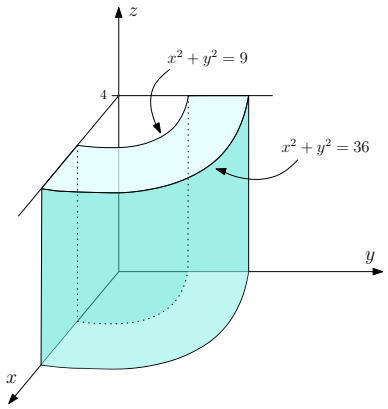
Definizioa. Izan bedi f hiru aldagaiko funtzio bat eta E eremu solido bat (E_{xyz} koordenatu kartesiarretan adierazita dagoenean eta $E_{r\theta z}$ koordenatu zilindrikoetan adierazita dagoenean). f funtzioaren integral hirukoitza koordenatu zilindrikoetan honela kalkula daiteke:

$$\int\int\int_{E_{xyz}} f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_{E_{r\theta z}} f(x(r,\theta), y(r,\theta), z)\, r\,dr\,d\theta\,dz.$$

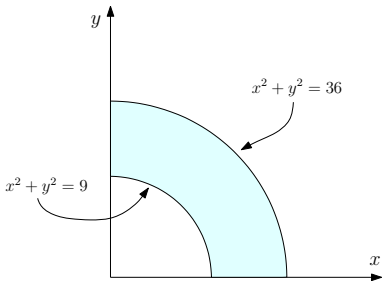
Ohartu, integral bikoitzekin gertatzen den bezala, koordenatu-aldaketa egiterakoan r termino bat agertzen zaigula integral barruan. Termino hori koordenatu-aldaketaren jakobiarrarekin erlazionatuta dago, hain zuzen ere, $|J(r,\theta,z)| = r$.

Adibidea. Kalkulatu $\int\int\int_E (x^2+y^2)z\,dV$ integrala, non E eremua lehenengo oktantean $x^2+y^2=9$ eta $x^2+y^2=36$ gainazal zilindrikoek, eta $z=0$ eta $z=4$ planoek mugatzen duten eremu solidoa baita.

Lehenik eta behin, E eremu solidoa eta bere proiekzioa irudikatuko ditugu xy planoan. 4.4 irudian ikus daitezke grafiko horiek.



(a) E eremu solidoa.



(b) E eremuaren proiekzioa xy planoan.

4.4 irudia. Ebazten ari garen integralaren E eremu solidoaren adierazpen grafikoa.

E eremua eta bere proiekzioa ikusita, argi dago koordenatu zilindrikoak erabiltzea egokia dela: $x^2+y^2=9$ eta $x^2+y^2=36$ gainazalek $r\in[3,6]$ dela adierazten dute; lehenengo oktantean egoteak $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ inplikatzen du; eta altuera 0 eta 4 bitartean egoteak $z\in[0,4]$ dela esan nahi du. Beraz, integralaren eremu solidoa koordenatu polarretan

$$E_{r\theta z} = \{(r,\theta,z) : 3\le r\le 6,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le 4\}$$

moduan definitzen da.

Orain, integratu behar dugun funtzioa koordenatu zilindrikoetan adieraziko dugu. Horretarako, $x = r\cos\theta$ eta $y = r\sin\theta$ koordenatu-aldaketa aplikatuko dugu:

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)z \Rightarrow f(r,\theta,z) = (r^2\cos^2\theta) + (r^2\sin^2\theta)z = r^2 z.$$

Bukatzeko, koordenatu polarreko integralaren adierazpenean jakobiarra gehituko dugu. Ondorioz,

$$\int\int\int_{E_{xyz}} (x^2+y^2)z\,dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_3^6 (r^2z)\,r\,dr\,dz\,d\theta.$$

Eta bagaude prest integrala kalkulatzeko:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_3^6 r^3z\,dr\,dz\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=3}^{r=6} z\,dz\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \frac{1215}{4}z\,dz\,d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1215}{4}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2430\,d\theta = 2430[\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \\ &= 1215\pi.\end{aligned}$$

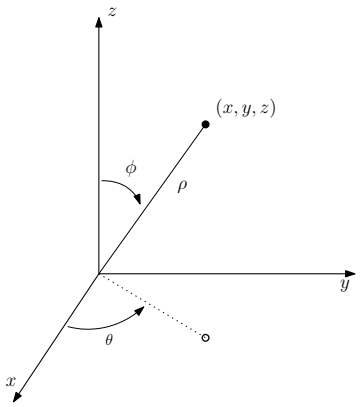
4.4 Integral hirukoitza koordenatu esferikoetan

E eremu solidoaren arabera edo hiru aldagaiko funtzioaren adierazpenaren arabera, errazagoa izan daiteke koordenatu esferikoetan (ρ,θ,ϕ) lan egitea kartesiarretan (x,y,z) baino.

Koordenatu kartesiarretatik esferikoetara pasatzeko, honako aldagai-aldaketa hau erabili behar da:

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta\,\sin\phi \\ y = \rho\,\sin\theta\,\sin\phi \\ z = \rho\,\cos\phi \end{cases}$$

non ρ aldagaia puntuaren eta koordenatu-jatorriaren arteko distantzia baita, θ aldagaia x ardatzaren eta xy planoan egindako puntuaren proiekzioaren arteko angelua izanik eta ϕ aldagaia z ardatz positiboaren eta puntuaren arteko angelua. 4.5 irudian grafikoki ikus daiteke koordenatu-aldaketa hori.



4.5 irudia. Koordenatu esferikoen adierazpen grafikoa.

Koordenatu kartesiarretan definituta dagoen hiru aldagaiko funtzio bat koordenatu esferikoetara pasatu daiteke $x(\rho,\theta,\phi) = \rho\,\cos\theta\,\sin\phi$, $y(\rho,\theta,\phi) = \rho\,\sin\theta\,\sin\phi$ eta $z(\rho,\phi) = \rho\,\cos\phi$ aldagai-aldaketa erabiliz,

$$f(x(\rho,\theta,\phi),y(\rho,\theta,\phi),z(\rho,\phi)) = f(\rho\,\cos\theta\,\sin\phi,\rho\,\sin\theta\,\sin\phi,\rho\,\cos\phi).$$

Definizioa. Izan bedi f hiru aldagaiko funtzio bat eta E eremu solido bat (E_{xyz} koordenatu kartesiarretan adierazita dagoenean eta $E_{\rho\theta\phi}$ koordenatu esferikoetan adierazita dagoenean). f funtzioaren integral hirukoitza honela kalkula daiteke koordenatu esferikoetan:

$$\int\int\int_{E_{xyz}} f(x,y,z)\,dV = \int\int\int_{E_{\rho\theta\phi}} f(x(\rho,\theta,\phi), y(\rho,\theta,\phi), z(\rho,\phi))\,\rho^2\,\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

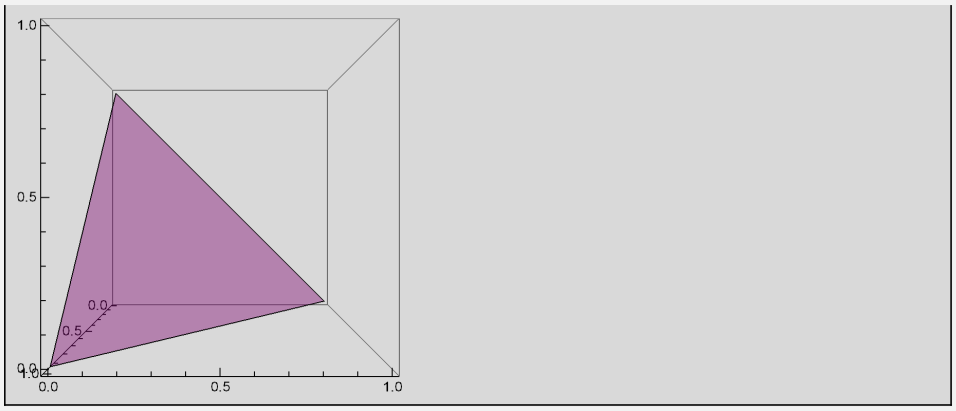
Ohartu koordenatu-aldaketa egiterakoan $\rho^2\,\sin\phi$ termino bat agertzen dela integral barruan. Termino hori koordenatu-aldaketaren jakobiarrarekin erlazionatuta dago; hain zuzen ere, $|J(\rho,\theta,\phi)| = \rho^2\,\sin\phi$.

4.5 Ordenagailuko praktikak

4.1 ariketa. Kalkulatu $\int\int\int_V (x+y+z)dxdydz$ integrala plano kartesiarrek eta $x+y+z=1$ planoak mugatzen duten eremuan.

Eremuaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot3D[x + y + z == 1, {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1}, Mesh → None,
ContourStyle → Directive[Purple, Opacity[0.4]], ViewPoint → Above]
```



z aldagaiaren integrazio-mugak lortuko ditugu planoaren ekuazioan z askatuz:

```
s = Solve[x + y + z == 1, z]
```

$$\{\{z \to 1 - x - y\}\}$$

```
z2 = z/.s[[1]]
```

$1 - x - y$

$x+y+z = 1$ planoaren eta OXY planoaren ebakidura kalkulatuko dugu. Eta y aldagaiaren integralaren mugak lortzen dira ebakidura horren y aldagaia askatuz:

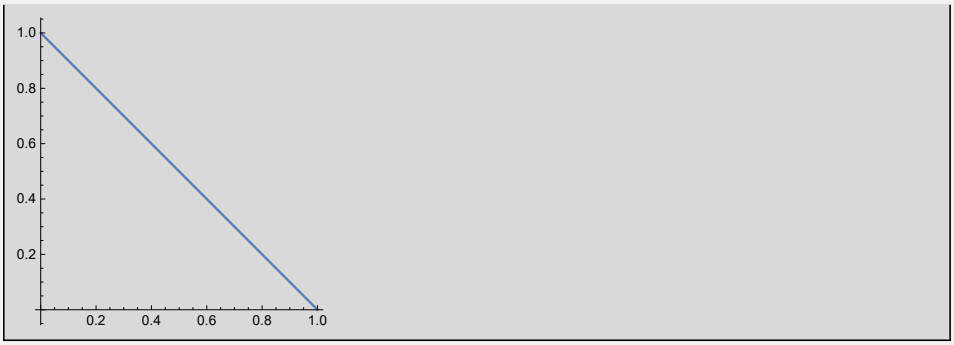
s = Solve[{x + y + z == 1, z == 0}]

$\{\{y \to 1 - x, z \to 0\}\}$

y2 = y/.s[[1]]

$1 - x$

Plot[y2, {x, 0, 1}, AspectRatio → Automatic]



x aldagaiaren mugak dira $x = 0$ eta $x = 1$. Beraz, integral hirukoitza honako hau da:

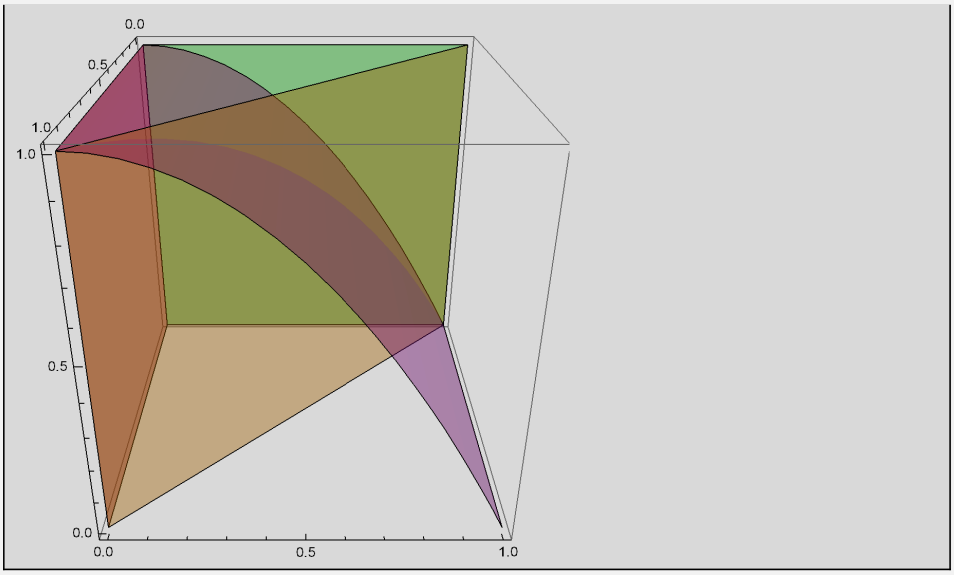
hirukoitza = $\int_0^1 \int_0^{y2} \int_0^{z2} (x + y + z) dz dy dx$

$\frac{1}{8}$

4.2 ariketa. Kalkulatu honako integral hau, $\int\int\int_V z dx dy dz$, V eremuaren erreferentzia-planoetako bi proiekzioak diren bi integral bikoitzetara murriztuz, eta V honako funtzio hauek mugatua izanik $0 \leq z \leq 1 - y^2$, $x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

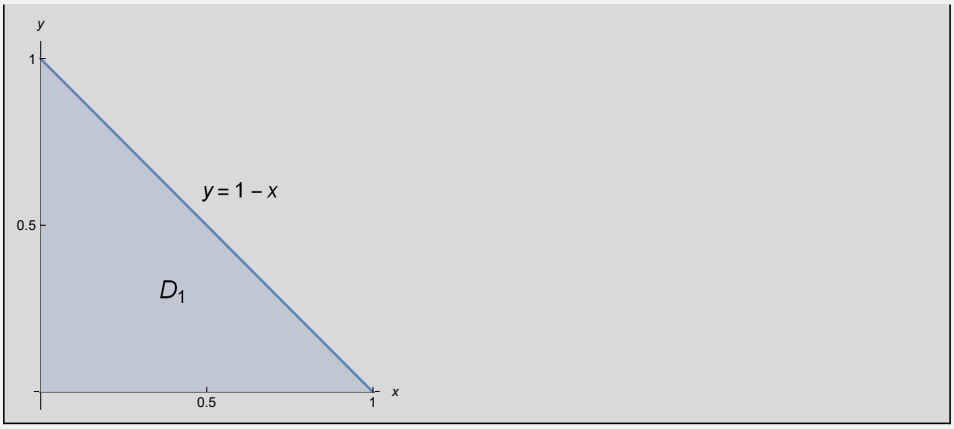
V eremuaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot3D[{z == 1 - y^2, x + y == 1, x == 0, y == 0}, {x, 0, 1}, {y, 0, 1},
{z, 0, 1}, Mesh → None, ContourStyle → {Directive[Purple, Opacity[0.4]],
Directive[Orange, Opacity[0.4]], Directive[Green, Opacity[0.4]],
Directive[Red, Opacity[0.4]]}, ViewPoint → {2, 0, 1}]
```



V eremuaren OXY planoko proiekzioa den integral bikoitzerako murrizketa egingo dugu. Horretarako, Vren OXY planoko D_1 proiekzio ortogonala irudikatuko dugu:

```
etiketak = {Text["D_1", {0.4, 0.3}, {0, 0}], Text["y = 1 - x", {0.6, 0.6}, {0, 0}]};
Plot[1 - x, {x, 0, 1}, AxesLabel → {x, y}, Ticks → {{0, 0.5, 1}, {0, 0.5, 1}},
AspectRatio → Automatic, Filling → Axis,
Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



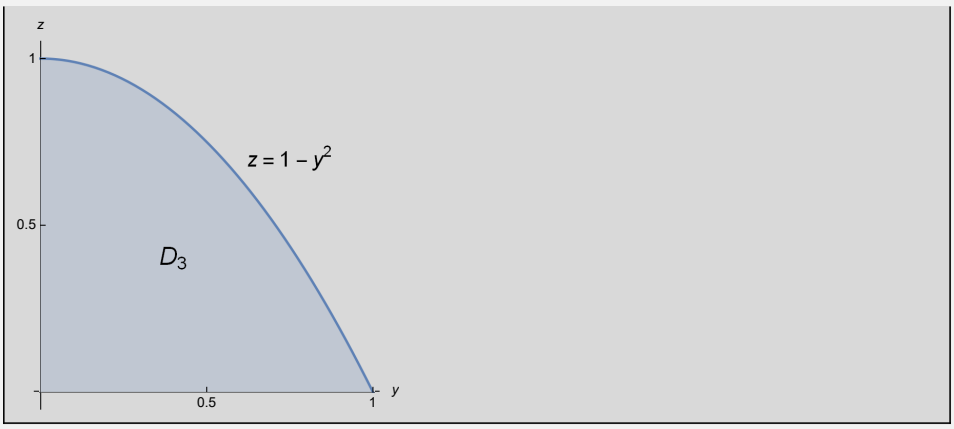
Integrazioko lehenengo aldagai gisa z hartuko dugu. z aldagaiaren limiteak dira $z = 0$ eta $z = 1 - y^2$, eta D_1 eremuaren limiteak dira $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ eta $y = 1 - x$. Hortaz, integrala honako hau izango da:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-y^2} z dz \right) dy \right) dx$$

$$\frac{11}{60}$$

Orain, V eremuaren OYZ planoko proiekzioa den integral bikoitzerako murrizketa egingo dugu. Horretarako, Vren OYZ planoko D_2 proiekzio ortogonala irudikatuko dugu:

```
etiketak = {Text["D3", {0.4, 0.4}, {0, 0}], Text["z = 1 - y^2", {0.75, 0.7}, {0, 0}]};
Plot[1 - y^2, {y, 0, 1}, AxesLabel → {y, z}, Ticks → {{0, 0.5, 1}, {0, 0.5, 1}},
AspectRatio → Automatic, Filling → Axis, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Integrazioko lehenengo aldagai gisa x hartuko dugu. x aldagaiaren limiteak dira $x = 0$ eta $x = 1 - y$, eta D_3 eremuaren limiteak dira $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ eta $z = 1 - y^2$. Hortaz, integrala honako hau izango da:

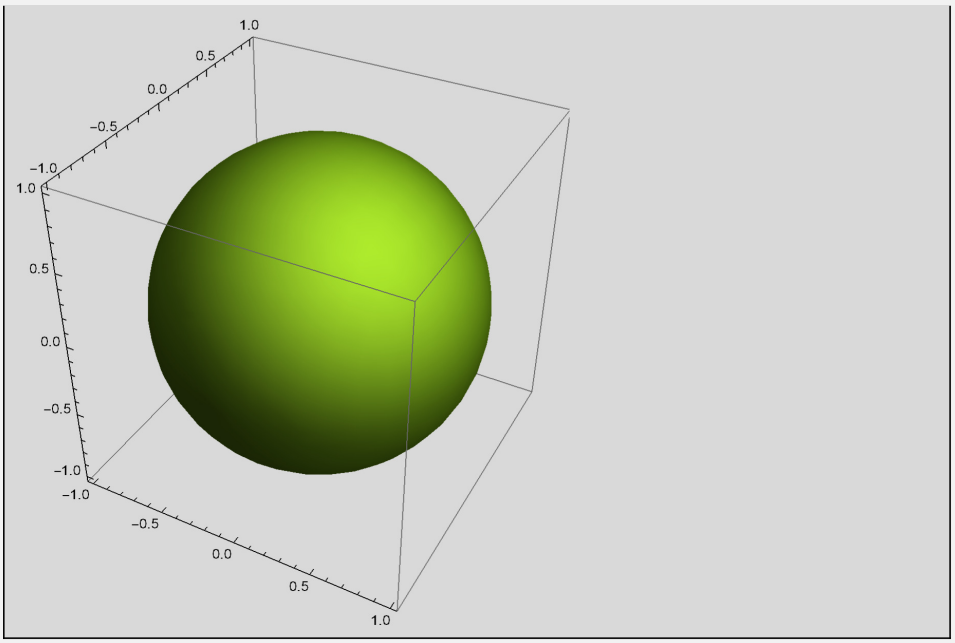
```
Integrate[Integrate[Integrate[z, {x, 0, 1 - y}], {z, 0, 1 - y^2}], {y, 0, 1}]
```

$$\frac{11}{60}$$

4.3 ariketa. Kalkulatu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ekuaziodun esferaren bolumena.

Eskatutako bolumena $\int\int\int_V 1 dxdydz$ integralaren bidez kalkulatzen da, V esfera izanik. Esferaren adierazpen grafikoa egingo dugu, esaterako $r = 1$ den kasuan:

```
ContourPlot3D[x^2 + y^2 + z^2==1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1},
AspectRatio → Automatic]
```



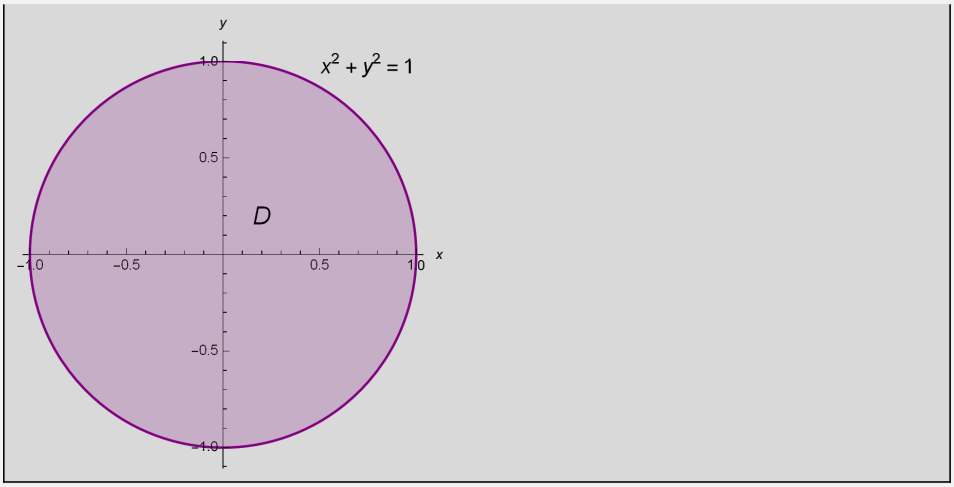
V bolumenaren OXY planoaren gaineko proiekzio ortogonala irudikatuko dugu, D eremua deituko duguna:

```
s = Solve[{x^2 + y^2 + z^2==1, z == 0}]
```

$$\left\{\left\{y \to -\sqrt{1 - x^2}, z \to 0\right\}, \left\{y \to \sqrt{1 - x^2}, z \to 0\right\}\right\}$$

```
y1 = y/.s[[1]];
y2 = y/.s[[2]];

etiketak = {Text["D", {0.2, 0.2}, {0, 0}], Text ["x^2 + y^2 = 1", {0.75, 0.98}, {0, 0}]} ;
Plot[{y1, y2}, {x, -1, 1}, PlotStyle → Purple, AxesLabel → {x, y},
AspectRatio → Automatic, Filling → {1 → {2}},
Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Eta z aldagaia ebatziko dugu ekuaziotik:

```
s = Solve[x^2 + y^2 + z^2==1, z]
```

$$\left\{\left\{z \to -\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}, \left\{z \to \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}\right\}$$

```
z1 = z/.s[[1]];
z2 = z/.s[[2]];
```

z hartuko dugu integrazioko lehenengo aldagai gisa. Haren limiteak honako hauek dira: $z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ eta $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Eta D eremuaren mugak dira $x = -1$ eta $x = 1$, eta $y = -\sqrt{1-x^2}$ eta $y = \sqrt{1-x^2}$.

```
∫_-1^1 (∫_-Sqrt[1-x^2]^Sqrt[1-x^2] (∫_-Sqrt[1-x^2-y^2]^Sqrt[1-x^2-y^2] dz) dy) dx
```

$$\frac{4\pi}{3}$$

Edo gauza bera dena:

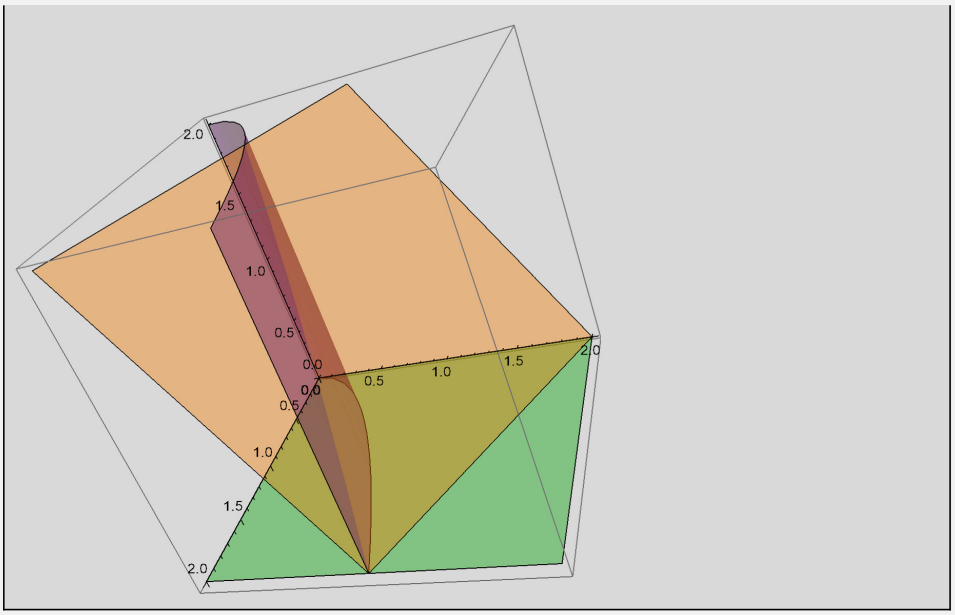
$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{y1}^{y2}\left(\int_{z1}^{z2} dz\right) dy\right) dx$$

$$\frac{4\pi}{3}$$

4.4 ariketa. Kalkulatu $2y^2 = x$ zilindro parabolikoak, eta $z = 0$ eta $x + 2y + z = 4$ planoek mugatzen duten solidoaren bolumena.

Funtzioen adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot3D[{x == 2y^2, x + 2y + z == 4, z == 0}, {x, 0, 2}, {y, 0, 2}, {z, 0, 2},
Mesh → None, ContourStyle → {Directive[Purple, Opacity[0.4]],
Directive[Orange, Opacity[0.4]], Directive[Green, Opacity[0.4]]},
ViewPoint → {2, 1, 1}, AxesOrigin → {0, 0, 0}]
```



V bolumenaren OXY planoko proiekzio ortogonala irudikatuko dugu, D eremua:

```
s = Solve[{x == 2y^2, x + 2y + z == 4, z == 0}]
```

$$\{\{x \to 8, y \to -2, z \to 0\}, \{x \to 2, y \to 1, z \to 0\}\}$$

```
y1 = y /. s[[1]];
y2 = y /. s[[2]];
```

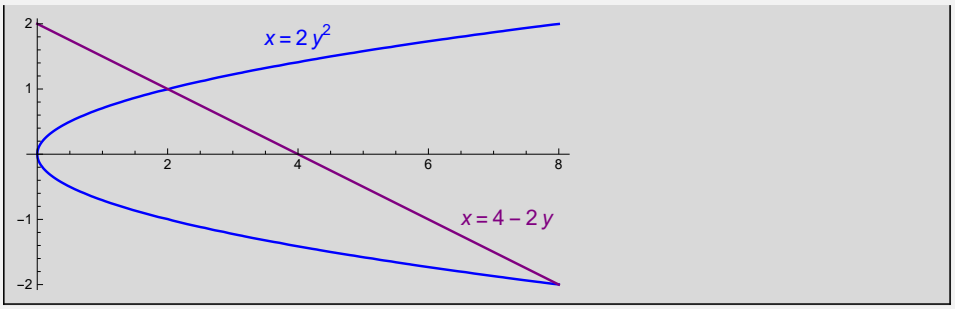
```
p = x + 2y + z == 4 /. z → 0
```

$$x + 2y == 4$$

```
Solve[p, x]
```

$$\{\{x \to -2(-2 + y)\}\}$$

```
etiketak = {Text ["x = 2y^2", {4, 1.8}, {0, 0}] , Text["x=4-2y", {7.2, -1}, {0, 0}]} ;
ContourPlot[{x==2y^2, x==4 - 2y}, {x, 0, 8}, {y, -3, 3}, PlotRange → {-2, 1},
ContourStyle → {Blue, Purple}, Frame → None, Axes → True,
AspectRatio → Automatic, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Integrazioko lehenengo aldagai gisa z hartuko dugu. z aldagaiaren mugak dira $z_1 = 0$ eta $z_2 = 4 - x - 2y$. Eremuaren mugak dira $y = -2$ eta $y = 1$, eta $x = 2y^2$ eta $x = 4 - 2y$. Hortaz, integral hirukoitza honela kalkula daiteke:

```
∫_-2^1 (∫_(2y^2)^(4-2y) (∫_0^(4-x-2y) 1 dz) dx) dy
```

$$\frac{81}{5}$$

Eta bila gabiltzan bolumenaren balioa $\frac{81}{5}\ u^3$ da.

4.5 ariketa. Kalkulatu $z = x^2 + 9y^2$ eta $z = 18 - x^2 - 9y^2$ parabolen barruko aldean geratzen den solidoaren bolumena.

Funtzioen adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
z1[x_, y_] = 18 - x^2 - 9y^2;

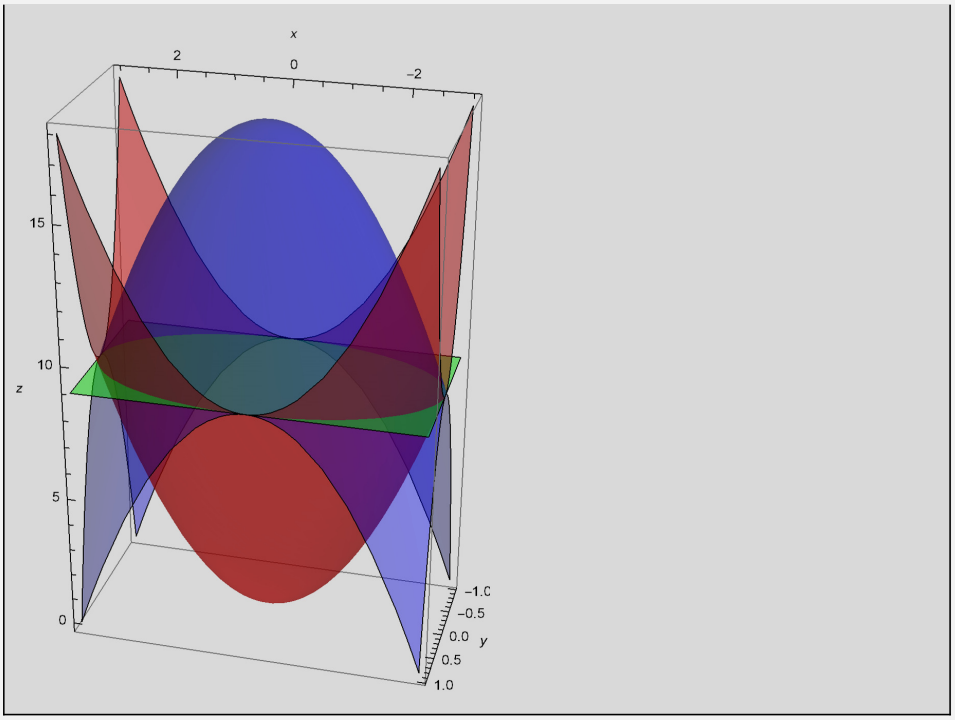
z2[x_, y_] = x^2 + 9y^2;


Plot3D[{z1[x, y], z2[x, y], 9}, {x, -3, 3}, {y, -1, 1}, BoxRatios → {2, 1, 3},

Mesh → False, AxesLabel → {x, y, z},

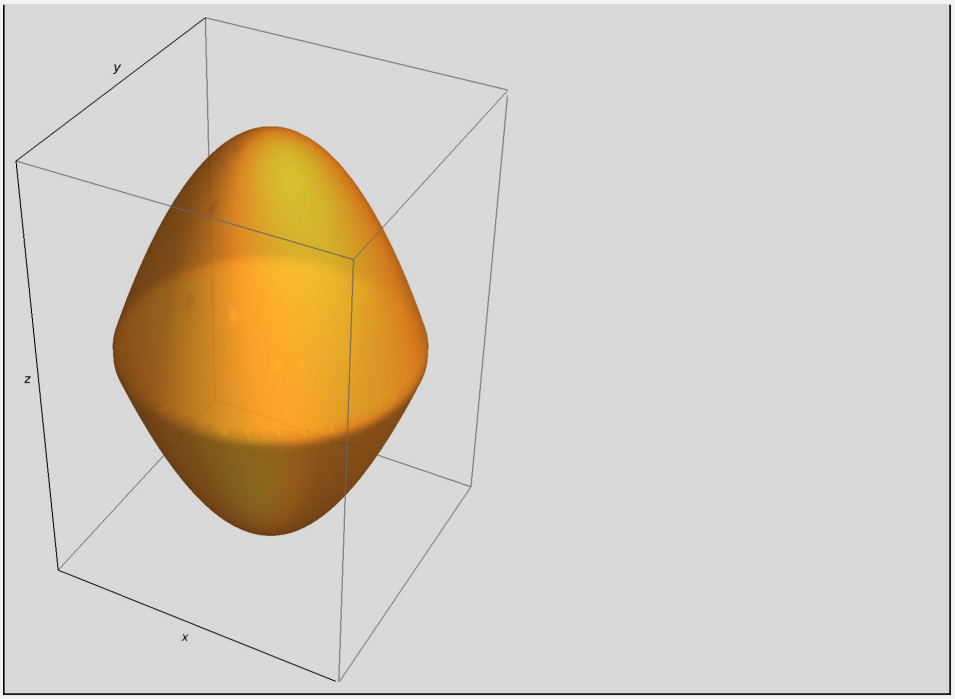
PlotStyle → {Directive[Blue, Opacity[0.4]], Directive[Red, Opacity[0.5]],

Directive[Green, Opacity[0.5]]}]
```



Integrazio-eremua $z_1(x, y) = x^2 + 9y^2$ eta $z_2(x, y) = 18 - x^2 - 9y^2$ funtzioek mugatzen dute:

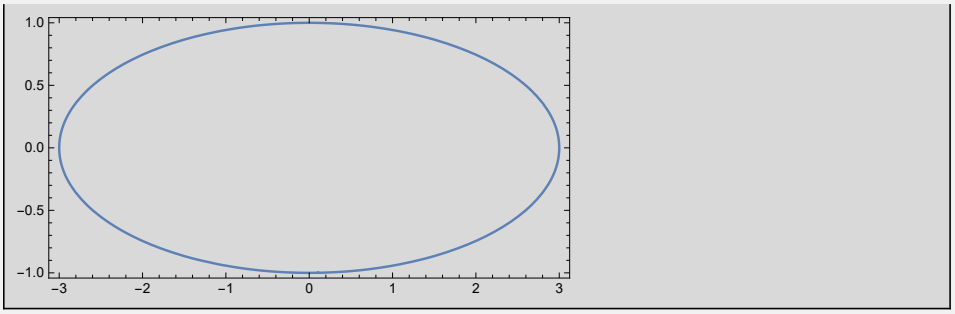
```
RegionPlot3D [x^2 + 9y^2 < z&&18 - x^2 - 9y^2 > z, {x, -3, 3}, {y, -1, 1}, {z, 0, 18},
Mesh → False, BoxRatios → {1, 1, 1.5},
AxesLabel → Automatic, Ticks → None, AxesEdge → {{-3, 3}, {-1, 1}, {0, 18}},
PlotStyle → Directive[Opacity[0.7]], PlotPoints → 50]
```




```
eremua = z1[x, y] - z2[x, y] == 0//Simplify
```

$$x^2 + 9y^2 == 9$$

```
ContourPlot [x^2 + 9y^2 == 9, {x, -3, 3}, {y, -1, 1}, AspectRatio → 1/2]
```



Integrazio-eremua $a = 3$ eta $b = 1$ ardatzerdiak dituen elipseak eta $z = 0$

planoak mugatzen dute. Parabolak koordenatu zilindrikoetan adieraziko ditugu, eta jakobiarraren balioa kalkulatuko dugu. Solido baten bolumena koordenatu zilindrikoetan kalkulatzeko, honako aldagai-aldaketa hauek egin behar dira: $x = r\,cost$, $y = r\sin t$, $z = z$. Eta jakobiarraren balioa kalkulatu behar da: $J(r,t,z) = \frac{D(x,y,z)}{D(r,t,z)}$. Eta kalkulatu beharreko integrala hau izango da: $\int\int\int_W J(r,t,z)drdtdz$:

```
x = r * 3 * Cos[t];
y = r * 1 * Sin[t];

z1p = z1[x, y]//Simplify
z2p = z2[x, y]//Simplify
```

$$-9\left(-2+r^2\right)$$

$$9r^2$$

```
jakob[r_, t_] = Det[Outer[D, {x, y}, {r, t}]]//Simplify
```

$$3r$$

```
z1[x, y] - z2[x, y] == 0//Simplify
```

$$r^2 == 1$$

Eta integrazio-eremua koordenatu zilindrikoetan izango da $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, eta $z_1 \leq z \leq z_2$, non $z_1 = 9r^2$ eta $z_2 = 18 - 9r^2$ baitira:

```
∫_0^(2π) ∫_0^1 ∫_(9r^2)^(18-9r^2) jakob[r, t] dz dr dt
```

$$27\pi$$

Beraz, bila gabiltzan bolumenaren balioa $27\pi\ u^3$ da.

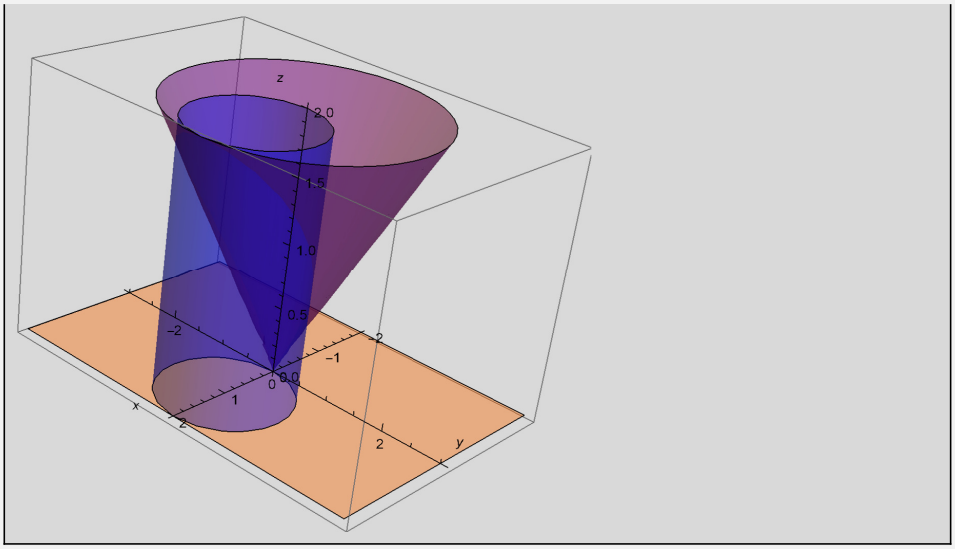
4.6 ariketa. Kalkulatu $z = 0$ planoak, $x^2+y^2 = 2x$ zilindroak eta $z^2 = x^2+y^2$ kono-erdiak mugatzen duten solidoaren bolumena, $z \geq 0$ izanik.

Funtzioak definituko ditugu, eta haien adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
zil[x_, y_, z_] = -2x + x^2 + y^2;

kono[x_, y_, z_] = x^2 + y^2 - z^2;

ContourPlot3D [{z == 0, -2x + x^2 + y^2, x^2 + y^2 - z^2},
{x, -2, 2}, {y, -3, 3}, {z, 0, 2},
BoxRatios → {2, 3, 2}, Mesh → False,
AxesLabel → {x, y, z}, AxesOrigin → {0, 0, 0},
ContourStyle → {Directive[Orange, Opacity[0.4]], Directive[Blue, Opacity[0.4]],
Directive[Purple, Opacity[0.5]]}]
```



Solidoa simetrikoa denez, OXY planoaren lehenengo koadranteko proiekzioaren erdia baino ez dugu kontuan hartuko:

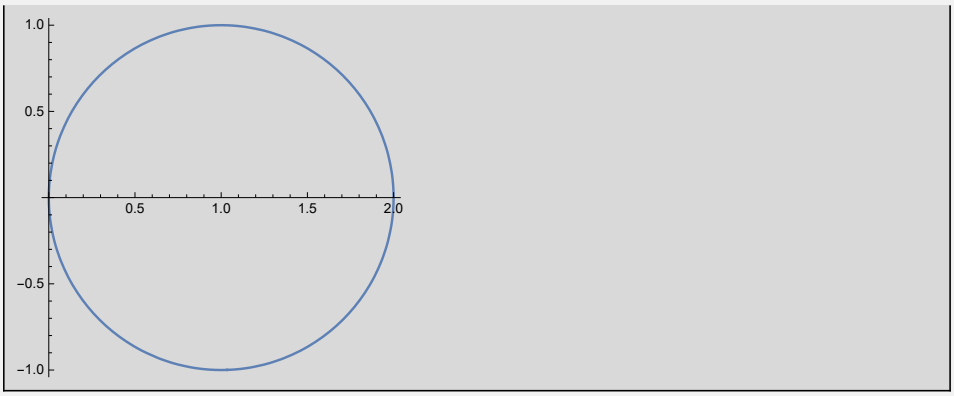
```
zil[x, y, z]/.z → 0
```

$$-2x + x^2 + y^2$$

```
kono[x, y, z]/.z → 0
```

$$x^2 + y^2$$

```
ContourPlot [x^2 + y^2 == 2x, {x, 0, 2}, {y, -1, 1},
AspectRatio → Automatic, Frame → None, Axes → True]
```



Integrazio-eremua $x^2 + y^2 = 2x$ zirkunferentziak mugatzen du. Kurbak koordenatu zilindrikoak erabilita adieraziko ditugu, eta jakobiarraren balioa kalkulatuko dugu:

```
x = r * Cos[t];
y = r * Sin[t];
ek1 = zil[x, y, 0] == 0//Simplify
ek2 = kono[x, y, 0] == 0//Simplify
```

$$r^2 == 2r\text{Cos}[t]$$

$$r == 0$$

```
Solve[ek1, r]
Solve[ek2, r]
```

$$\{\{r \to 0\}, \{r \to 2\text{Cos}[t]\}\}$$

$$\{\{r \to 0\}\}$$

```
ek3 = kono[x, y, z] == 0//Simplify
```

```
r^2 == z^2
```

```
jakob[r_, t_] = Det[Outer[D, {x, y}, {r, t}]]//Simplify
```

```
r
```

Integrazio-eremua honako hau da koordenatu zilindrikoetan: $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2\cos t$ eta $0 \leq r \leq z$:

```
2 ∫_0^(π/2) (∫_0^(2*Cos[t]) (∫_0^r jakob[r, t] dz) dr) dt
```

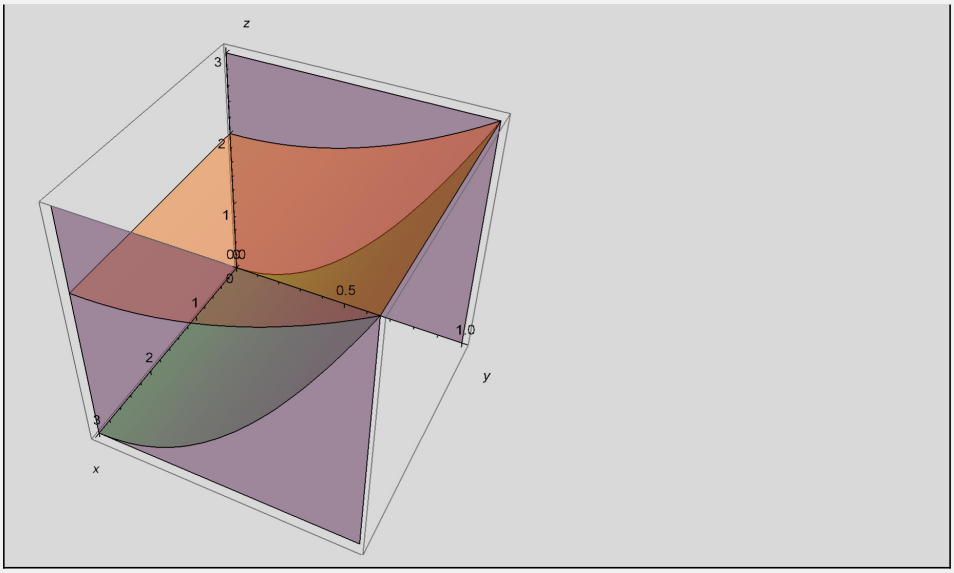
```
32/9
```

Bila gabiltzan bolumenaren balioa $\frac{32}{9}\ u^3$ da.

4.7 ariketa. Kalkulatu dentsitate konstantedun honako gorputz honen masa-zentroaren koordenatuak. Gorputza $z = y^2 + 2$, $z = 3y^2$, $x = 0$ eta $x = 3$ funtzioek mugatzen dute lehenengo oktantean.

Funtzioen adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot3D[{z == y^2 + 2, z == 3y^2, x == 0, x == 3}, {x, 0, 3}, {y, 0, 1}, {z, 0, 3},
ViewPoint → {2, 1, 2}, AxesOrigin → {0, 0, 0},
Mesh → False, AxesLabel → {x, y, z},
ContourStyle → {Directive[Orange, Opacity[0.4]], Directive[Green, Opacity[0.4]],
Directive[LightPurple, Opacity[0.5]],
Directive[LightPurple, Opacity[0.5]]}]
```



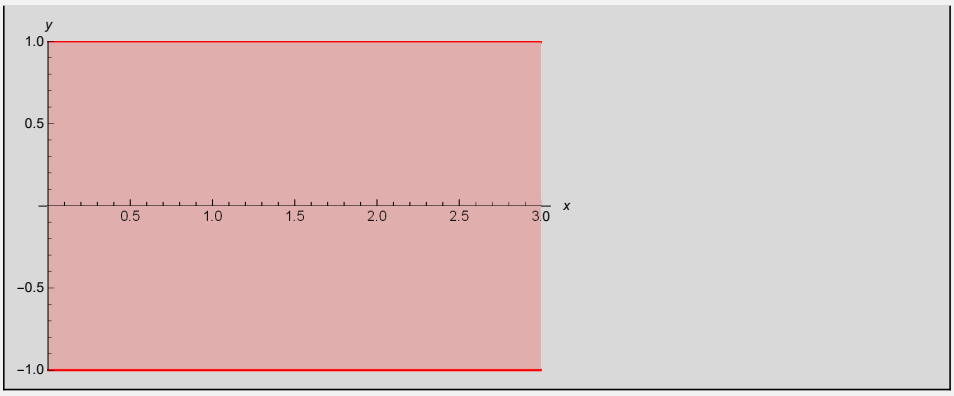
Bolumen horrek OXY planoan duen proiekzio ortogonala irudikatuko dugu, D eremua, alegia:

```
s = Solve[y^2 + 2 == 3y^2]
```

$$\{\{y \to -1\}, \{y \to 1\}\}$$

```
y1 = y/.s[[1]];
y2 = y/.s[[2]];

Plot[{y1, y2}, {x, 0, 3}, PlotRange → {y1, y2}, PlotStyle → Red,
AxesLabel → {x, y}, AspectRatio → Automatic,
Filling → Axis]
```



Integrazioko lehenengo aldagai gisa y aukeratuko dugu. Horrela, D eremuaren integrazio-mugak $x = 0$, $x = 3$, $y = -1$ eta $y = 1$ izango dira. Gainera, z aldagaia $z_1 = 3y^2$ eta $z_2 = y^2 + 2$ funtzioek mugatzen dute. Masa-zentroa kalkulatuko dugu $\rho(x, y, z) = 1$ dela kontuan hartuz. Kontuan izan behar dugu M masadun eta V bolumena duen solido baten masa-zentroa (x_m, y_m, z_m) honako era honetan kalkulatzen dela: $x_m = \frac{\int\int\int_V x dxdydz}{M}$, $y_m = \frac{\int\int\int_V y dxdydz}{M}$, $z_m = \frac{\int\int\int_V z dxdydz}{M}$, non $M = \int\int\int_V \rho(x, y, z) dxdydz$ eta ρ solidoaren dentsitatea baitira:

$$\boldsymbol{M = \int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{3y^2}^{y^2+2} dxdydz}$$

8

$$\mathbf{xm} = \frac{\int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{3y^2}^{y^2+2} x dxdydz}{M}$$

$\frac{7}{5}$

$$\mathbf{ym} = \frac{\int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{3y^2}^{y^2+2} y dxdydz}{M}$$

0

$$\mathbf{zm} = \frac{\int_0^3 \int_{-1}^1 \int_{3y^2}^{y^2+2} z dxdydz}{M}$$

$\frac{3}{2}$

$$\mathbf{masazentroa} = \{\mathbf{xm}, \mathbf{ym}, \mathbf{zm}\}$$

$\left\{\frac{7}{5}, 0, \frac{3}{2}\right\}$

Beraz, solidoaren masa-zentroa $\left(\frac{7}{5}, 0, \frac{3}{2}\right)$ da.

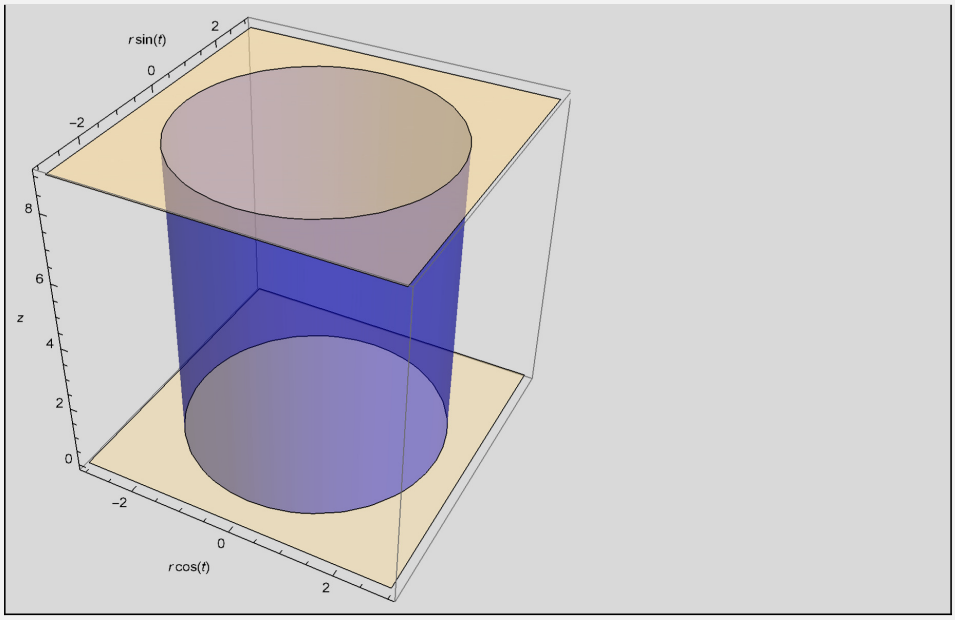
4.8 ariketa. Kalkulatu $\rho(x, y, z) = 1$ dentsitatedun eta $x^2 + y^2 = 6$ eta $z = 0$ eta $z = 9$ planoek mugatzen duten solido baten inertzia-momentu polarra I_0.

Inertzia-momentu polarra honako era honetan kalkulatzen da:

$$\int\int\int_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz.$$

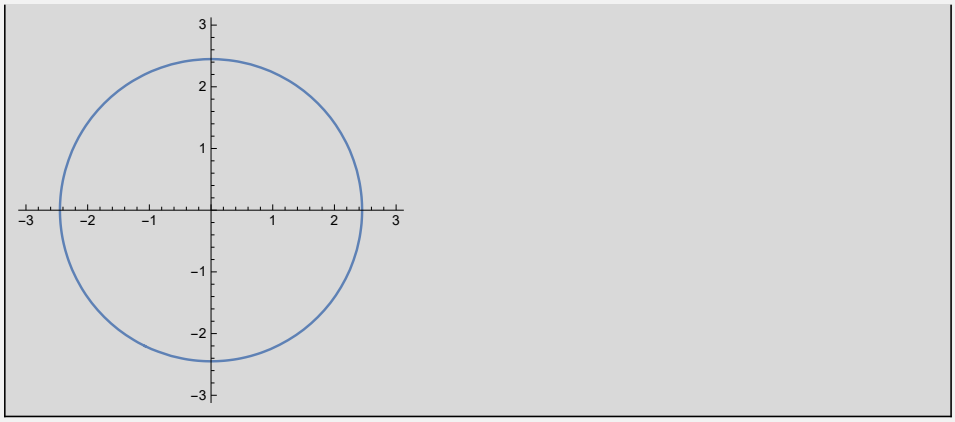
Solidoaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot3D [{x^2 + y^2 == 6, z == 0, z == 9} , {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, 0, 9},
AspectRatio → Automatic, Mesh → False, AxesLabel → {x, y, z},
ContourStyle → {Directive[Blue, Opacity[0.4]], Directive[LightYellow, Opacity[0.4]],
Directive[LightYellow, Opacity[0.5]]}]
```



Solidoak OXY planoan duen proiekzio ortogonalaren adierazpena egingo dugu. Integrazio-eremua $x^2 + y^2 = 6$ zirkunferentziak mugatzen du:

```
ContourPlot [x^2 + y^2 == 6, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, AspectRatio → Automatic,
Frame → None, Axes → True]
```



Kurbak koordenatu zilindrikoetan adieraziko ditugu, eta jakobiarraren balioa kalkulatuko dugu:

```
x = r * Cos[t];
y = r * Sin[t];
ek = x^2 + y^2 == 6//Simplify
```

$r^2 == 6$

```
Solve[ek, r]
```

$\{\{r \to -\sqrt{6}\}, \{r \to \sqrt{6}\}\}$

```
jakob[r_, t_] = Det[Outer[D, {x, y}, {r, t}]]//Simplify
```

r

```
funtzioa = x^2 + y^2 + z^2//Simplify
```

$r^2 + z^2$

Integrazio-eremua honako hau da koordenatu zilindrikoetan: $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 \leq r\sqrt{6}$, $0 \leq z \leq 9$:

```
Io = ∫_0^(2π) ∫_0^√6 ∫_0^9 funtzioa * jakob[r, t] dz dr dt
```

1620π

Inertzia-momentuaren balioa 1620π da.

5. kapitulua

Eremu eskalarrak eta bektore-eremuak

Kapitulu honetan eremu eskalarrekin eta bektore-eremuekin lan egingo dugu. Haien definizioak emango ditugu eta zenbait funtzio berezi definituko ditugu: gradientea, dibergentzia, Laplaziarra... Modu berean, funtzio horien zenbait propietate eta teorema aipatuko ditugu.

5.1 Definizioak

Hasteko, eremu eskalarren eta bektore-eremuen definizioak emango ditugu.

Definizioa. Izan bedi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ funtzioa. f funtzioari **eremu eskalar** deritzo.

Definizioa. Izan bedi $\mathbf{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ funtzioa. $\mathbf{F}$ funtzioari **bektore-eremu** deritzo. Notazioari dagokionez, bektore-eremuak $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z)$ gisa denotatzen dira.

5.2 Operadore diferentzialak

5.2.1 Gradientea

Definizioa. Izan bedi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, C^1 motako eremu eskalar bat. f-ren gradientea $\overrightarrow{\nabla f}$ gisa denotatzen da, eta honako bektore-eremu honen bitartez definitzen da:

$$\overrightarrow{\nabla f} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ non}$$
$$\overrightarrow{\nabla f}(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

Gradienteak badauka intepretazio geometriko bat: $\overrightarrow{\nabla f}$ bektoreak funtzioaren hazkunde handieneko norabidea adierazten du puntu jakin batean.

Adibidea. Kalkulatu $f(x, y, z) = xyz + e^z$ eremu eskalarraren gradientea.

Gradientea kalkulatzeko f-ren deribatu partzialak kalkulatu behar ditugu:

$$\overrightarrow{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy + e^z).$$

Definizioa. $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ bektore-eremu bat kontserbakorra dela esaten da, baldin eta f eremu eskalar bat existitzen bada non $\overrightarrow{\nabla f} = \overrightarrow{\mathbf{F}}$ betetzen baita. f-ri funtzio potentziala deritzo.

5.2.2 Dibergentzia

Definizioa. Izan bedi $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 motako bektore-eremu bat. $\overrightarrow{\mathbf{F}}$-ren dibergentzia $div(\overrightarrow{\mathbf{F}})$ gisa denotatzen da, eta honako eremu eskalar honen bitartez definitzen da:

$$div(\overrightarrow{\mathbf{F}}) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ non}$$
$$div(\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z)) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z).$$

Dibergentziak badauka interpretazio fisiko bat: bolumen bat inguratzen duen azaleran sartze-fluxuaren eta irteera-fluxuaren arteko desberdintasuna neurtzen du. Dibergentzia positiboa baldin bada, *iturri* bat dagoela esan nahi du; eta, dibergentzia negatiboa baldin bada, *putzu* bat dagoela. Aldiz, dibergentzia zero baldin bada, sartzen den eta irteten den fluxu kantitatea berdina dela esan nahi du.

Adibidea. Kalkulatu $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (z^2, e^{xy}, \sin(xz))$ bektore-eremuaren dibergentzia.

Lehenik eta behin, F_1, F_2, F_3 identifikatuko ditugu:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = (z^2, e^{xy}, \sin(xz)) = (F_1, F_2, F_3).$$

Orain, $\overrightarrow{\mathbf{F}}$-ren dibergentzia kalkulatuko dugu:

$$div(\overrightarrow{\mathbf{F}}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 + x\, e^{xy} + x\, \cos(xz) = x\, (e^{xy} + \cos(xz)).$$

5.2.3 Errotazionala

Definizioa. Izan bedi $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ C^1 motako bektore-eremu bat. $\overrightarrow{\mathbf{F}}$-ren errotazionala $\overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})}$ gisa denotatzen da, eta honako bektore-eremu honen bitartez definitzen da:

$$\overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \text{ non}$$
$$\overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})}(x, y, z) = \nabla \times \overrightarrow{\mathbf{F}}.$$

∇ nabla operadorea da, eta $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ gisa definitzen da. Beraz, biderketa bektoriala erabiliz, errotazionala modu honetan kalkula daiteke:

$$\overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{vmatrix}.$$

Eta biderketa bektoriala garatzen baldin badugu, lortzen dugun adierazpena honako hau da:

$$\overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Errotazionalak badauka interpretazio fisiko bat: gainazaleko puntu bakoitzean bektore-eremuaren zirkulazioari buruzko informazioa ematen digu.

Adibidea. Kalkulatu $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (z^2, e^{xy}, \sin(xz))$ bektore-eremuaren errotazionala.

Lehenik eta behin, F_1, F_2, F_3 identifikatuko ditugu:

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = (z^2, e^{xy}, \sin(xz)) = (F_1, F_2, F_3).$$

Orain, errotazionala kalkulatzeko behar ditugun deribatu partzialak kalkulatuko ditugu:

- $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z.$
- $\frac{\partial F_2}{\partial x} = y\, e^{xy}, \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0.$
- $\frac{\partial F_3}{\partial x} = z\, \cos(xz), \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0.$

Bukatzeko, balioak ordezkatuko ditugu, eta $\overrightarrow{\mathbf{F}}$-ren errotazionala kalkulatuko dugu:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})} &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \\ &= (0-0, 2z - z\, \cos(xz), y\, e^{xy} - 0) = \\ &= (0, z(2-\cos(xz)), y\, e^{xy}). \end{aligned}$$

5.2.4 Laplaziarra

Definizioa. Izan bedi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, C^2 motako eremu eskalar bat. f-ren laplaziarra Δf gisa denotatzen da, non Δ operadorea ∇^2 gisa definitzen baita. Laplaziarra honako eremu eskalar honen bitartez definitzen da:

$$\Delta f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ non}$$
$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Fisikako problema asko Laplaceren ekuazioaren bitartez menderatuta daude. Ekuazio hori deribatu partzialetako ekuazio bat da, non $\Delta f(x,y,z) = 0$ betetzen baita.

5.2.5 Emaitza teorikoak

Atal honetan, aurretik definitu ditugun kontzeptuei lotutako zenbait emaitza teoriko emango ditugu.

Propietateak

Izan bitez f eta g bi eremu eskalar eta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Orduan, honako propietate hauek betetzen dira:

- $\overrightarrow{\nabla(\alpha f + \beta g)} = \alpha\overrightarrow{\nabla f} + \beta\overrightarrow{\nabla g}$.
- $\overrightarrow{\nabla(f \cdot g)} = f \cdot \overrightarrow{\nabla g} + g \cdot \overrightarrow{\nabla f}$.
- $\overrightarrow{\nabla\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{g\cdot\overrightarrow{\nabla f} - f\cdot\overrightarrow{\nabla g}}{g^2}$.

Izan bitez $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ eta $\overrightarrow{\mathbf{G}}$ bi bektore-eremu eta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Orduan, honako propietate hauek betetzen dira:

- $div(\alpha\overrightarrow{\mathbf{F}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{G}}) = \alpha \cdot div(\overrightarrow{\mathbf{F}}) + \beta \cdot div(\overrightarrow{\mathbf{G}})$.
- $div(f \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}}) = f \cdot div(\overrightarrow{\mathbf{F}}) + < \overrightarrow{\nabla f}, \overrightarrow{\mathbf{F}} >$.
- $rot(\alpha\overrightarrow{\mathbf{F}} + \beta\overrightarrow{\mathbf{G}}) = \alpha \cdot rot(\overrightarrow{\mathbf{F}}) + \beta \cdot rot(\overrightarrow{\mathbf{G}})$.
- $rot(f \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}}) = f \cdot rot(\overrightarrow{\mathbf{F}}) + \overrightarrow{\nabla f} \times \overrightarrow{\mathbf{F}}$.

Proposizioak

1. Proposizioa. Izan bedi $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, C^2 motako eremu eskalar bat. Orduan, honako hau betetzen da:

$$\overrightarrow{rot(\overrightarrow{\nabla f})}(x, y, z) = (0, 0, 0),$$

hau da, gradientearen errotazionala bektore nulua da.

2. Proposizioa. Izan bedi $\overrightarrow{\mathbf{F}} : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, C^2 motako bektore-eremu bat. Orduan, honako hau betetzen da:

$$div\left(\overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})}(x, y, z)\right) = 0,$$

hau da, errotazional baten dibergentzia zero da.

Teoremak

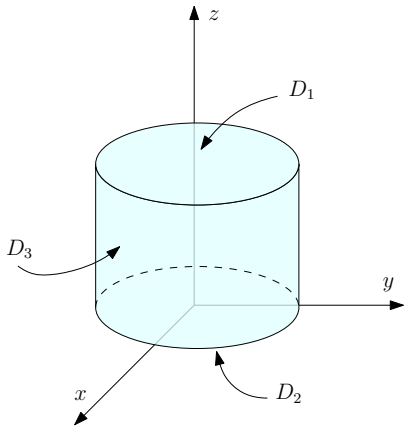
Teorema (Dibergentzia). Izan bitez D gainazal bat, non $\mathbf{n}$ gainazal horren bektore normala baita, E gainazal horrek mugatzen duen solidoa, eta $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ C^1 motako bektore-eremu bat. Orduan,

$$\int\int\int_E div(\overrightarrow{\mathbf{F}})\, dV = \int\int_D \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}\, dA.$$

Teorema horrek solido baten gaineko bektore-eremu baten dibergentzia eta gainazal baten gaineko bektore-eremuaren fluxua erlazionatzen ditu.

Adibidea. Kalkulatu $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) = (xz, -y^2, xz)$ bektore-eremuaren fluxua $x^2 + y^2 \leq 1$ eta $0 \leq z \leq 3$ mugatzen duten gainazalean zehar.

Lehenik eta behin, gure D gainazala irudikatuko dugu. 5.1 irudian D gainazala irudikatu da, 3 azpi-gainazaletan banatuta dagoena: goiko tapa (D_1), beheko tapa (D_2) eta alboa (D_3).



5.1 irudia. D gainazalaren banaketa D_1, D_2 eta D_3 gainazaletan.

D gainazalaren gaineko fluxua kalkulatzeko azpi-gainazal bakoitzaren fluxua kalkula dezakegu, eta gero balioak batu. Hasteko, D_1 gainazalaren fluxua kalkulatuko dugu. Gainazal hori

$$D_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 3\}$$

gisa defini daiteke, eta haren bektore normala $\boldsymbol{n_1} = (0, 0, 1)$ da. Orduan, gainazal horretan dagoen fluxua hau da:

$$\int\int_{D_1} \overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z = 3) \cdot \boldsymbol{n_1}\, dA = \int\int_{D_1} (3x, -y^2, 3x) \cdot (0, 0, 1)\, dA = \int\int_{D_1} 3x\, dA.$$

Eta kalkuluak errazteko, koordenatu polarretan idatziko dugu:

$$\int\int_{D_1} 3x\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r\, \cos\theta\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos\theta \left[r^3\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = [\sin\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0.$$

Antzeko modu batean, D_2 gainazaleko fluxua kalkula daiteke. Gainazal hori

$$D_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

gisa defini daiteke, eta haren bektore normala $\boldsymbol{n_2} = (0, 0, 1)$ da. Kasu honetan, integralaren kalkulua oso erraza da; izan ere:

$$\int\int_{D_2} \overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z = 0) \cdot \boldsymbol{n_2}\, dA = \int\int_{D_2} (0, -y^2, 0) \cdot (0, 0, 1)\, dA = 0.$$

Bukatzeko, D_3 gainazaleko fluxua kalkulatu behar dugu. Badakigu zilindro batek sortzen duen solidoaren parametrizazioa honako hau dela koordenatu polarretan:

$$D(r, \theta, z) = (r\, \cos\theta, r\, \sin\theta, z).$$

Gure kasuan, zilindroaren gainazalaren parametrizazioa nahi dugu, non $r = 1$ baita. Beraz, D_3 gainazalaren parametrizazioa

$$D_3(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

da, non $\theta \in [0, 2\pi)$ eta $z \in [0, 3]$. Gainazal horren bektore normala ez da tribiala, aurreko kasuetan bezala. Honako hau da bektore normala:

$$\boldsymbol{n_3} = \left|\frac{\partial D_3}{\partial\theta} \times \frac{\partial D_3}{\partial z}\right| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Orain, prest gaude D_3 gainazaleko fluxua kalkulatzeko:

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_3} \overrightarrow{\mathbf{F}}(\cos\theta, \sin\theta, z) \cdot \boldsymbol{n_3}\, dA = \\
&= \int\int_{D_3} (z\, \cos\theta, -\sin^2\theta, z\, \cos\theta) \cdot (\cos\theta, \sin\theta, 0)\, d\theta\, dz = \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(z\, \cos^2\theta - \sin^3\theta\right)\, d\theta\, dz = \\
&= \int_0^3 \left(z \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) dz = \\
&= \int_0^3 z\pi\, dz = \left[\pi\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=3} = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Beraz, D gainazalaren gaineko fluxua hau da:

$$\begin{aligned}
\int\int_D \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}\, dA = \int\int_{D_1} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{n_1}\, dA + \int\int_{D_2} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{n_2}\, dA + \int\int_{D_3} \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \boldsymbol{n_3}\, dA = \\
= 0 + 0 + \frac{9\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Zeregin hori beste modu batean egin daiteke, dibergentziaren teorema aplikatuz. Horretarako, lehenik eta behin, $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ bektore-eremuaren dibergentzia kalkulatuko dugu:

$$div(\overrightarrow{\mathbf{F}}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial(xz)}{\partial x} + \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xz)}{\partial z} = z - 2y + x.$$

Teorema aplikatuz, fluxua kalkulatzeko $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ bektore-eremuaren dibergentziaren integrala kalkulatu behar da D gainazala mugatzen duen E solidoan. Kasu honetan, solido hori zilindro bat da. Beraz,

$$\int\int\int_E div(\overrightarrow{\mathbf{F}})\,dV = \int\int\int_E (z-2y+x)\,dA.$$

Kalkuluak errazteko, koordenatu zilindrikoak erabiliko ditugu:

$$\begin{aligned}
\int\int\int_E (z-2y+x)\,dA = & \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^3 (z-2r\,\sin\theta + r\,\cos\theta) r\,dz\,d\theta\,dr = \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(z\,r - 2r^2\,\sin\theta + r^2\,\cos\theta\right)\,dz\,d\theta\,dr = \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left[\frac{z^2}{2}r - 2r^2 z\,\sin\theta + r^2 z\,\cos\theta\right]_{z=0}^{z=3} d\theta\,dr = \\
&= \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{9}{2}r - 6r^2\,\sin\theta + 3r^2\,\cos\theta\,d\theta\,dr = \\
&= \int_0^1\left[\frac{9}{2}r\,\theta + 6r^2\,\cos\theta + 3r^2\,\sin\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr = \\
&= \int_0^1 \frac{9}{2}r\,2\pi + 6r^2 - 6r^2\,dr = \int_0^1 9\pi\,r\,dr = \left[\frac{9\pi\,r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ikus daiteke aurreko emaitza berdina lortzen dela.

5.3 Ordenagailuko praktikak

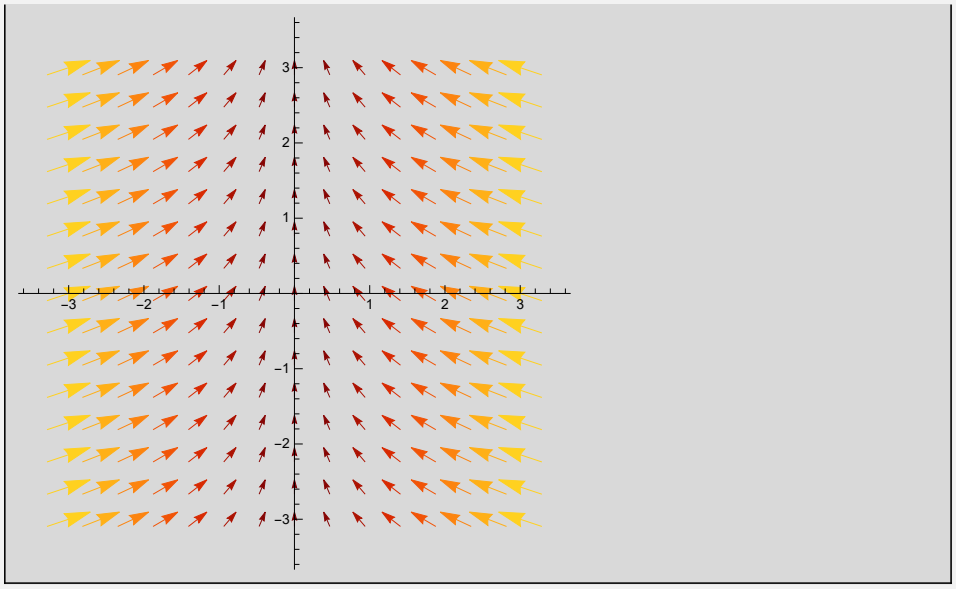
5.1 ariketa. Irudikatu $(-x, 1)$ eremu bektoriala.

Mathematican eremu bektorial bidimentsional bat irudikatzeko VectorPlot agindua erabiltzen da: $VectorPlot\left[\{V_x, V_y\}, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}\right]$. Eta hiru dimentsioko eremu bektoriala irudikatzeko, aldiz, honako hau:

$$VectorPlot3D\left[\{V_x, V_y, V_z\}, \{x, x_{min}, x_{max}\}, \{y, y_{min}, y_{max}\}, \{z, z_{min}, z_{max}\}\right].$$

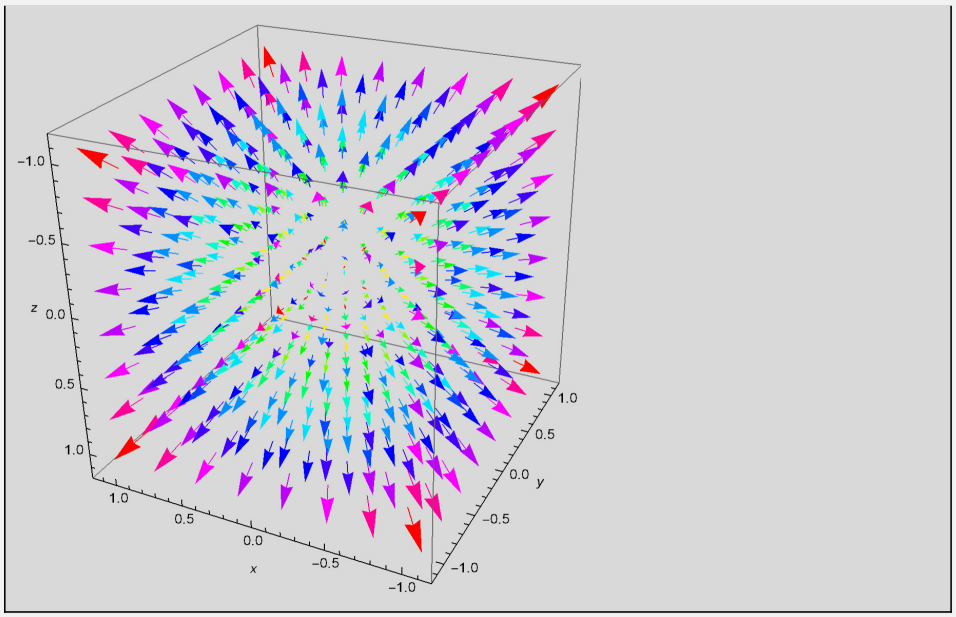
VectorPlot[{$-x$, 1}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, Axes → True, Frame → False,

VectorColorFunction → "SolarColors"]



5.2 ariketa. Irudikatu (x, y, z) eremu bektoriala.

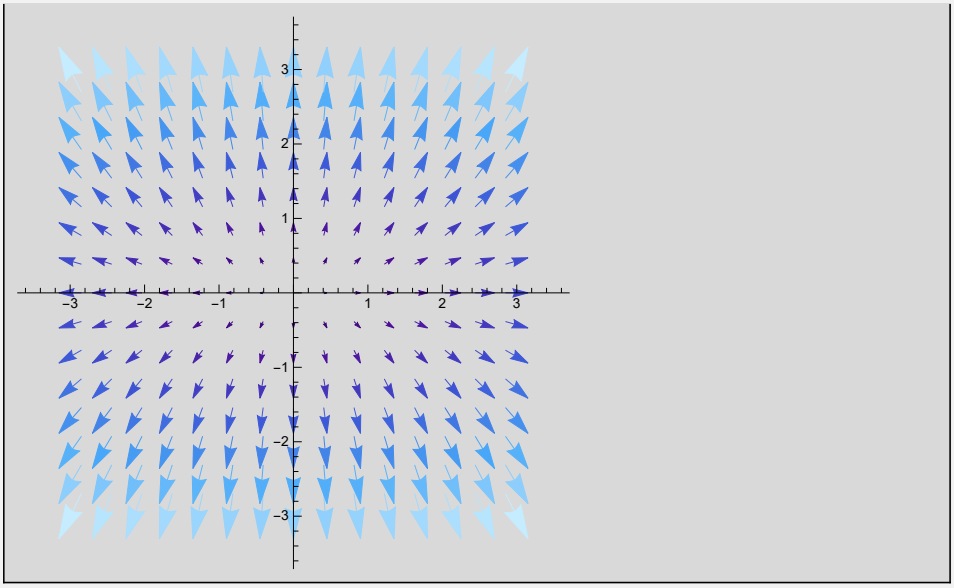
```
VectorPlot3D[{x, y, z}, {x, −1, 1}, {y, −1, 1}, {z, −1, 1}, Axes → True,
AxesLabel → {x, y, z}, VectorColorFunction → Hue, VectorScale → Medium]
```



5.3 ariketa. Egin $(x, 2y)$ eta $(-2y, x)$ eremu bektorialen adierazpen grafikoa, eta haien korronte-lerroena. Eta probatu perpendikularrak direla.

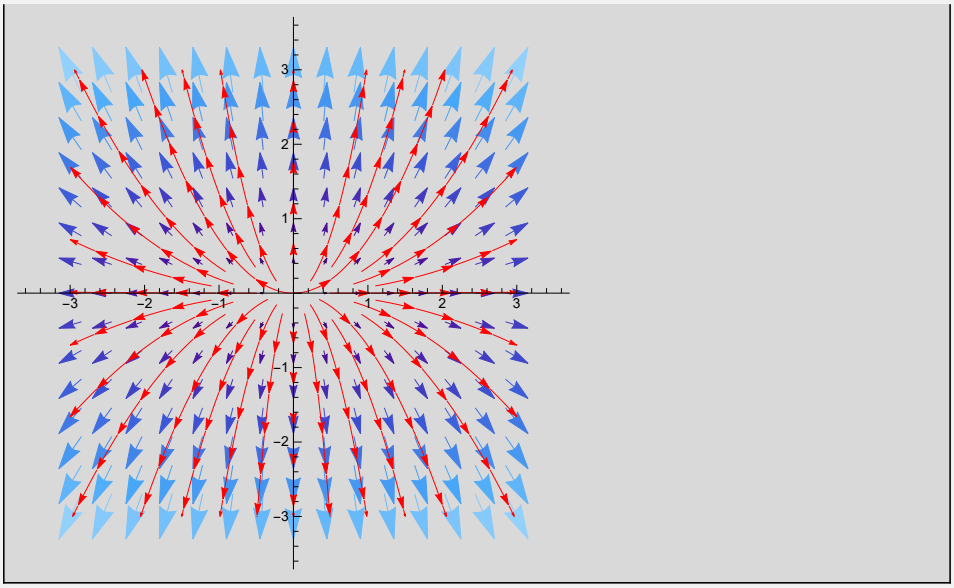
$(x, 2y)$ eremu bektorialaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
S1 = VectorPlot[{x, 2y}, {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, VectorScale → Medium,
Axes → True, Frame → False, VectorColorFunction → "DeepSeaColors"]
```



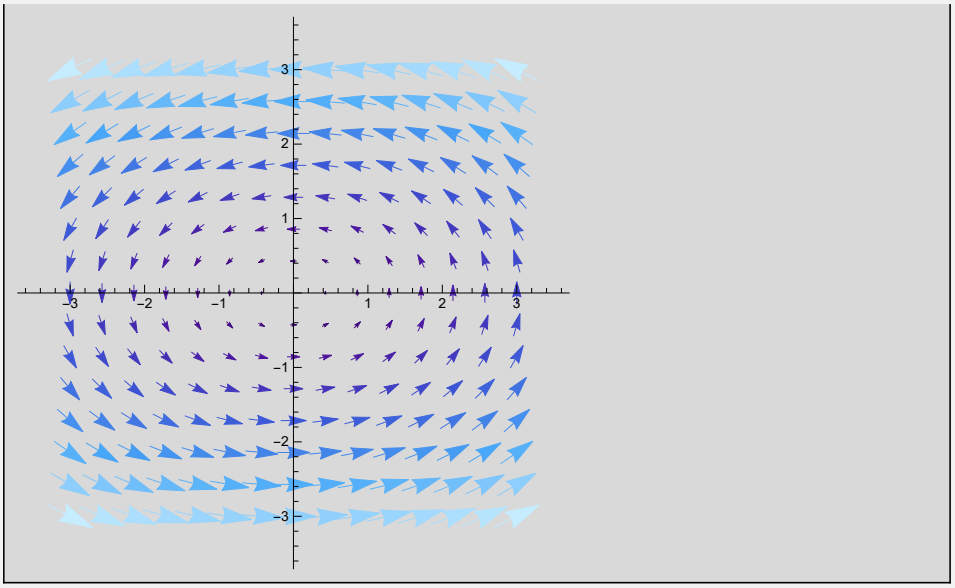
Eta orain eremu bektorialaren eta korronte-lerroen, hau da, bien adierazpena egingo dugu:

```
VectorPlot[{x, 2y}, {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, VectorScale → Medium,
VectorColorFunction → "DeepSeaColors", Axes → True, Frame → False,
StreamPoints → 30, StreamStyle → Red]
```



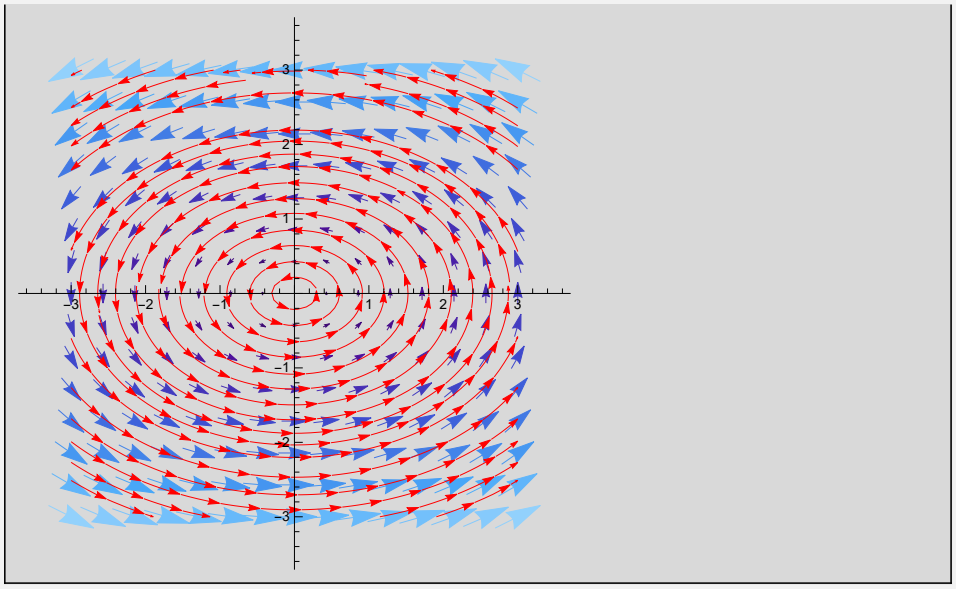
Orain, $(-2y, x)$ eremu bektorialen adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
VectorPlot[{-2y, x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, VectorScale → Medium, Axes → True,
Frame → False, VectorColorFunction → "DeepSeaColors"]
```



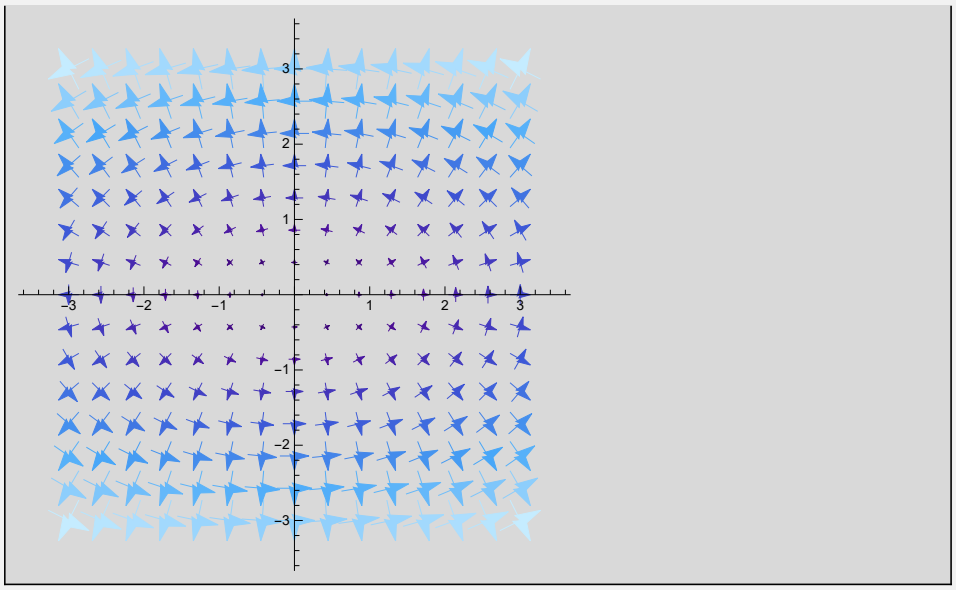
Eta lehengo moduan, eremu-lerroak eta haien korronte-lerroak irudikatuko ditugu orain:

```
VectorPlot[{-2y, x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, VectorScale → Medium,
VectorColorFunction → "DeepSeaColors", Axes → True,
Frame → False, StreamPoints → 30, StreamStyle → Red]
```



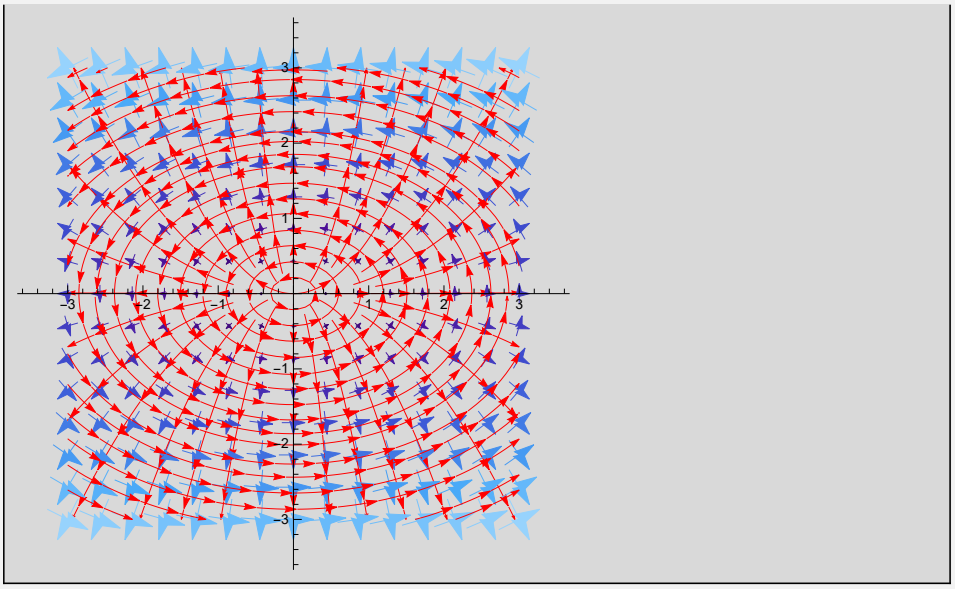
Bukatzeko, eremu bektorial biak irudikatuko ditugu grafiko berean:

```
VectorPlot[{{x, 2y}, {-2y, x}}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, Axes → True,
Frame → False, VectorColorFunction → "DeepSeaColors"]
```



Eta eremu bektorial biak eta haien korronte-lerroak ere bai:

```
VectorPlot[{{x, 2y}, {−2y, x}}, {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, Axes → True,
VectorColorFunction → "DeepSeaColors", Frame → False,
StreamPoints → 30, StreamStyle → Red]
```



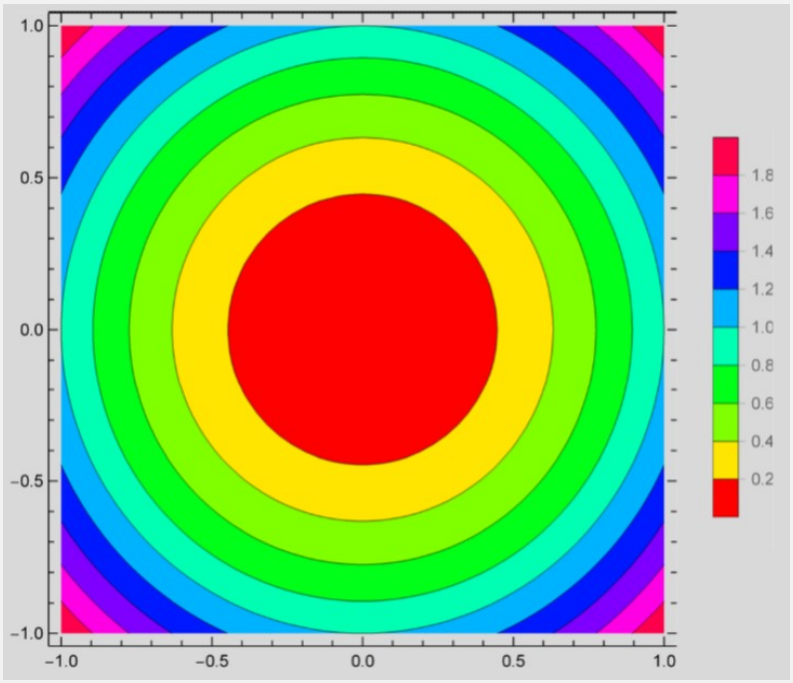
Eta aurreko grafikoetan ikusten den moduan, eremu bektorial biak elkarrekiko ortogonalak dira.

5.4 ariketa. Irudikatu honako funtzio hauek eta haien maila-kurbak: $f(x,y) = x^2 + y^2$ eta $g(x,y) = \sin(xy)$.

$f(x,y)$ funtzioaren maila-kurbak irudikatzeko, honako agindu hau erabiltzen da: $ContourPlot[f[x,y], \{x,a,b\}, \{y,c,d\}]$. Era berean, hiru aldagaitako funtzio bat dugunean, $g(x,y,z)$, haren maila-kurbak irudikatzeko honako agindu hau erabiltzen da: $ContourPlot3D[f[x,y], \{x,a,b\}, \{y,c,d\}, \{z,k,m\}]$.

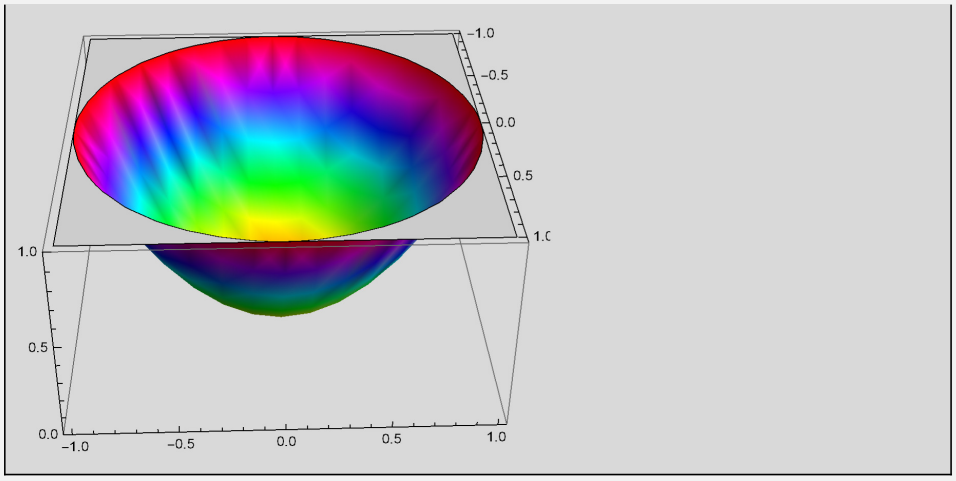
$f(x,y) = x^2 + y^2$ funtzioa definituko dugu, eta haren maila-kurbak irudikatuko ditugu:

```
f[x_, y_] = x^2 + y^2;
ContourPlot[f[x, y], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}, PlotLegends → Automatic,
ColorFunction → Hue]
```



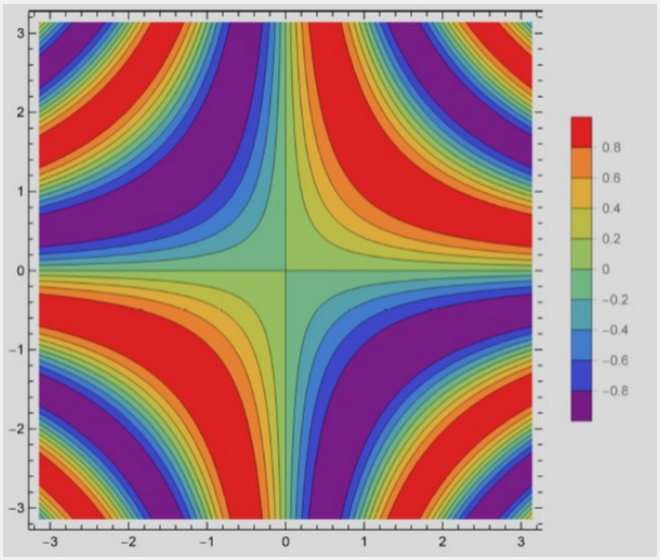
$f(x, y)$ funtzioaren adierazpen grafikoa ere egingo dugu:

```
Plot3D[f[x, y], {x, −1, 1}, {y, −1, 1}, PlotRange → {0, 1},
AspectRatio → Automatic, Mesh → False, ColorFunction → Hue,
BoxRatios → {1, 1, 0.5}]
```

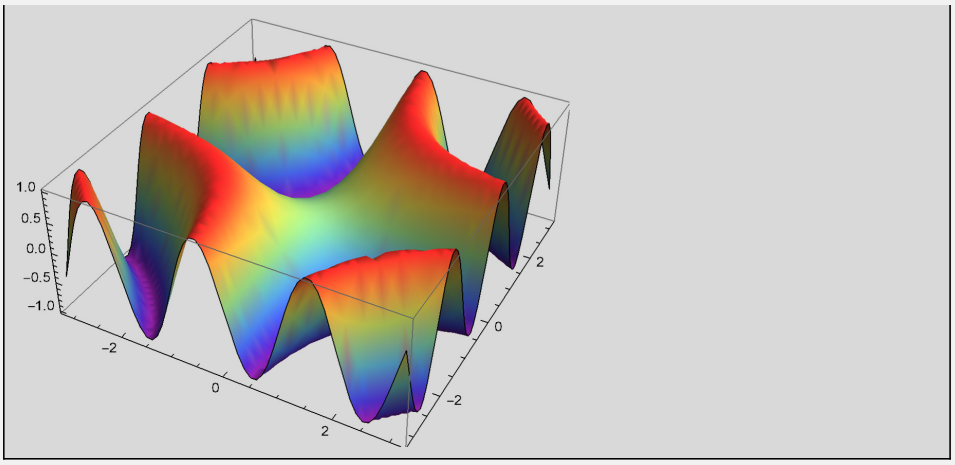


$g(x, y)$ funtzioarekin ere berdina egingo dugu. Definitu egingo dugu, haren maila-kurbak irudikatuko ditugu, eta haren adierazpen grafikoa ere egingo dugu:

```
g[x_, y_] = Sin[x * y];
ContourPlot[g[x, y], {x, -π, π}, {y, -π, π}, PlotLegends → Automatic,
ColorFunction → "Rainbow"]
```

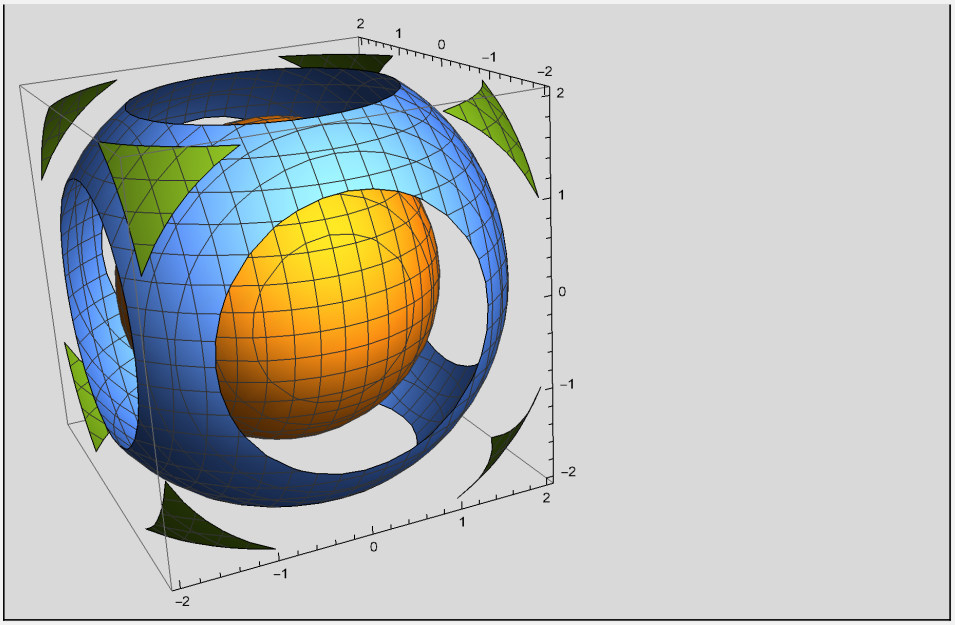



```
Plot3D[g[x, y], {x, -π, π}, {y, -π, π}, Mesh → False, ColorFunction → "Rainbow"]
```



5.5 ariketa. Irudikatu $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ gainazalaren maila-kurbak. Funtzioa definituko dugu, eta haren maila-kurbak irudikatuko ditugu:

```
f[x_, y_, z_] = x^2 + y^2 + z^2;
ContourPlot3D[f[x, y, z], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2},
ColorFunctionScaling → True]
```



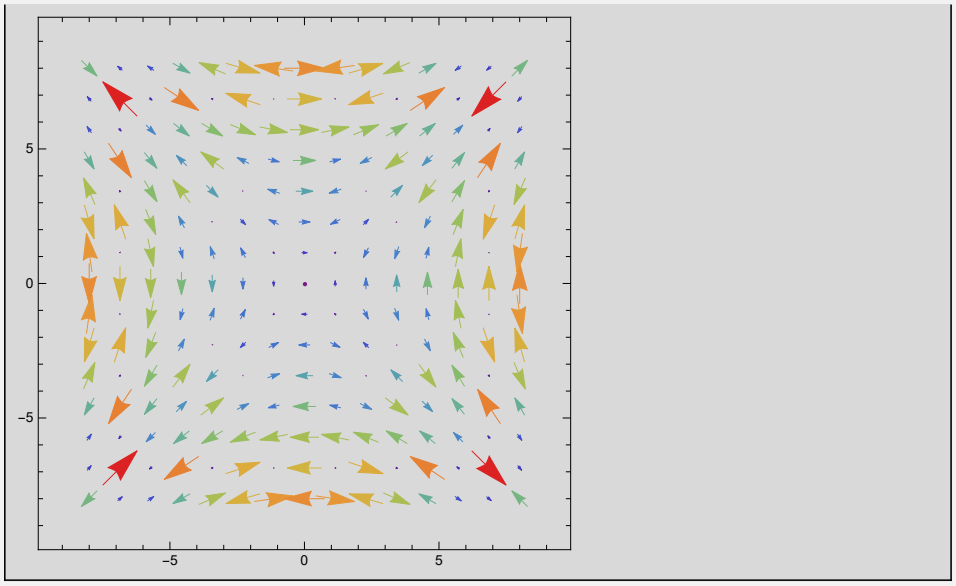
5.6 ariketa. $u(x, y) = \sin(xy)$ funtzioa emanik, kalkulatu haren gradiente-bektorea eta irudikatu. Grafikoki ikusi $P(3, \pi)$ puntuko maila-kurbarekiko perpendikularra dela.

Funtzioa definituko dugu, eta haren gradientea kalkulatu eta irudikatuko dugu:

```
u[x_, y_] = Sin[x * y];
gradientea = Grad[u[x, y], {x, y}]
```

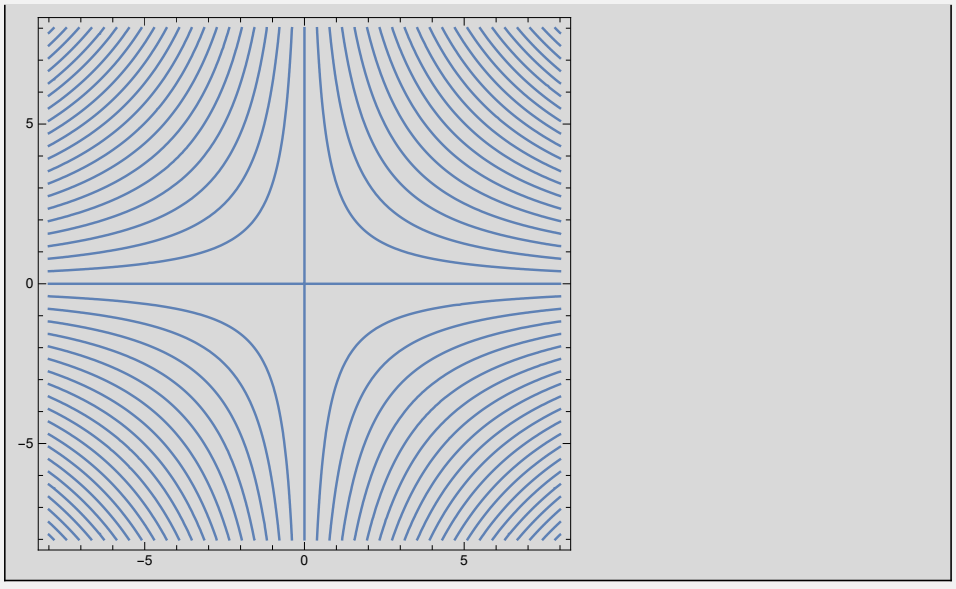
$\{y\mathrm{Cos}[xy], x\mathrm{Cos}[xy]\}$

```
s1 = VectorPlot[gradientea, {x, −8, 8}, {y, −8, 8}, VectorScale → Medium,
VectorColorFunction → "Rainbow"]
```



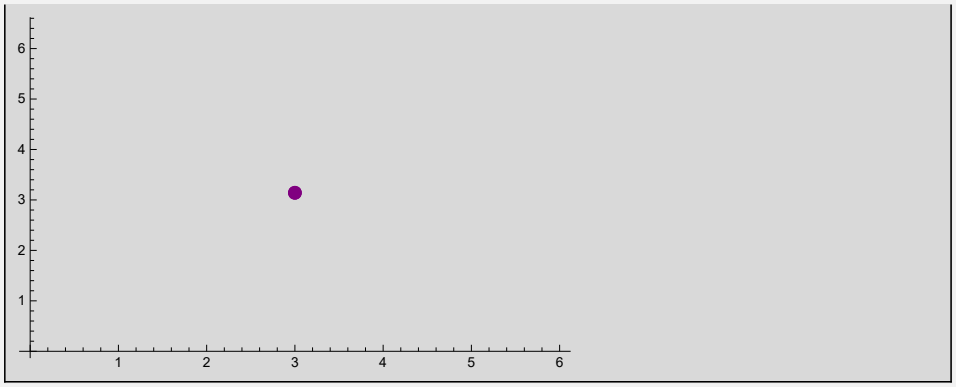
Maila-kurbak irudikatuko ditugu:

```
s2 = ContourPlot[u[x, y] == 0, {x, −8, 8}, {y, −8, 8}]
```



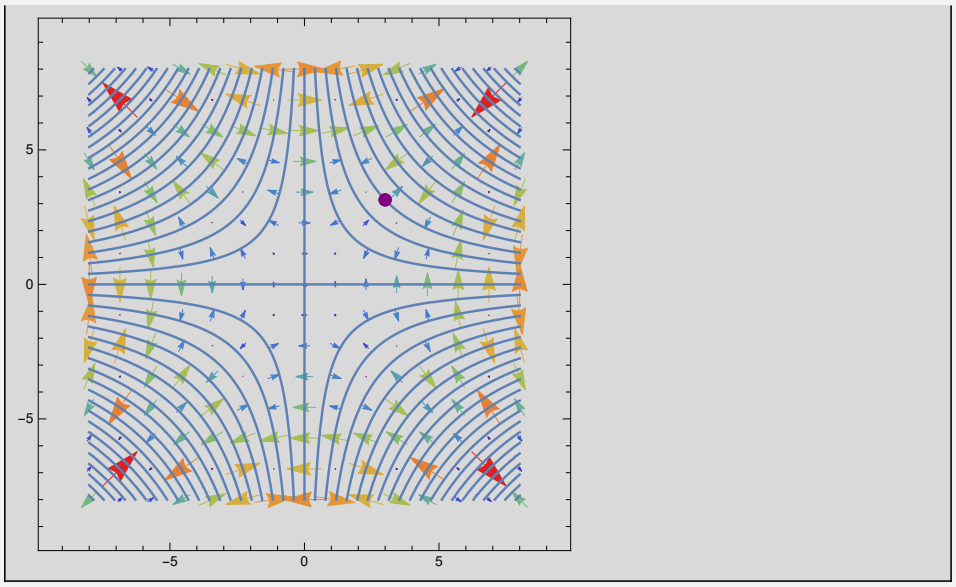
Orain $P(3, \pi)$ puntua irudikatuko dugu:

```
s3 = ListPlot[{{3, Pi}}, PlotStyle → {Purple, PointSize[0.025]}]
```



Eta bukatzeko, grafiko berean adieraziko ditugu bektore gradientea, maila-kurbak eta puntua; eta P puntuko maila-kurba eta gradientea perpendikularrak direla ikusiko dugu:

Show[s1, s2, s3]

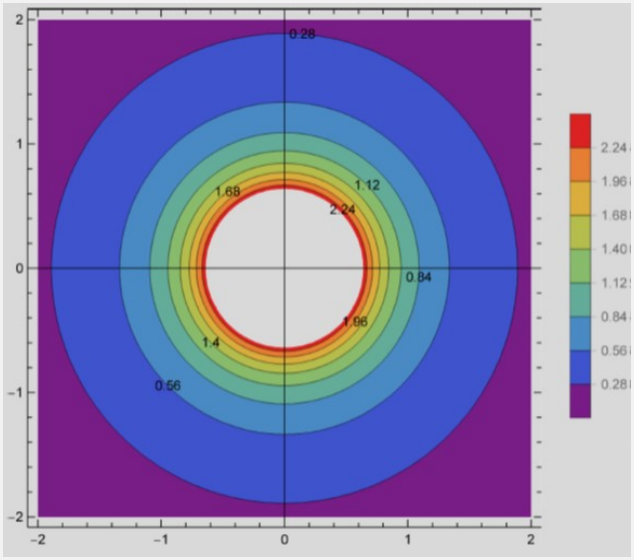


5.7 ariketa. Har dezagun plaka metaliko bat eta jatorrian kokatutako beroiturri bat. Tenperaturen banaketa honako funtzio honen bidez emanda dator: $T(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. a) Kalkulatu lerro isotermikoen ekuazioa. b) Zein da hazkunde maximoko norabidea? c) Zein da fluxu-lerroen ekuazioa? Zehaztu daitezke?

a) Kalkulatu lerro isotermikoen ekuazioa.

Lerro isotermikoak $T(x, y)$ funtzioaren maila-kurbak dira.

```
T[x_, y_] = 1/(x^2+y^2);
ContourPlot[T[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotLegends → Automatic,
Contours → 8, ColorFunction → "Rainbow", Axes → True,
ContourLabels → True]
```



Lerro isotermikoak jatorrian zentroa duten zirkunferentziak dira. Erradioa handitu ahala, tenperatura jaitsi egiten da. Jatorrian bero-fokua dagoenez, jatorritik urrundu ahala tenperatura jaitsi egiten da.

b) Planoko (x, y) puntu bakoitzean, hazkunde maximoko norabidea gradienteak emana dator, zeina lerro isotermikoekiko perpendikularra baita.

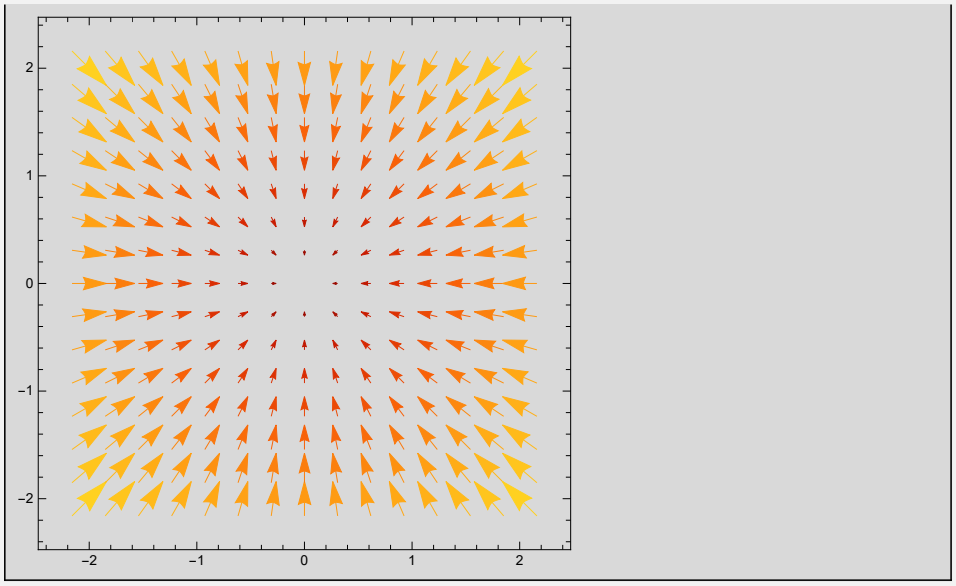
Gradientea kalkulatuko dugu:

```
gradientea = Grad[T[x, y], {x, y}]
```

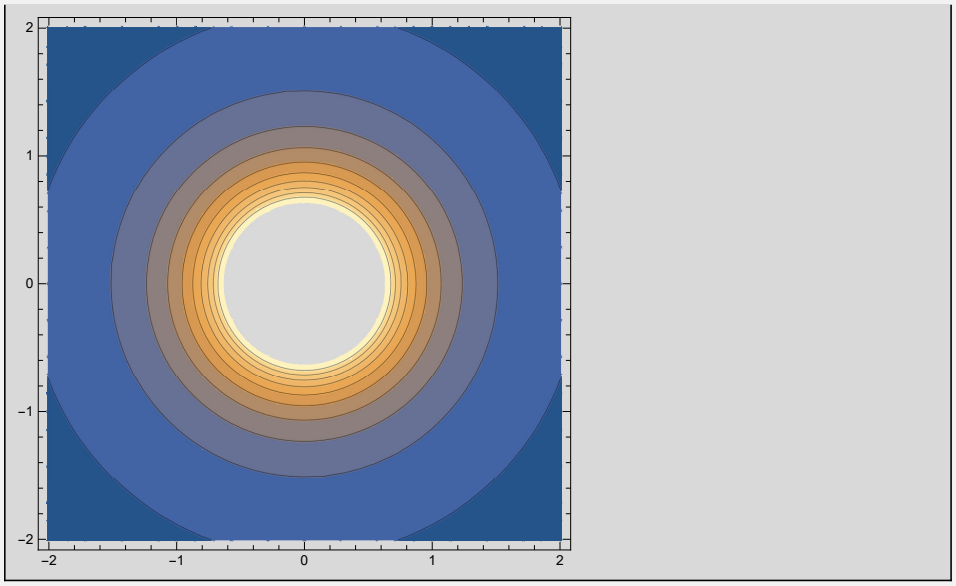
$$\left\{-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\right\}$$

Gradientea $\nabla T(x, y) = \frac{-2x}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{(-2y)}{x^2+y^2}\vec{j} \equiv -x\vec{i} - y\vec{j}$.

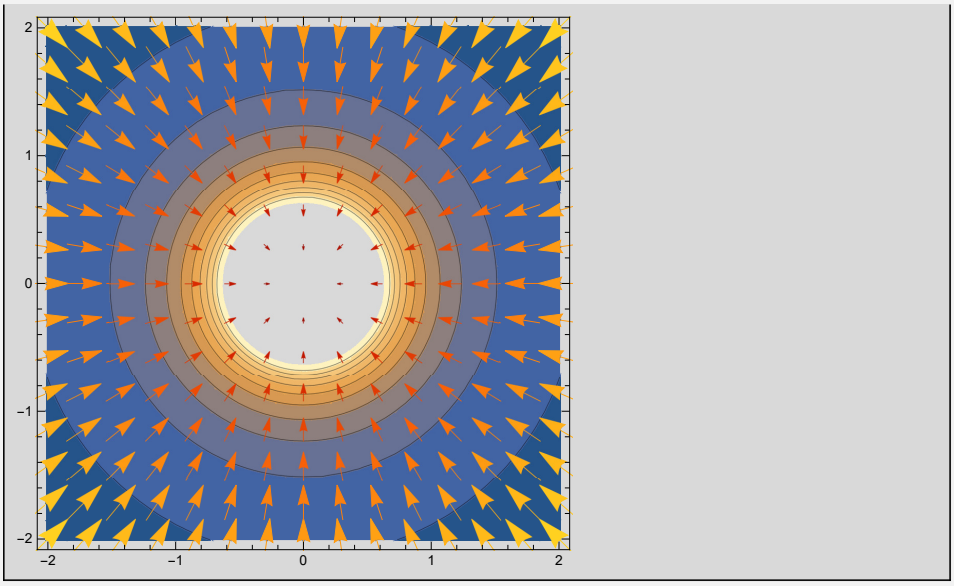
```
g1 = VectorPlot[{-x, -y}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, VectorScale → Medium,
VectorColorFunction → "SolarColors"]
```




```
g2 = ContourPlot[T[x, y], {x, −2, 2}, {y, −2, 2}, Contours → 10]
```

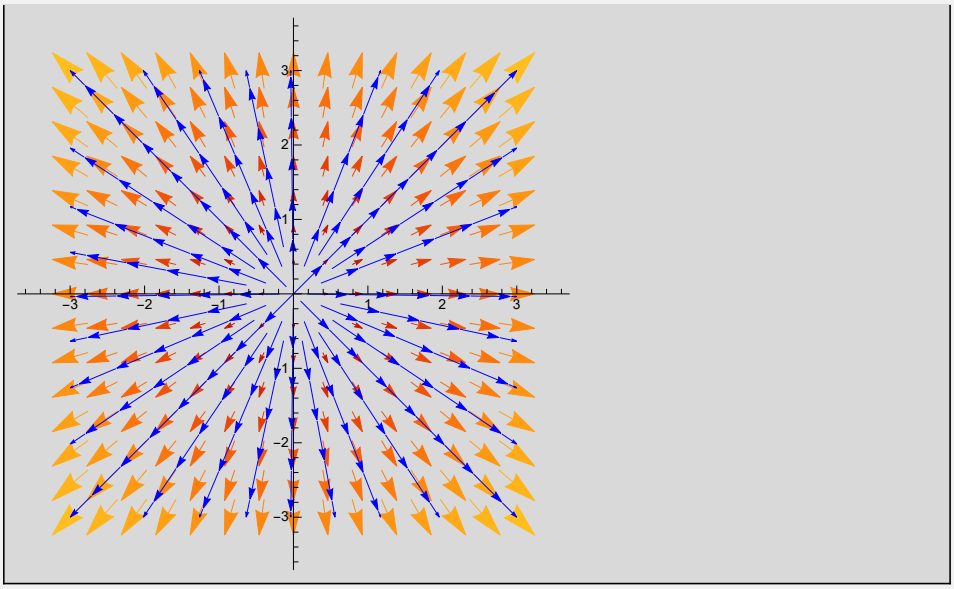



```
Show[g2, g1]
```



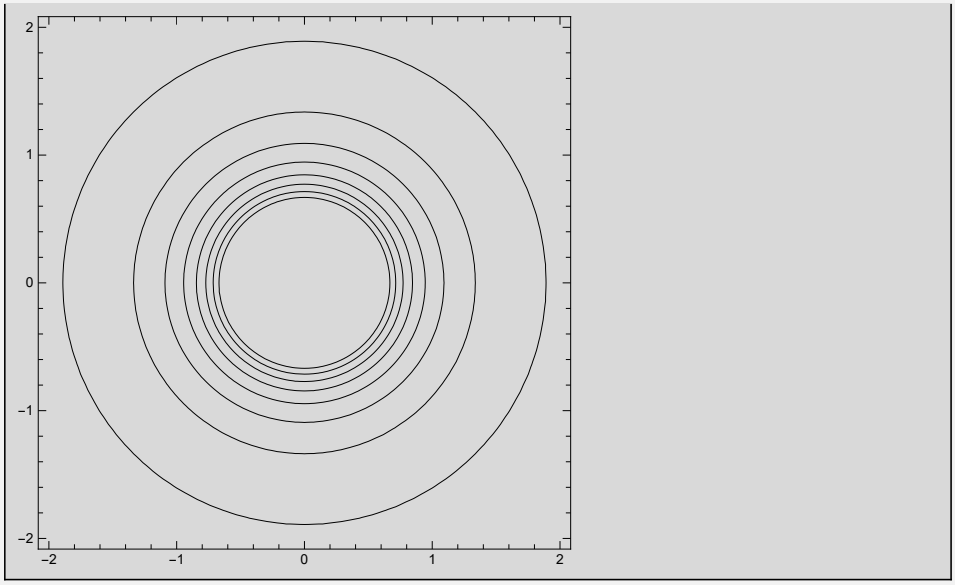
c) Beroa gune beroetatik hotzetara mugitzen bada, gradientearen kontrako norantzan joango da, hau da, $x\vec{i} + y\vec{j}$ norantzan.

```
g3 = VectorPlot[{x, y}, {x, −3, 3}, {y, −3, 3}, VectorScale → Medium,
VectorColorFunction → "SolarColors", Axes → True,
Frame → False, StreamPoints → 30, StreamStyle → Blue]
```

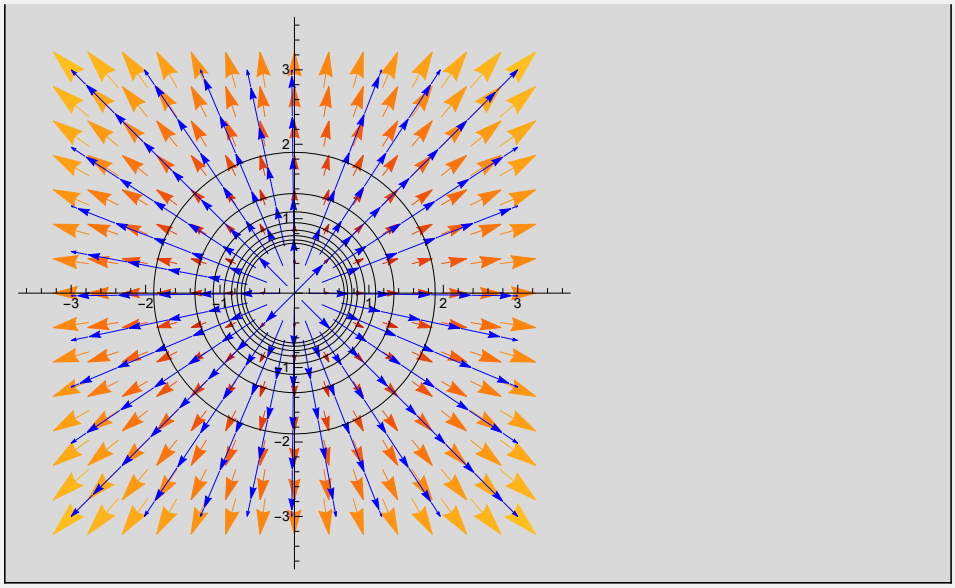


Fluxu-lerroak jatorritik pasatzen diren eta malda aldakorra duten zuzenak dira:

```
g4 = ContourPlot[T[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
Contours → 8, ContourShading → None]
```




```
Show[g3, g4]
```



Fluxu-lerroak lerro isotermikoekiko ortogonalak diren ibilbideak dira.

6. kapitulua

Kurba parametrikoak

Kapitulu honetan kurba parametrikoak landuko dira. Haien definizioa emango da eta propietate simetrikoak aipatuko dira. Ondoren, zenbait parametrizazio-metodo aurkeztuko dira. Gero, kurba mota ezberdinak definituko ditugu; eta, bukatzeko, deribazioarekin lotutako kontzeptuak landuko dira, katearen erregela eta tangentea definituko dira, besteak beste.

6.1 Definizioa

Normalean, planoko kurba bat $y = f(x)$ funtzio baten bitartez definitu ohi da. Beste aukera bat modu inplizitua erabiltzea da, non $H(x, y) = 0$ funtzioak kurba definitzen baitu. Batzuetan, kurba bat hobeto defini daiteke x eta y aldagaiak t parametro baten menpe emanda baldin badaude ($x = x(t)$, $y = y(t)$). Adibidez, pentsa dezagun r erradioko zirkunferentzia batean. Kurba hori modu parametrikoan definitzea oso erraza da:

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \end{cases}$$

parametrizazioa erabiliz, non θ parametroa baita eta $\theta \in [0, 2\pi)$ baldintza betetzen baitu.

Definizioa. Izan bedi $I \subset \mathbb{R}$ tarte bat. Planoko α kurba bat modu parametrikoan honako aplikazio jarraitu honek definitzen du:

$$\begin{array}{rl} \alpha: & I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & t \longrightarrow (x(t),\, y(t)) \end{array}$$

non t parametroa baita. Ohartu definizio hori $\mathbb{R}^n$-n egin daitekeela modu erraz batean $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ definizioarekin.

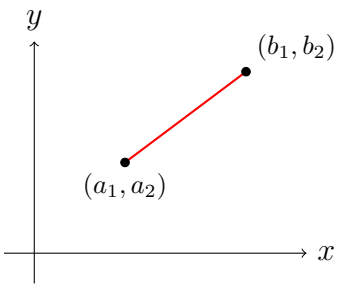
6.1.1 Zenbait kurba parametriko

Atal honetan, zenbait kurba orokorren parametrizazioa emango dugu. $\mathbb{R}^2$-ko hainbat kurba aipatuko ditugu, besteak beste: segmentua, zirkunferentzia, elipsoidea, espirala...

Segmentua

(a_1, a_2) eta (b_1, b_2) puntuak muga gisa dituen segmentua modu honetan parametrizatzen da:

$$\begin{cases} x(t) = a_1(1-t) + b_1 t \\ y(t) = a_2(1-t) + b_2 t \end{cases} \quad \text{non } t \in [0,1].$$



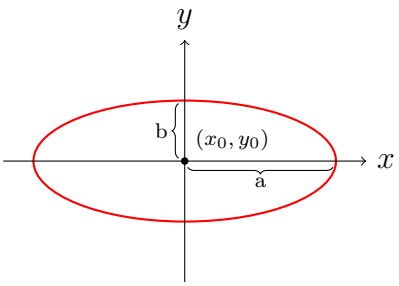
6.1 irudia. Segmentu bat grafikoki irudikatuta.

Elipsea

(x_0, y_0) puntuan zentratuta dagoen eta a, b ardatzerdiak dituen elipsea modu honetan parametrizatzen da:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + a\ \cos(t) \\ y(t) = y_0 + b\ \sin(t) \end{cases} \quad \text{non } t \in [0, 2\pi).$$

Ohartu, zirkunferentzia elipsoidearen kasu berezi bat dela, non $a = b$ baita.

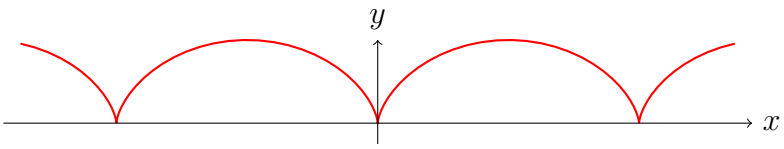


6.2 irudia. Elipse bat grafikoki irudikatuta.

Zikloidea

r erradioko zikloidea modu honetan parametrizatzen da:

$$\begin{cases} x(t) = r(t - \sin(t)) \\ y(t) = r(1 - \cos(t)) \end{cases}$$

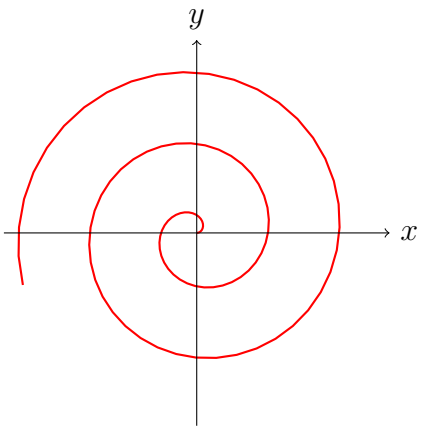


6.3 irudia. Zikloide bat grafikoki irudikatuta.

Espirala

Espiral mota ugari daude: hiperbolikoa, logaritmikoa, Fermatena... Hemen, Arkimedesen espiralaren parametrizazioa emango dugu adibide gisa:

$$\begin{cases} x(t) = t\ \cos(t) \\ y(t) = t\ \sin(t) \end{cases}$$



6.4 irudia. Arkimedesen espirala grafikoki irudikatuta.

Kardioide

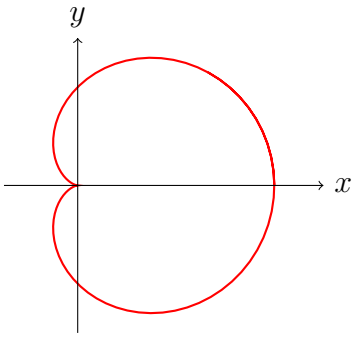
Kardioidea modu honetan parametrizatzen da:

$$\begin{cases} x(t) = 2a\,(1+\cos(t))\ \cos(t) \\ y(t) = 2a\,(1+\cos(t))\ \sin(t) \end{cases} \qquad \text{non } \ t \in [0, 2\pi),\ a \in \mathbb{R}.$$

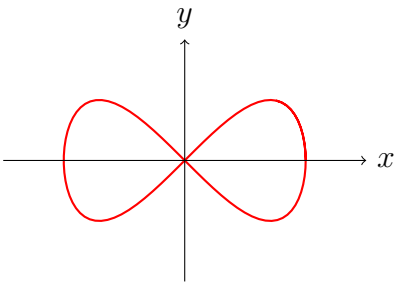
Lemniskata

Infinituaren sinboloari lemniskata deritzo, eta modu honetan parametrizatzen da:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \cos(t)\ \sin(t) \end{cases} \qquad \text{non } \ t \in [0, 2\pi).$$



6.5 irudia. Kardioide bat grafikoki irudikatuta.



6.6 irudia. Lemniskata grafikoki irudikatuta.

Helize zirkularra

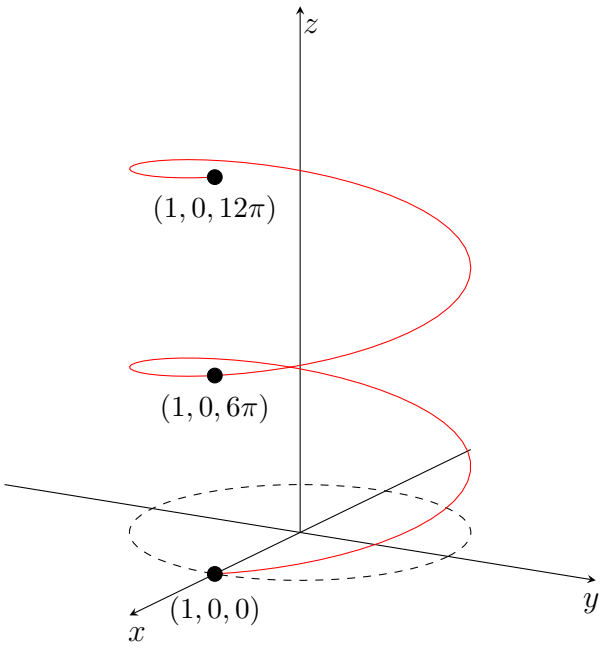
$\mathbb{R}^3$-n definitzen den kurba parametriko baten adibide bat emango dugu: helize zirkularra. Kurba hori r erradioko zilindro baten gainazalean mugitzen da eta honako era honetan parametrizatzen da, non $2\pi k$ helizearen altuera baita:

$$\begin{cases} x(t) = r\ \cos(t) \\ y(t) = r\ \sin(t) \\ z(t) = k\,t \end{cases}$$

6.1.2 Simetria eta periodikotasuna

$x(t)$ eta $y(t)$ funtzioek baldintza zehatz batzuk betetzen baldin badituzte, kurba parametrikoa simetrikoa dela esango dugu. Simetria mota ezberdinak daude:

- OX simetria-ardatza da, baldin eta $\forall t\ \exists t'$ non $x(t) = x(t')$, $y(t) = -y(t')$.
- OY simetria-ardatza da, baldin eta $\forall t\ \exists t'$ non $x(t) = -x(t')$, $y(t) = y(t')$.
- $x = y$ simetria-ardatza da, baldin eta $\forall t\ \exists t'$ non $x(t) = y(t')$, $y(t) = x(t')$.
- $x = -y$ simetria-ardatza da, baldin eta $\forall t\ \exists t'$ non $x(t) = -y(t')$, $y(t) = -x(t')$.
- Koordenatu-jatorria simetria-zentroa da, baldin eta $\forall t\ \exists t'$ non $x(t) = -x(t')$, $y(t) = -y(t')$.



6.7 irudia. Erradioa $r = 1$ eta $k = 3$ duen helizea grafikoki irudikatuta, non altuera 6π baita.

Modu berean, $x(t)$ eta $y(t)$ funtzioek

$$x(t+T) = x(t), \qquad y(t+T) = y(t)$$

baldintzak betetzen baldin badituzte, edozein t-tarako kurba parametrikoa periodikoa dela esango dugu, T haren periodoa izanik.

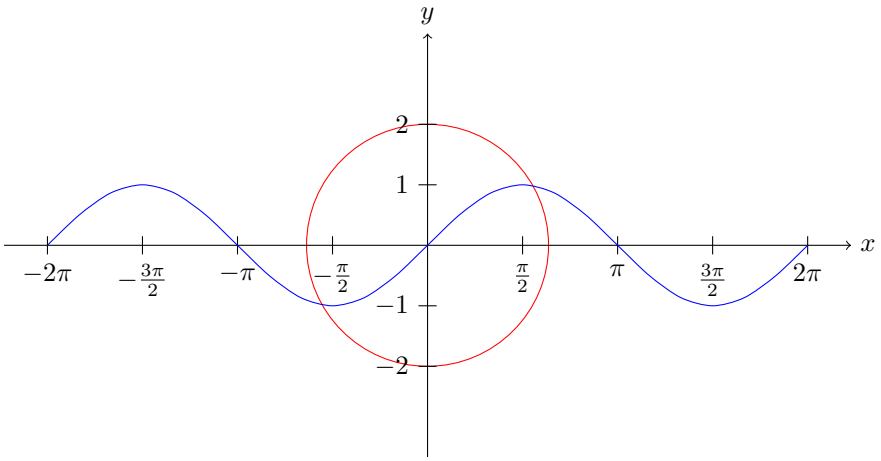
Adibidea. Bi kurba parametriko irudikatuko ditugu, beraien simetriak eta periodikotasuna aztertzeko. Kurbak honako hauek dira:

$$\begin{array}{rccl} \alpha_1: & I = [0, 2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longrightarrow & (2\cos(t),\, 2\sin(t)) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \alpha_2: & I = [-2\pi, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longrightarrow & (t,\, \sin(t)) \end{array}$$

6.8 irudian bi kurbak irudikatu dira. Alde batetik, α_1 kurba 2 erradiodun zirkunferentzia da. Bestalde, α_2 sinu funtzioa da.

α_1 kurbaren simetria aztertzen baldin badugu, ikus dezakegu simetria guztiak betetzen direla. Adibide gisa, $t = \frac{\pi}{2}$ parametroa hartuko dugu, non $x(t) = 0$ eta $y(t) = 2$ baitira, eta simetria bakoitzerako dagokion t' aurkituko dugu:

- OX simetria-ardatza. $t' = \frac{3\pi}{2}$ parametroa hartuta $x(t') = 0$ eta $y(t') = -2$ dira.
- $x = y$ simetria-ardatza. $t' = 0$ parametroa hartuta $x(t') = 2$ eta $y(t') = 0$ dira.
- $x = -y$ simetria-ardatza. $t' = \pi$ parametroa hartuta $x(t') = -2$ eta $y(t') = 0$ dira.



6.8 irudia. α_1 eta α_2 kurba parametrikoak irudikatuta.

- Koordenatu-jatorria simetria-zentroa. $t' = \frac{3\pi}{2}$ parametroa hartuta $x(t') = 0$ eta $y(t') = -2$ dira.

OY simetria ikusteko beste t parametro bat hartu behar dugu. Izan ere, $t = \frac{\pi}{2}$ parametroari dagokion puntua Y ardatzaren gainean dago. Kasu honetan, $t = 0$ parametroa hartuko dugu, non $x(t) = 2$ eta $y(t) = 0$ baitira. $t' = \pi$ parametroa hartuta, $x(t') = -2$ eta $y(t') = 0$.

α_2 kurbaren periodikotasuna aztertzen baldin badugu, ikus dezakegu

$$x(t + 2\pi) = x(t), \qquad y(t + 2\pi) = y(t)$$

betetzen direla. Beraz, kurba horrek $T = 2\pi$ periodoa du. Bestalde, simetria aztertzen baldin badugu, ikus dezakegu kurba horrek koordenatu-jatorriarekiko simetria daukala.

6.2 Kurba parametriko mota ezberdinak

Atal honetan, kurba parametrikoen zenbait propietate eta emaitza teoriko interesgarri emango ditugu. Horretarako, kurba parametrikoen definizio orokorra hartuko dugu:

$$\begin{array}{rccl} \alpha: & I = [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longrightarrow & (x(t),\, y(t)) \end{array}$$

6.2.1 Kurba jarraitua

α kurba jarraitua da $x(t)$ eta $y(t)$ funtzioak jarraituak baldin badira. Bestalde, existitzen baldin bada I tartearen partiketa bat $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ non α jarraitua den $[t_i, t_{i+1}]$ tarte bakoitzean, orduan α kurba zatika jarraitua dela esango dugu.

6.2.2 Kurba erregularra

α kurba erregularra dela esango dugu, baldin eta $x'(t)$ eta $y'(t)$ funtzioak jarraituak eta aldi berean ez-nuluak badira I tartean; hau da, $\nexists\, t : x'(t) = y'(t) = 0$. Adibidez, 6.2 eta 6.6 irudietako kurbak erregularrak dira. Aldiz, 6.3 eta 6.5 irudietako kurbak ez dira erregularrak. Hala ere, kurba bat kurba erregularren batura finitu gisa definitu ahal bada, kurba zatika erregularra dela esango dugu.

6.2.3 Kurba itxia

$\alpha(a)$ puntuari hasiera-puntua deritzo, eta $\alpha(b)$ puntuari bukaera puntua. α kurba itxia dela esango dugu $\alpha(a) = \alpha(b)$ betetzen bada. Adibidez, 6.2 eta 6.5 irudietako kurbak itxiak dira.

6.2.4 Kurba sinplea

Kurba batek ebakipuntu bat duela esago dugu, baldin eta $\exists\, t_1,\, t_2 : \alpha(t_1) = \alpha(t_2)$. Kurba bat sinplea dela esango dugu, baldin eta ebakipunturik ez badu. Adibidez, 6.3 eta 6.4 irudietako kurbak sinpleak dira.

6.2.5 Jordanen kurba

α kurba bat Jordanen kurba dela esango dugu, baldin eta itxia eta sinplea baldin bada. Adibidez, 6.2 eta 6.5 irudietako kurbak Jordanen kurbak dira.

Teorema (Jordanen kurba). α kurba bat Jordanena baldin bada, planoa bi multzo disjuntu konexutan banatzen du, non haien arteko muga α kurba baita. Are gehiago, horietako multzo bati barnekoa deritzo eta mugatuta dago; eta besteari kanpokoa deritzo eta ez dago mugatuta.

6.3 Puntu singularrak

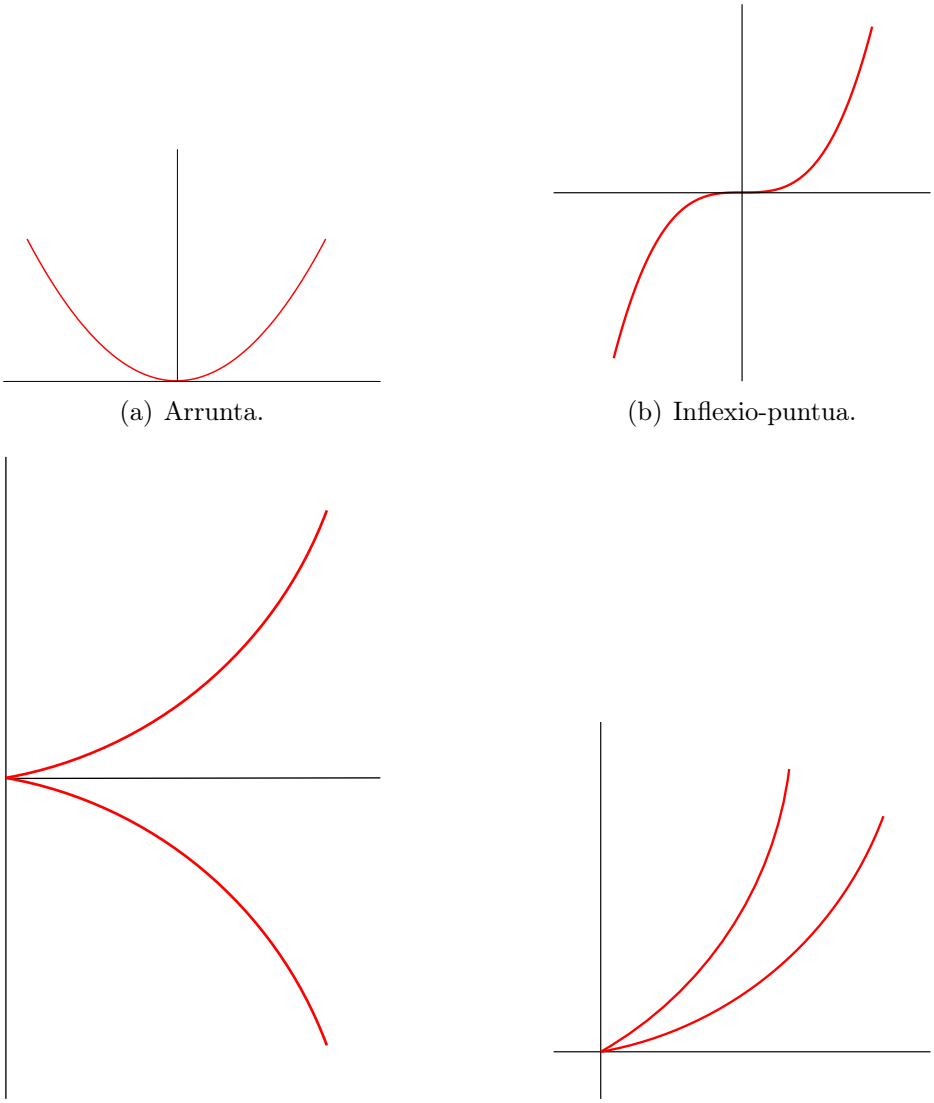
Definizioa (Tangente bektorea). Izan bedi $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ gisa definitzen den kurba parametriko bat. $\alpha'(t)$ bektoreari tangentea deritzo, eta $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$ gisa definitzen da.

Baldin eta $\alpha'(t) = 0$ bada, $(x(t), y(t))$ puntuari puntu singular deritzo. Lau motatako puntu singularrak definitzen dira, eta haien sailkapena honako era honetan egiten da.

Izan bitez $(x(t_0), y(t_0))$ α kurbako puntu singular bat eta $\alpha^{(n)}(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t))$ n ordenako α kurbaren deribatua. Izan bitez p deribatua zero egiten ez den ordenarik baxuena, eta q, $\alpha^{(p)}(t_0)$ eta $\alpha^{(q)}(t_0)$ bektoreak kolinealak ez izatearen baldintza betetzen duen ordenarik baxuena. Orduan, $(x(t_0), y(t_0))$ puntu singularraren sailkapena honela egiten da:

- p bakoitia eta q bikoitia baldin badira, orduan puntu singularra arrunta da.
- p bakoitia eta q bakoitia baldin badira, orduan puntu singularra inflexio-puntua da.
- p bikoitia eta q bakoitia baldin badira, orduan puntu singularra lehenengo motako atzerapen-puntua da.
- p bikoitia eta q bikoitia baldin badira, orduan puntu singularra bigarren motako atzerapen-puntua da.

6.9 irudian lau puntu singularren adibide grafikoak ikus daitezke.



(a) Arrunta.

(b) Inflexio-puntua.

(c) Lehenengo motako atzerapen-puntua.

(d) Bigarren motako atzerapen-puntua.

6.9 irudia. Lau puntu singularren adibideak grafikoki irudikatuta.

Adibidea. Kalkulatu eta sailkatu $\alpha(t) = (2\,t + \frac{1}{t^2}, t^2 + \frac{2}{t})$ kurba parametrikoaren puntu singularrak.

Lehenik eta behin, puntu singularrak identifikatuko ditugu. Horretarako, tangente-bektorea noiz egiten den zero kalkulatuko dugu:

$$\alpha'(t) = \left(2 - \frac{2}{t^3}, 2\,t - \frac{2}{t^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 2 - \dfrac{2}{t^3} = 0 \\ y'(t) = 2\,t - \dfrac{2}{t^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha'(1) = (0,0).$$

Beraz, $t_0 = 1$ parametroari dagokion puntua puntu singularra da; hau da, $\alpha(1) = (3,3)$ puntua singularra da.

Orain, p eta q balioak kalkulatuko ditugu. Horretarako, ordena altuagoko deribatuak kalkulatuko ditugu. Alde batetik, $\alpha''(t) = (\frac{6}{t^4}, 2 + \frac{4}{t^3})$ daukagu. $\alpha''(1) = (6,6)$ denez, $p = 2$ dela ondorioztatzen dugu. Izan ere, $\alpha^{(n)}(t_0)$ ez-nulua den ordenarik txikiena da. Bestalde, $\alpha'''(t) = (-\frac{24}{t^5}, -\frac{12}{t^4})$ daukagu. $\alpha'''(1) = (-24, 12)$ denez, $q = 3$ dela ondorioztatzen dugu, $\alpha''(1)$ eta $\alpha'''(1)$ bektoreak kolinealak ez direlako.

Beraz, $p = 2$ bikoitia eta $q = 3$ bakoitia izanda, badakigu $\alpha(1) = (3,3)$ puntu singularra lehenengo motako atzerapen-puntua dela.

Adibidea. Kalkulatu eta sailkatu $\alpha(t) = (t(3-2t)(t-1)^2, t - 1 + \frac{1}{t})$ kurba parametrikoaren puntu singularrak.

Lehenik eta behin, puntu singularrak identifikatuko ditugu. Horretarako, tangente-bektorea noiz egiten den zero kalkulatuko dugu:

$$\alpha'(t) = \left(3 - 16\,t + 21\,t^2 - 8\,t^3, 1 - \frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 3 - 16\,t + 21\,t^2 - 8\,t^3 = 0 \\ y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2} = 0 \end{cases}$$

Eta hemendik ondorioztatzen da $t_0 = 1$ denean $\alpha'(1) = (0,0)$ dela. Beraz, t_0 parametroari dagokion puntua puntu singularra da, hau da, $\alpha(1) = (0,1)$ puntua singularra da.

Orain, p eta q balioak kalkulatuko ditugu. Horretarako, ordena altuagoko deribatuak kalkulatuko ditugu:

$$\alpha''(t) = \left(-16 + 42\,t - 24\,t^2, \frac{2}{t^3}\right) \Rightarrow \alpha''(1) = (2,2),$$
$$\alpha'''(t) = \left(42 - 48\,t, \frac{-6}{t^4}\right) \Rightarrow \alpha'''(1) = (-6,-6),$$
$$\alpha^{iv}(t) = \left(-48, \frac{24}{t^5}\right) \Rightarrow \alpha^{iv}(1) = (-48, 24).$$

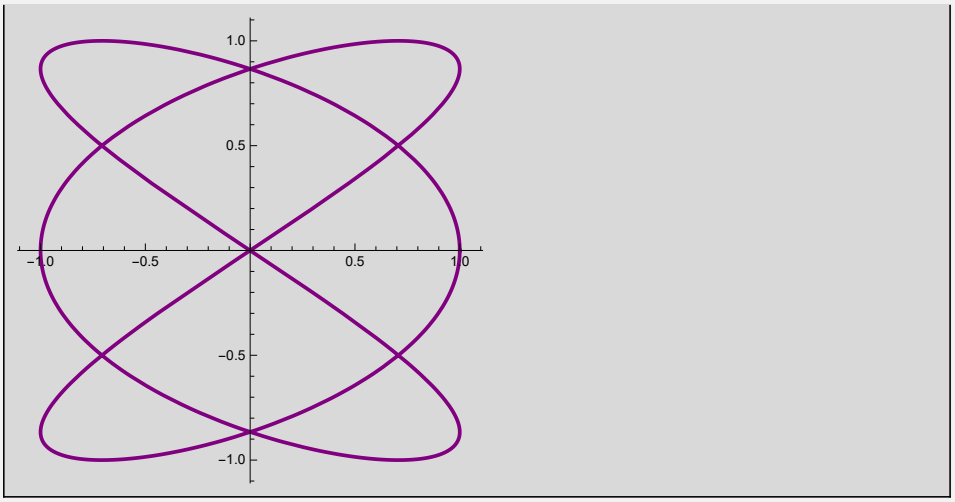
$\alpha''(1) \neq (0,0)$ denez, $p = 2$ ondorioztatzen dugu. Bestalde, kasu honetan $\alpha''(1)$ eta $\alpha'''(1)$ kolinealak direnez ($\alpha'''(1) = -3 * \alpha''(1)$), $q = 4$ ondorioztatzen dugu. Izan ere, bigarren eta laugarren deribatuak ez dira kolinealak. Beraz, $\alpha(1) = (0,1)$ puntu singularra bigarren motako atzerapen-puntua da.

6.4 Ordenagailuko praktikak

6.1 ariketa. Adierazi grafikoki koordenatu parametrikoetan emandako honako kurba hau: $x = \cos(3t)$, $y = \sin(2t)$.

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

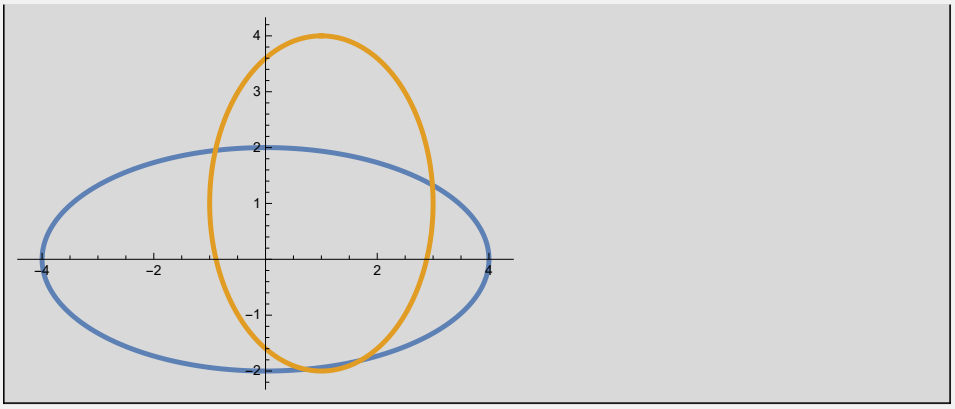
```
c[t_] = {x[t_], y[t_]} = {Cos[3t], Sin[2t]};
ParametricPlot[c[t], {t, 0, 2Pi}, PlotStyle → {Purple, Thickness[0.008]}]
```



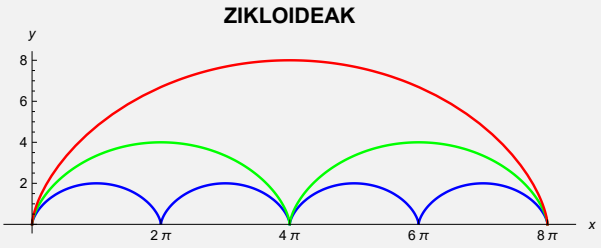
6.2 ariketa. Adierazi grafiko berean jatorrian zentratutako eta ardatzerdi handia 4 baliokoa eta txikia 2koa dituen elipsea, eta $(1, 1)$ puntuan zentroa duen eta ardatzerdi handia 2 baliokoa eta txikia 3koa dituena.

Jatorrian zentratutako eta a ardatzerdi handia duen eta b ardatzerdi txikia duen elipsearen ekuazio parametrikoak honako hauek dira: $x = a \sin t$, $y = b \cos t$. Hasieran funtzio orokor hori definituko dugu, eta ondoren irudikatuko ditugu kasu bereziak:

```
elipse[t_, a_, b_] = {a * Sin[t], b * Cos[t]};
ParametricPlot[{elipse[t, 4, 2], elipse[t, 2, 3] + {1, 1}}, {t, 0, 2Pi},
AspectRatio → Automatic, PlotStyle → Thickness[0.01]]
```



6.3 ariketa. Definitu kurba zikloidearen ekuazio parametrikoak eta lortu honako grafiko hau:

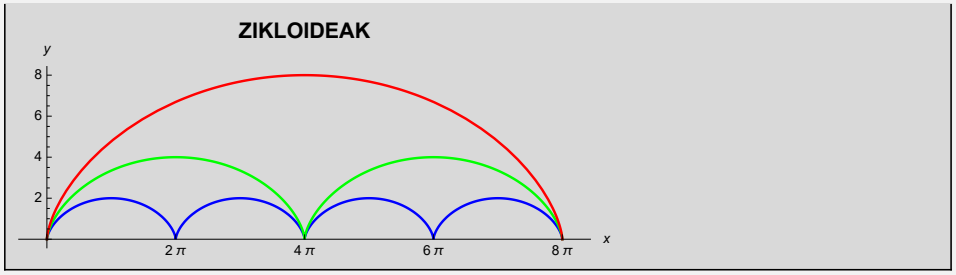


Kurba zikloidea sortzen da zirkunferentzia sortzaile bateko puntu bat lerro zuzen zuzentzaile batean mugitzen denean, zirkunferentzia irristatu gabe. Ekuazio parametrikoak honako hauek dira: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$, r zirkunferentziaren erradioa izanik eta t izanik biratutako angelua. Zikloidearen ekuazioak definituko ditugu, eta, ondoren, balio egokiak emango dizkiegu aldagaiei:

```
zikloide[t_, r_] = r * {t - Sin[t], 1 - Cos[t]};
z1 = ParametricPlot[zikloide[t, 1], {t, 0, 8Pi}, AspectRatio → Automatic,
PlotStyle → Blue];
z2 = ParametricPlot[zikloide[t, 2], {t, 0, 4Pi}, AspectRatio → Automatic,
PlotStyle → Green];
z3 = ParametricPlot[zikloide[t, 4], {t, 0, 2Pi}, AspectRatio → Automatic,
PlotStyle → Red];

Show[z1, z2, z3, PlotRange → {0, 8}, AxesLabel → {x, y},
```

```
PlotLabel → Style["ZIKLOIDEAK", Bold, Black, 14],
Ticks → {{0, 2Pi, 4Pi, 6Pi, 8Pi}, Automatic}]
```



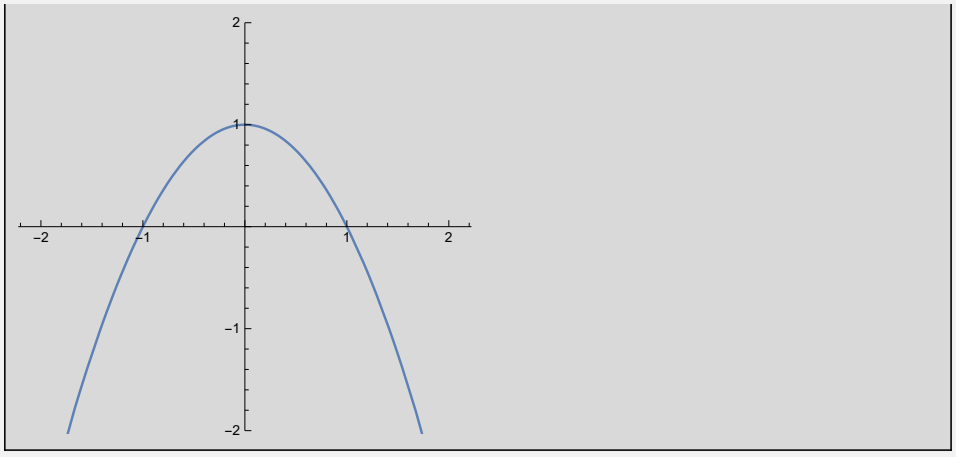
6.4 ariketa. $y = 1 - x^2$ funtzioa emanik, kalkulatu haren ekuazio parametrikoak eta egin adierazpen grafikoa.

Funtzio esplizitua batean, $y = f(x)$, haren ekuazio parametrikoak lortzeko nahikoa da $x = t$ hartzea eta kurbaren ekuazioan ordezkatzea.

```
y = 1 - x^2;
x = t;
y
```

$1 - t^2$

```
ParametricPlot[{x, y}, {t, -2π, 2π}, PlotRange → {-2, 2}]
```



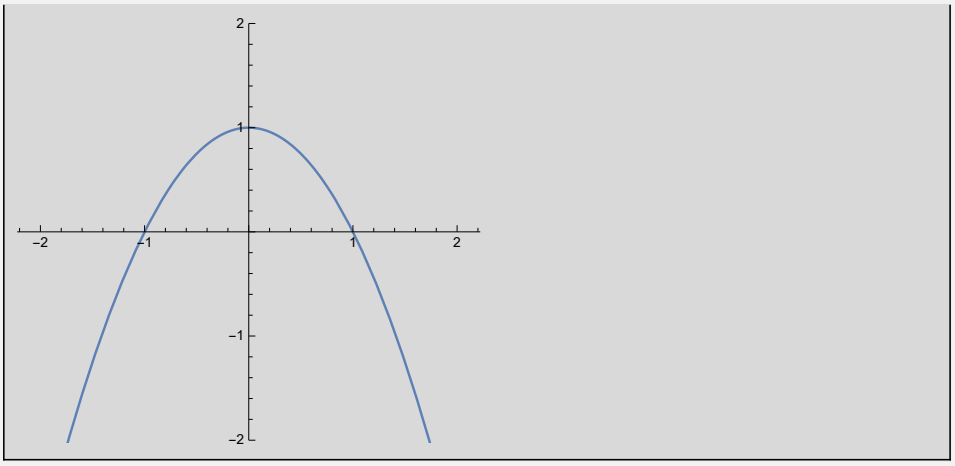
6.5 ariketa. Izan bedi honako ekuazio hauen bidez emandako kurba: $x = -\frac{t}{2}$, $y = 1 - \frac{t^2}{4}$. Ezabatu t parametroa eta lortu kurbaren ekuazio inplizitua. Egin funtzioaren grafikoa bi eratan, eta egiaztatu funtzio bera dela.

Funtzioa definituko dugu ekuazio parametrikoak erabilita, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
c[t_] = {x[t_], y[t_]} = {-t/2, 1 - t^2/4}
```

$$\left\{-\frac{t}{2}, 1-\frac{t^2}{4}\right\}$$

```
ParametricPlot[c[t], {t, -2π, 2π}, PlotRange → {-2, 2}]
```



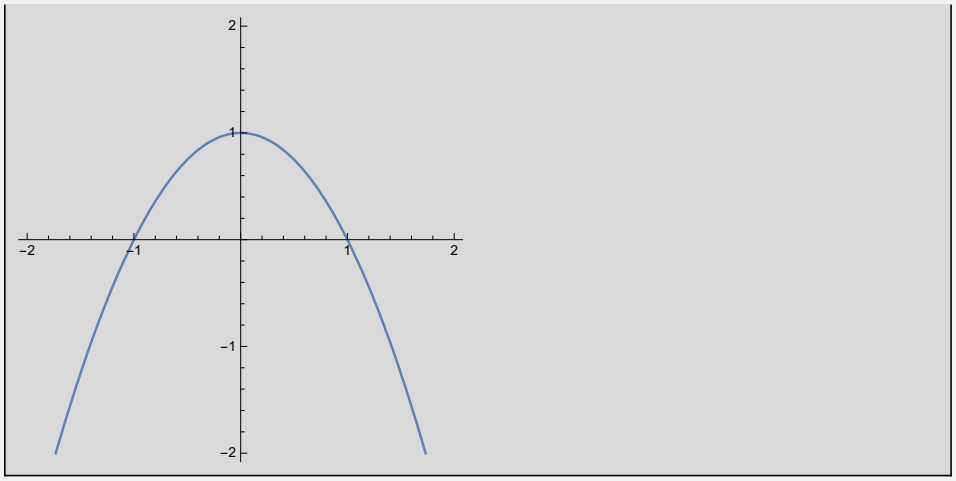
t aldagaia ekuazioetatik ezabatuko dugu:

```
Eliminate[{x == x[t], y == y[t]}, t]
```

$$1 - y == x^2$$

Lortzen den funtzio inplizitua da $1-y=x^2$. Horren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ContourPlot [1 - y == x^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, Frame → None, Axes → True]
```



Gainera, ariketa honetako grafikoak eta aurreko ariketakoak berdinak dira, aurreko ariketako funtzio bera izan baita ekuazio parametrikoetan eman digutena.

6.6 ariketa. Egin honako zirkunferentzia honen parametrizazioa: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Eta irudikatu zirkunferentzia a, b eta r parametroen zenbait baliotarako.

Zirkunferentziaren ekuazio inplizitua definituko dugu:

```
zirkunf = (x - a)^2 + (y - b)^2==r^2
```

$$(-a+x)^2+(-b+y)^2==r^2$$

x aldagaia definituko dugu:

```
x[t_] = a + r * Cos[t];
s = Solve[zirkunf, y]/.x → x[t]//Simplify
```

$$\left\{\left\{y\to b-\sqrt{r^2\text{Sin}[t]^2}\right\},\left\{y\to b+\sqrt{r^2\text{Sin}[t]^2}\right\}\right\}$$

Zirkunferentziaren parte negatiboaren parametrizazioa egingo dugu:

```
y1[t_] = y/.s[[1]]
```

$$b-\sqrt{r^2\text{Sin}[t]^2}$$

```
zirkulu1[t_, a_, b_, r_] = {x[t], y1[t]}
```

$$\left\{a + r\text{Cos}[t], b - \sqrt{r^2\text{Sin}[t]^2}\right\}$$

Eta orain, parte positiboa parametrizatuko dugu:

```
y2[t_] = y /. s[[2]]
```

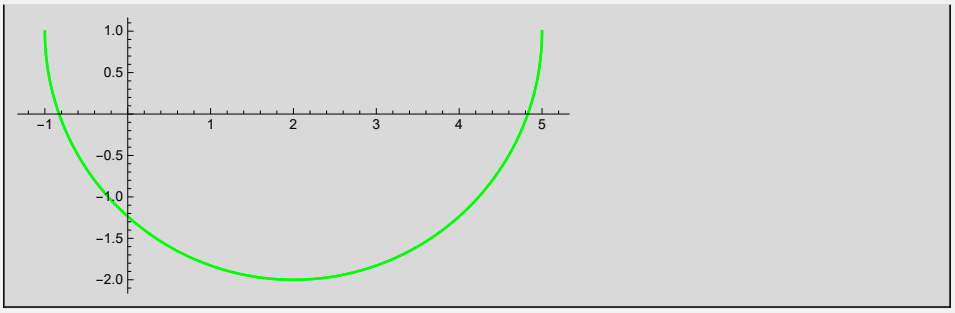
$$b + \sqrt{r^2\text{Sin}[t]^2}$$

```
zirkulu2[t_, a_, b_, r_] = {x[t], y2[t]}
```

$$\left\{a + r\text{Cos}[t], b + \sqrt{r^2\text{Sin}[t]^2}\right\}$$

Parametroen balio batzuetarako, parte biak bereizita irudikatuko ditugu lehendabizi, eta gero batera:

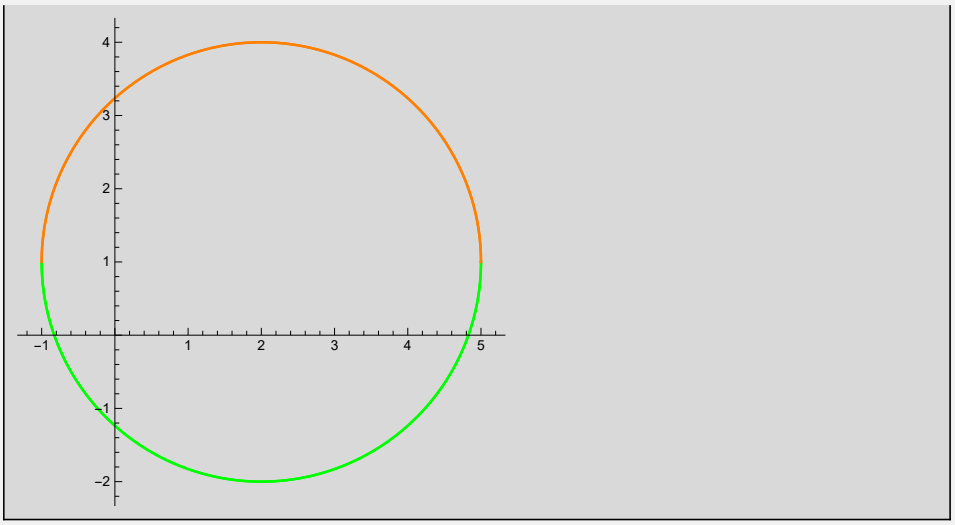
```
z1 = ParametricPlot[zirkulu1[t, 2, 1, 3], {t, 0, 2π}, PlotStyle → Green]
```




```
z2 = ParametricPlot[zirkulu2[t, 2, 1, 3], {t, 0, 2π}, PlotStyle → Orange]
```



```
Show[z1, z2, PlotRange → {−2, 4}]
```

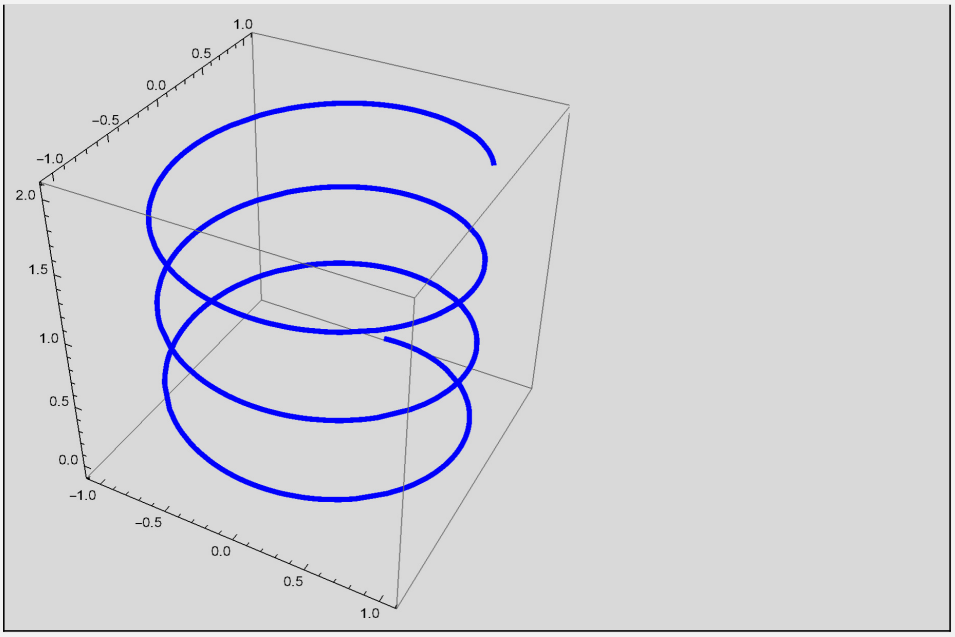


6.7 ariketa. Egin koordenatu parametrikoetan emandako kurba honen adierazpen grafikoa: $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \frac{t}{10}$.

Funtzioa definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egiteko ParametricPlot3D agindua erabiliko dugu:

```
c[t_] = {x[t_], y[t_], z[t_]} = {Sin[t], Cos[t], t/10};

ParametricPlot3D[c[t], {t, 0, 20}, PlotStyle → {Blue, Thickness[0.01]}]
```



6.8 ariketa. Lortu honako ekuazio hauen bidez emandako kurbaren ekuazio

parametrikoak eta egin haren adierazpen grafikoa:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - x, \\ z = 2x - x^2. \end{cases}$$

$x = t$ hartuko dugu, eta ekuazioetan ordezkatuko dugu:

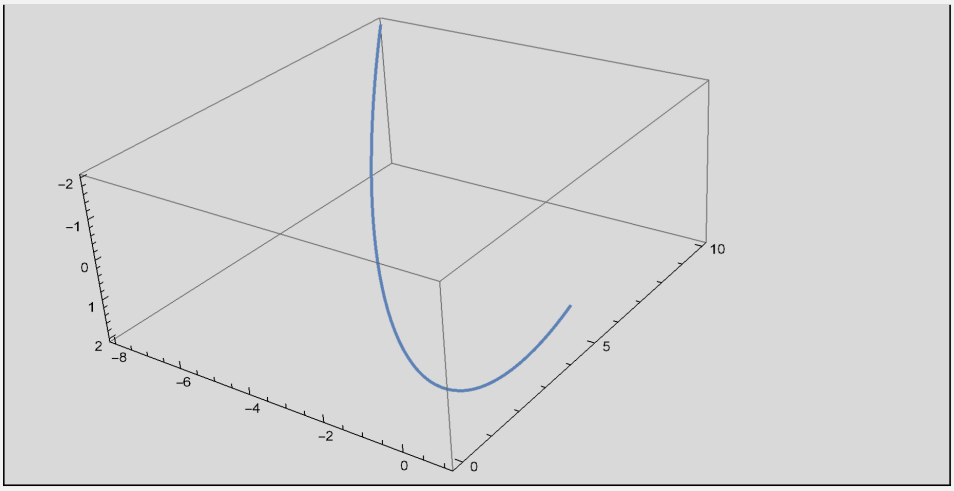
```
y = 2x^2 - x; z = 2x - x^2;
x = t;
y
z
```

$$-t + 2t^2$$

$$2t - t^2$$

Orain, kurbaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, -2, 2}]
```



6.9 ariketa. Parametrizatu $x^2 + y^2 = 4$ zilindroaren eta $2x + 2y + z = 5$ planoaren ebakidura den kurba, eta, haren adierazpen grafikoa egin.

Forma inplizituan emandako bi kurba ditugu: $F(x, y, z) = 0$ eta $G(x, y, z) = 0$. Horrelako kurba bat honako era honetan parametriza daiteke, $x = x(t)$, $y = y(t)$ eta $z = z(t)$ eginez. Parametroak ezabatzeko, Mathematican Eliminate izeneko agindua erabil daiteke. Zilindroa eta planoa definituko ditugu:

```
zil = x^2 + y^2 == 4; plano = 2x + 2y + z == 5;
```

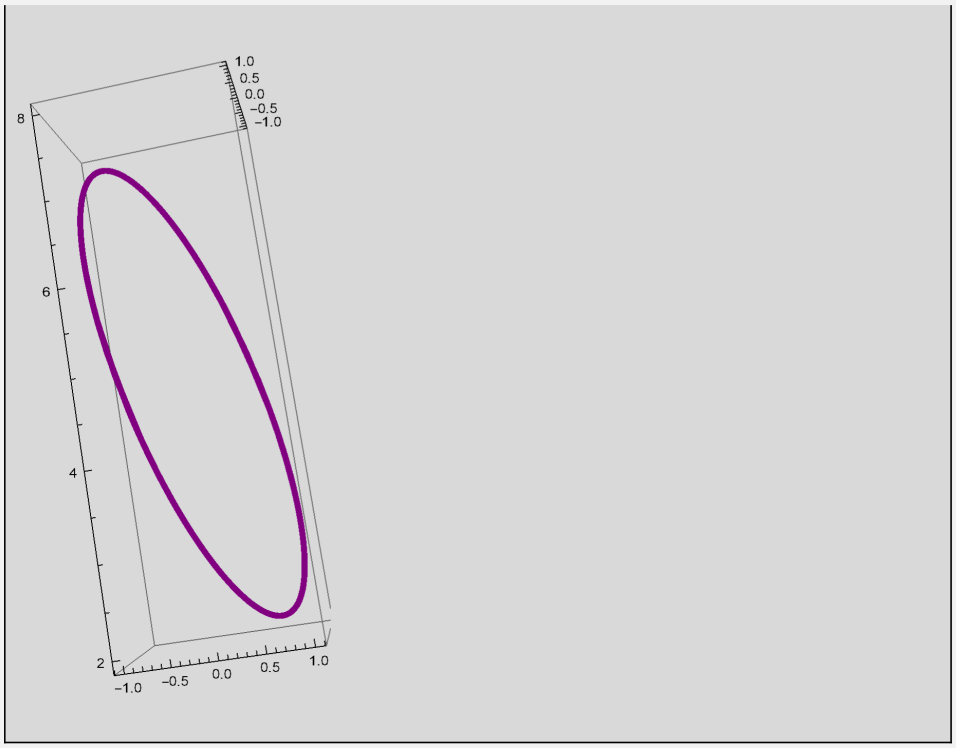
$x = \cos(2t)$ eta $y = \sin(2t)$ parametrizazioa hartuko dugu. Eta zilindroaren eta planoaren arteko ebakidura kalkulatuko dugu:

```
x = Cos[2t]; y = Sin[2t];
s = Solve[plano, z];
z = z/.s[[1]]
```

$5 - 2\text{Cos}[2t] - 2\text{Sin}[2t]$

Ebakidura-kurbaren ekuazio parametrikoak honako hauek dira: $x = \cos(2t)$, $y = \sin(2t)$, $z = 5 - 2\cos(2t) - 2\sin(2t)$. Kurbaren adierazpen grafikoa egingo dugu koordenatu parametrikoak erabilita:

```
ParametricPlot3D[{x, y, z}, {t, 0, 2Pi}, PlotStyle → {Purple, Thickness[0.02]}]
```



6.10 ariketa. Izan bedi honako ekuazio parametrikoek emandako espazioko

kurba:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 2 - \sin t. \end{cases}$$

Ezabatu t parametroa ekuazioetatik eta lortu kurbaren ekuazio parametrikoak. Egin kurbaren adierazpen grafikoa.

Funtzioaren ekuazio parametrikoak definituko ditugu, eta t parametroa ezabatuko dugu haietatik:

```
c[t_] = {x[t_], y[t_], z[t_]} = {Cos[t], Sin[t], 2 - Sin[t]}
```

$\{\text{Cos}[t], \text{Sin}[t], 2 - \text{Sin}[t]\}$

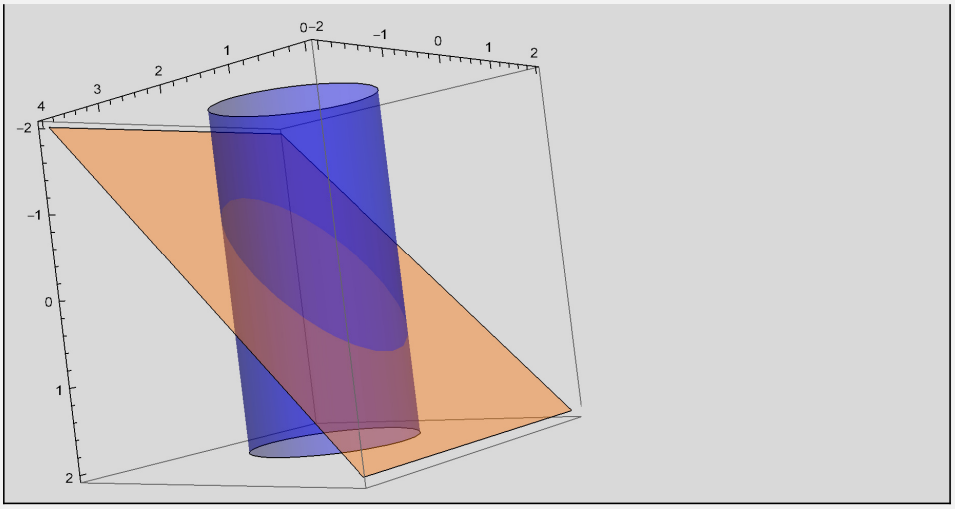
```
Eliminate[{x == x[t], y == y[t], z == z[t]}, t]
```

$x^2 == -3 + 4z - z^2 \&\& y == 2 - z$

Kurbaren ekuazio inplizituak honako hauek dira: $x^2 = -3+4z-z^2$ eta $y = 2-z$.

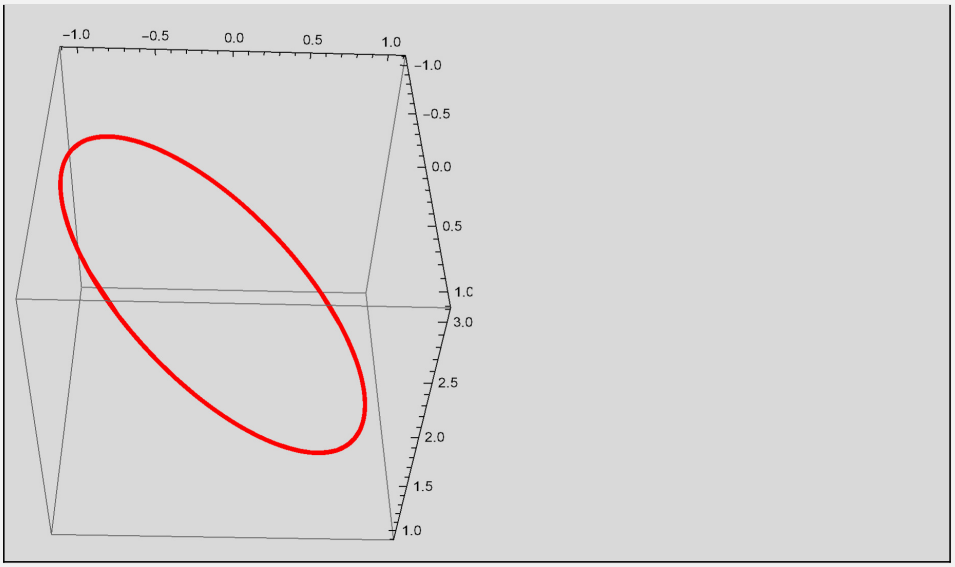
Zilindroaren eta planoaren adierazpen grafikoak egingo ditugu ekuazio inplizituak erabilita:

```
s1 = ContourPlot3D [{x^2 == -3 + 4z - z^2, y == 2 - z} , {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
{z, 0, 4}, Mesh → False, ContourStyle → {Directive[Blue, Opacity[0.4]],
Directive[Orange, Opacity[0.4]]}]
```



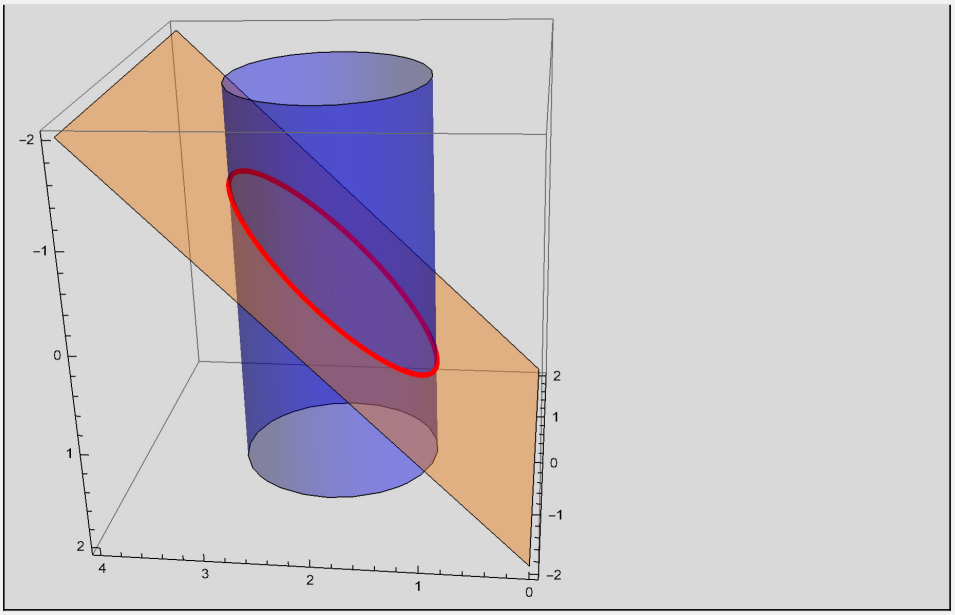
Eta haien arteko ebakidura-kurbaren adierazpen grafikoa egingo dugu ekuazio parametrikoak erabilita:

```
s2 = ParametricPlot3D[c[t], {t, 0, 25}, PlotStyle → {Red, Thickness[0.01]}]
```



Adierazpen grafiko biak batera jarriko ditugu, eta ondo eginda daudela ohartuko gara:

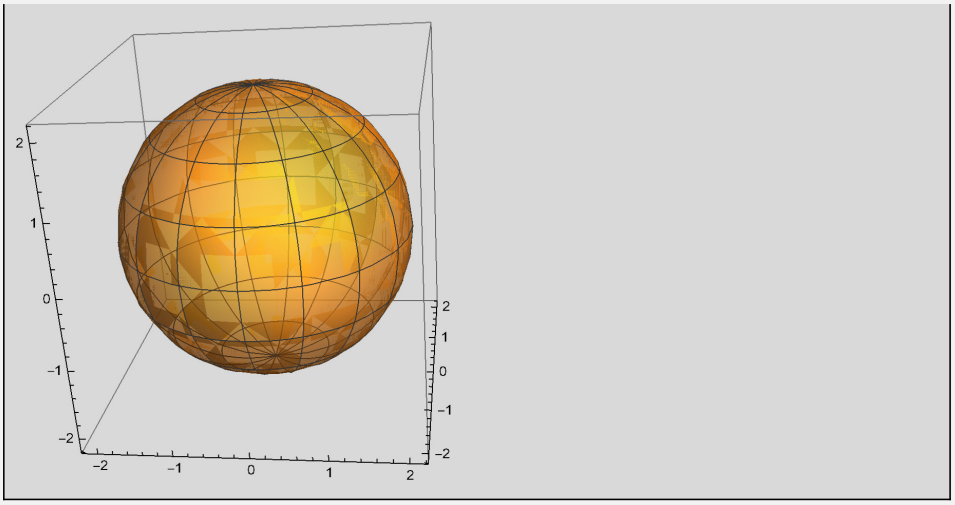
```
Show[s1, s2]
```



6.11 ariketa. Egin honako gorputz hauen parametrizazioak: esfera batena, elipsoidearena, konoarena, zilindroarena eta biraketa-toroarena.

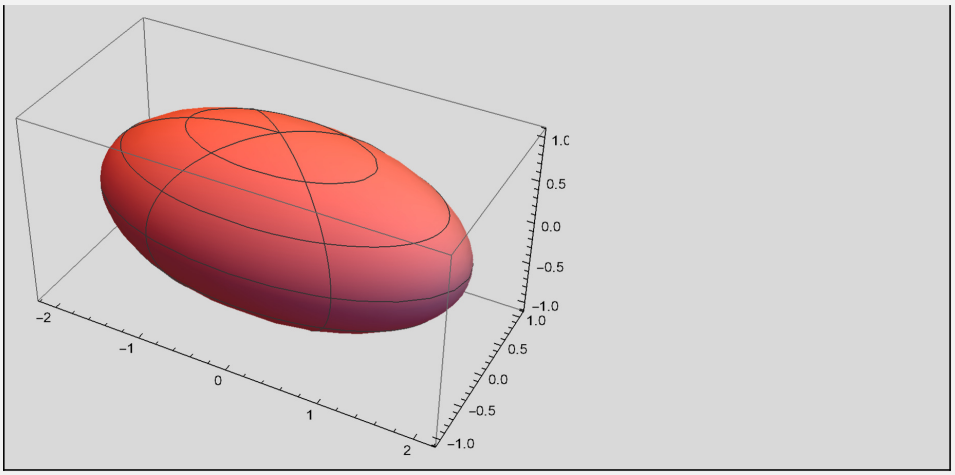
Esferarena:

```
ParametricPlot3D[{2Sin[u]Sin[v], 2 Cos[u]Sin[v], 2 Cos[v]}, {u, −π, π}, {v, −π, π},
PlotStyle → Opacity[0.5]]
```



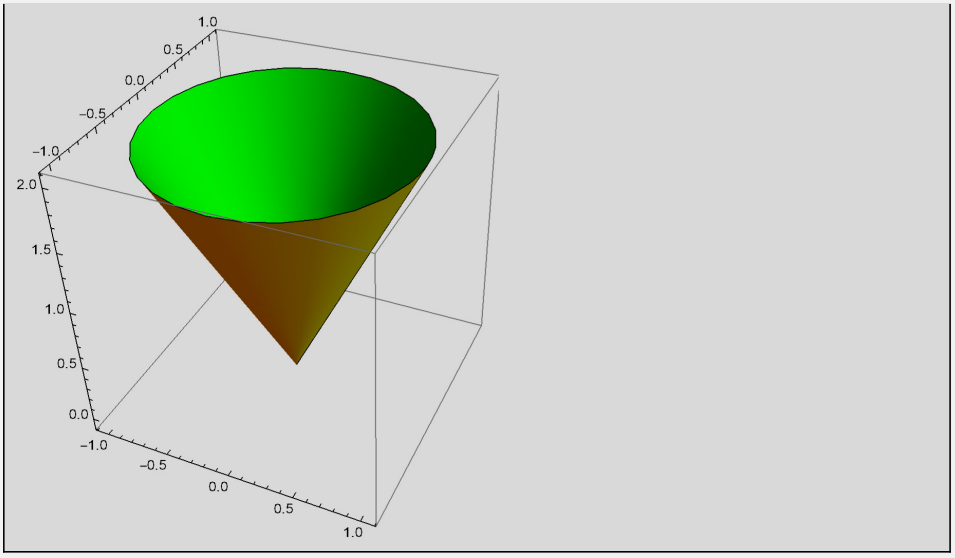
Elipsoidearena:

```
ParametricPlot3D[{2Cos[u]Sin[v], Sin[u]Sin[v], Cos[v]}, {v, 0, Pi}, {u, 0, 2Pi},
Mesh → 5, PlotStyle → Pink]
```



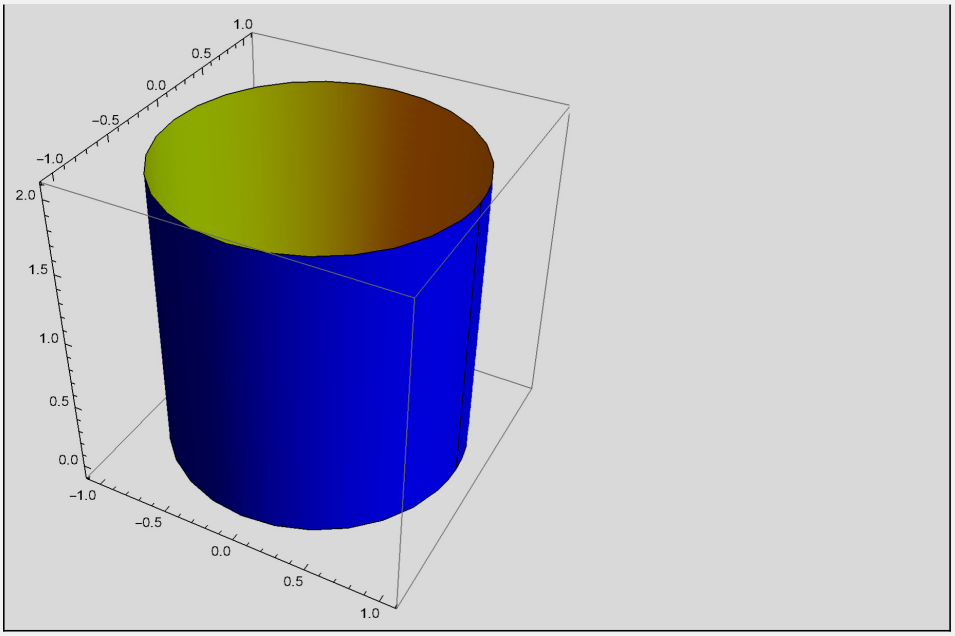
Konoarena:

```
ParametricPlot3D[{vCos[u], vSin[u], 2v}, {u, 0, 2Pi}, {v, 0, 1}, Mesh → False,
BoundaryStyle → Black, PlotStyle → FaceForm[Yellow, Green]]
```



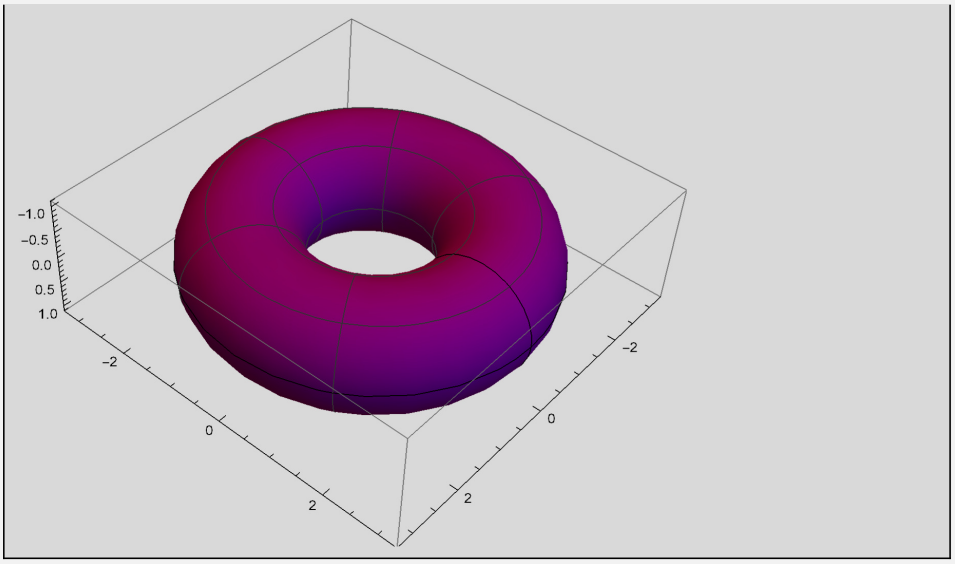
Zilindroarena:

```
ParametricPlot3D[{Cos[u], Sin[u], v}, {u, 0, 2Pi}, {v, 0, 2}, Mesh → False,
BoundaryStyle → Black, PlotStyle → FaceForm[Blue, Yellow]]
```



Biraketa-toroarena:

```
ParametricPlot3D[{(2 + Cos[v])Cos[u], (2 + Cos[v])Sin[u], Sin[v]}, {u, 0, 2Pi},
{v, 0, 2Pi}, Mesh → 5, BoundaryStyle → Black,
PlotStyle → Purple]
```



7. kapitulua

Lerro-integralak

Kapitulu honetan lerro-integralekin lan egingo dugu. Lehenik eta behin, kurba parametriko baten integrala definituko dugu. Besteak beste, kurba baten luzera edo kurba parametriko baten azpiko azalera nola kalkulatzen diren ikusiko dugu. Ondoren, eremu eskalarren eta bektore-eremuen lerro-integralak definituko ditugu, zenbait propietate aipatuz. Bukatzeko, zenbait teorema garrantzitsu aipatuko ditugu: Greenen teorema eta Stokesen teorema.

7.1 Kurba parametriko baten integrala

7.1.1 Kurba baten luzera

Izan bedi $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ kurba parametriko bat $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ekuazio parametrikoen bidez definitzen dena. Jo dezagun $x(t)$ eta $y(t)$ funtzio deribagarriak direla (hau da, kurba C^1 motakoa dela). Orduan, α kurbaren luzera modu honetan kalkulatzen da:

$$L = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Demagun α kurba ez dela C^1 motakoa, baina bai zatika deribagarria. Orduan, kurba deribagarria den (t_i, t_{i+1}) tarte bakoitzean kalkulatuko litzateke luzera, eta gero, luzera totala lortzeko, tarte guztien luzerak batuko genituzke.

Arku baten luzera

Kurba baten luzera osoa kalkulatu beharrean, interesagarria izan daiteke kurbaren zati baten luzera kalkulatzea. Aurreko ataleko α kurba berdina hartuz, har dezagun (t_1, t_2) tartea non $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ baita. α kurbaren luzera (t_1, t_2) tartean modu honetan kalkulatzen da:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ||\alpha'(t)||\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Atal honetan aurkeztutako formulak baliogarriak dira kurba parametrikoa $\mathbb{R}^3$-n definituta dagoenean ere, bakarrik $z(t)$ terminoa gehitu behar da formuletan. Ondoren, bi adibide egingo ditugu, bata $\mathbb{R}^2$-n eta bestea $\mathbb{R}^3$-n.

Adibidea. Izan bedi $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t)$ kurba parametrikoa, non $0 \leq t \leq 2\pi$ baita. Kalkulatu kurbaren luzera.

Kurba parametriko baten luzera kalkulatzeko honako integral hau kalkulatu behar dugu:

$$L = \int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Kasu honetan, $x'(t) = -3\sin t$ eta $y'(t) = 3\cos t$ daukagu, eta kurba definituta dago $(0, 2\,\pi)$ tartean. Beraz, kurbaren luzera honako hau da:

$$\int_0^{2\,\pi} ||\alpha'(t)||\, dt = \int_0^{2\,\pi} \sqrt{(-3\,\sin t)^2 + (3\,\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\,\pi} 3\,\sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\,\pi} 3\, dt = [3t]_{t=0}^{t=2\pi} = 6\pi.$$

$0 \leq t \leq \pi$ arkuaren luzera kalkulatzeko, nahikoa da aurreko integralean mugak aldatzea:

$$\int_0^{\pi} ||\alpha'(t)||\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{(-3\,\sin t)^2 + (3\,\cos t)^2}\, dt = \int_0^{\pi} 3\,\sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt =$$
$$= \int_0^{\pi} 3\, dt = [3t]_{t=0}^{t=\pi} = 3\pi.$$

Adibidea. Izan bedi $\alpha(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2t)$ $\mathbb{R}^3$-n definituta dagoen kurba parametrikoa, non $0 \leq t \leq 2\pi$ baita. Kalkulatu kurbaren luzera.

$\mathbb{R}^3$-ko kurba parametriko baten luzera kalkulatzeko, honako integral hau kalkulatu behar dugu:

$$\int_a^b ||\alpha'(t)||\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.$$

Kasu honetan, $x'(t) = -3\sin t$, $y'(t) = 3\cos t$ eta $z'(t) = 2$ daukagu, eta kurba definituta dago $(0, 2\,\pi)$ tartean. Beraz, kurbaren luzera honako hau da:

$$\int_0^{2\,\pi} ||\alpha'(t)||\, dt = \int_0^{2\,\pi} \sqrt{(-3\,\sin t)^2 + (3\,\cos t)^2 + 2^2}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\,\pi} \sqrt{3^2((\sin t)^2 + (\cos t)^2) + 2^2}\, dt = \int_0^{2\,\pi} \sqrt{3^2 + 2^2}\, dt =$$
$$= \int_0^{2\,\pi} \sqrt{13}\, dt = [\sqrt{13}t]_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi\sqrt{13}.$$

7.1.2 Kurba parametriko baten azpiko azalera

Izan bedi $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ bere buruarekin mozten ez den kurba parametriko bat $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ekuazio parametrikoen bidez definitzen dena. Suposa dezagun

$x(t)$ funtzioa deribagarria dela. Orduan, α kurbak mugatutako azalera modu honetan kalkulatzen da:

$$A = \int_a^b y(t)\, x'(t)\, dt.$$

Adibidea. Kalkulatu $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ zikloidearen azpiko azalera $0 \leq t \leq 2\pi$ tartean.

$$\begin{aligned}\int_a^b y(t)\, x'(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} (1-\cos t)(1-\cos t)\, dt = \int_0^{2\pi} (1 - 2\,\cos t + \cos^2 t)\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\,\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\,\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \\ &= \left[\frac{3t}{2} - 2\,\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 3\pi.\end{aligned}$$

7.1.3 Biraketa-solido baten azalera

Izan bedi $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ kurba parametriko bat $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ekuazio parametrikoen bidez definitzen dena. Izan bedi S, α kurba parametrikoa x ardatzarekiko biratzean sortutako solidoa. S solidoaren azalera modu honetan kalkulatzen da:

$$A = 2\pi \int_a^b y(t)\, ||\alpha'(t)||\, dt = 2\pi \int_a^b y(t)\, \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Adibidea. Izan bedi $\alpha(t) = (3\,\cos t, 3\,\sin t)$ kurba parametrikoa, non $0 \leq t \leq \pi$. Kalkulatu $\alpha(t)$ kurba x ardatzarekiko biratzean sortutako solidoaren azalera.

$$\begin{aligned}2\pi \int_a^b y(t)\, ||x'(t)||\, dt &= 2\pi \int_0^{\pi} 3\,\sin t \sqrt{(-3\,\sin t)^2 + (3\,\cos t)^2}\, dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} 3\,\sin t \sqrt{3^2((\sin t)^2 + (\cos t)^2)}\, dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} 3^2\,\sin t\, dt = 18\pi[-\cos t]_{t=0}^{t=2\pi} = \\ &= 18\pi[-\cos\pi + \cos 0] = 36\pi.\end{aligned}$$

7.2 Eremu eskalarren lerro-integrala

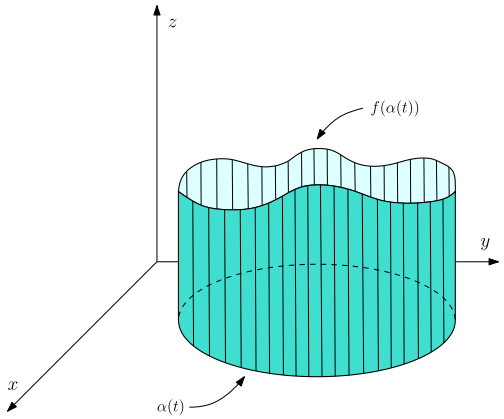
Izan bitez $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ eremu eskalar bat eta $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 motako kurba parametriko bat, non $\alpha(t) \subset \Omega$ betetzen baita. Orduan, f-ren integrala α

kurban zehar modu honetan definitzen da:

$$\int_\alpha f\,dt = \int_a^b f(\alpha(t))\,||\alpha'(t)||\,dt.$$

Demagun α kurba ez dela C^1 motakoa, baina bai zatika deribagarria. Orduan, kurba deribagarria den (t_i, t_{i+1}) tarte bakoitzean integrala kalkulatuko genuke, eta gero tarte guztien integralak batuko genituzke emaitza osoa lortzeko.

Integral horrek interpretazio geometriko bat dauka $n = 2$ denean. Baldin eta $f \geq 0$ bada eta α kurbak ziklo bakar bat egiten baldin badu I tartean, integrala «hesi» baten azalera gisa ikus daiteke. «Hesi» horren oinarria α kurba da, eta altuera $f(\alpha(t))$; ikus 7.1 irudia.



7.1 irudia. Sortzen den «hesiaren» adibide grafikoa.

Adibidea. Izan bitez $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t)$, non $t \in [0, 2\pi]$ baita, 2 erradiodun zirkunferentzia eta $f(x, y) = x^2 + y^2 + x$. Kalkulatu f-ren integrala α-ren gainean, $\int_\alpha f\,dt$.

Integral hori kalkulatzeko, lehenengo $f(\alpha(t))$ eta $||\alpha'(t)||$ kalkulatu behar ditugu:

$$f(\alpha(t)) = f(2\cos t, 2\sin t) = (2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 + 2\cos t = 4 + 2\cos t,$$
$$\alpha'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \to ||\alpha'(t)|| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{2^2} = 2.$$

Orain, integrala kalkulatzeko formula aplika dezakegu:

$$\int_\alpha f\,dt = \int_a^b f(\alpha(t))\,||\alpha'(t)||\,dt = \int_0^{2\pi} (4 + 2\cos t)\,2\,dt = \int_0^{2\pi} 8 + 4\cos t\,dt =$$
$$= [8t + 4\sin t]_{t=0}^{t=2\pi} = 16\pi + 0 - (0 - 0) = 16\pi.$$

Oharra. Ohartu $f = 1$ denean lortzen dugun formula kurba baten luzera kalkulatzeko erabiltzen duguna dela.

7.2.1 Propietateak

- $\int_\alpha (f + g)\,dt = \int_\alpha f\,dt + \int_\alpha g\,dt$.

- $\int_\alpha k \cdot f\, dt = k \int_\alpha f\, dt$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
- $\int_\alpha f\, dt = \int_{\alpha_1} f\, dt + \int_{\alpha_2} f\, dt$, non $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$.
- Eremu eskalar baten lerro-integrala kurbaren parametrizazioarekiko independentea da. Hau da, kurbaren bi parametrizazio desberdinetarako integralaren balioa berdina da.

7.3 Bektore-eremuen lerro-integrala

Izan bitez $\overrightarrow{\mathbf{F}} : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, C^1 motako bektore-eremu bat eta $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 motako kurba parametriko bat, non $\alpha(t) \subset \Omega$ betetzen baita. Orduan, $\overrightarrow{\mathbf{F}}$-ren integrala α kurban zehar honako era honetan definitzen da:

$$\int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt = \int_a^b \langle \overrightarrow{\mathbf{F}}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle\, dt,$$

non $\langle \cdot, \cdot \rangle$ operadorea produktu eskalarra baita.

Integral honek interpretazio fisiko bat dauka. Izan ere, $\overrightarrow{\mathbf{F}}$ bektore-eremuak partikula bat $\alpha(a)$ puntutik $\alpha(b)$ puntura eramateko egindako lana da.

Adibidea. Izan bitez $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ non $t \in [0, 2\pi]$ baita, 2 erradiodun zirkunferentzia eta $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (y, -x)$ bektore-eremua. Kalkulatu $\overrightarrow{\mathbf{F}}$-ren integrala α-ren gainean, $\int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt$.

Integral hori kalkulatzeko $\overrightarrow{\mathbf{F}}(\alpha(t))$ eta $\alpha'(t)$ kalkulatu behar ditugu:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{F}}(\alpha(t)) &= \overrightarrow{\mathbf{F}}((2\cos t, 2\sin t)) = (2\sin t, -2\cos t), \\ \alpha'(t) &= (-2\sin t, 2\cos t). \end{aligned}$$

Orain, integrala kalkulatzeko formula aplika dezakegu:

$$\begin{aligned} \int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt &= \int_a^b \langle \overrightarrow{\mathbf{F}}(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle\, dt = \int_0^{2\pi} \langle (2\sin t, -2\cos t), (-2\sin t, 2\cos t) \rangle\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} -4\,(\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = -8\pi. \end{aligned}$$

7.3.1 Propietateak

- $\int_\alpha (\overrightarrow{\mathbf{F}} + \overrightarrow{\mathbf{G}})\, dt = \int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt + \int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{G}}\, dt$.
- $\int_\alpha k \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt = k \int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
- $\int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt = \int_{\alpha_1} \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt + \int_{\alpha_2} \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt$, non $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$.
- Izan bitez α eta β kurba baten bi parametrizazio. Orduan:

- α eta β parametrizazioek orientazio berdina baldin badute, $\int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt = \int_\beta \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt$.
- α eta β parametrizazioek orientazio desberdina baldin badute, $\int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt = -\int_\beta \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt$.

7.4 Teorema garrantzitsuak

7.4.1 Greenen teorema

Greenen teoremak integral bikoitza eta lerro-integrala erlazionatzen ditu.

Greenen teorema. Izan bitez $\overrightarrow{\mathbf{F}} = (F_1, F_2) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, C^1 motako bektore-eremu bat eta $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ positiboki orientatuta eta zatika C^1 den Jordanen kurba bat, non kurbak mugatutako D espazioa U barruan baitago ($D \subseteq U$). Orduan:

$$\int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt = \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Adibidea. Izan bitez $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ zirkunferentzia eta $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y) = (-y, x)$. Egiaztatu Greenen teorema betetzen dela.

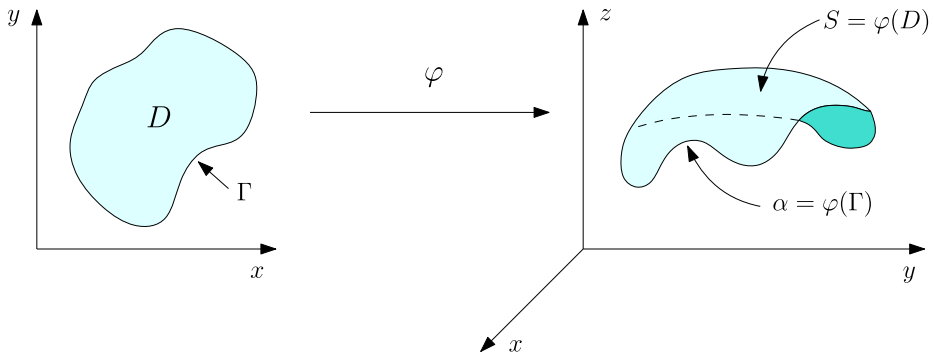
$$\begin{aligned}\int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt &= \int_a^b \langle \overrightarrow{\mathbf{F}}(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} \langle(-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t)\rangle\, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy &= \int\int_D (1 - (-1))\, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\, dr\, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} [r^2]_{r=0}^{r=1}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi.\end{aligned}$$

7.4.2 Stokesen teorema

Stokesen teorema Greenen teoremaren hedapen bat da. Teorema honek integral hirukoitza eta lerro-integrala erlazionatzen ditu.

Stokesen teorema. Izan bedi S gainazal parametriko erregular bat. Izan bedi D plano bateko eremu bat Γ Jordanen kurba batek mugatzen duena. Demagun existitzen dela φ, C^2 motako aplikazio injektibo bat, non $S = \varphi(D)$ eta $\alpha = \varphi(\Gamma)$ betetzen baitira. 7.2 irudian planteatutako gainazal eta funtzioen adibide grafiko bat ikus daiteke.



7.2 irudia. Stokesen teoreman planteatu dugun kasuaren adibide grafiko bat.

Izan bedi $\overrightarrow{\mathbf{F}}$, C^1 motako bektore-eremu bat. Orduan:

$$\int\int_S \overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})}\, dS = \int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt.$$

Adibidea. Izan bitez S esfera unitatea $z = 0$ planoarekin mozterakoan sortzen den gainazala eta $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) = (y, -x, e^{xz})$. Kalkulatu

$$\int\int_S \overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})}\, dS.$$

Stokesen teorema aplikatuz, eskatzen zaigun integrala kalkulatu beharrean bere baliokidea kalkulatuko dugu. Horretarako, lehenengo α kurba parametrizatuko dugu:

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ t \in [0, 2\pi].$$

Eta orain, Stokesen teorema aplikatuko dugu:

$$\int\int_S \overrightarrow{rot(\overrightarrow{\mathbf{F}})}\, dS = \int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt.$$

Aurretik ikusi dugun moduan, bektore-eremu baten lerro-integrala honako era honetan kalkulatzen da:

$$\int_\alpha \overrightarrow{\mathbf{F}}\, dt = \int_a^b \langle \overrightarrow{\mathbf{F}}(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt.$$

Beraz, $\overrightarrow{\mathbf{F}}(\alpha(t)) = (\sin t, -\cos t, 1)$ eta $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ direla kontuan izanda, integralaren balioa kalkula dezakegu:

$$\int_0^{2\pi} \langle \overrightarrow{\mathbf{F}}(\alpha(t)), \alpha'(t)\rangle\, dt = \int_0^{2\pi} \langle(\sin t, -\cos t, 1), (-\sin t, \cos t, 0)\rangle\, dt =$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} -1\, dt = -2\pi.$$

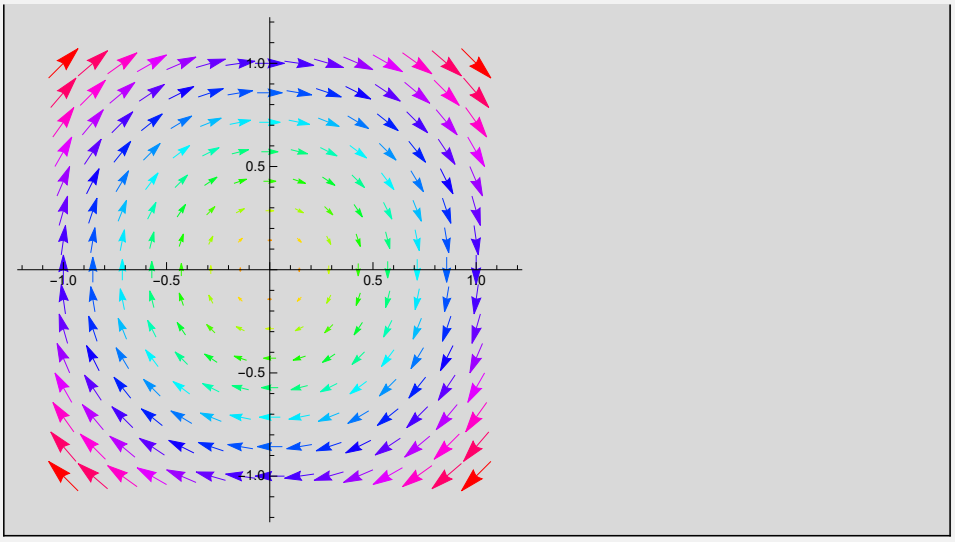
7.5 Ordenagailuko praktikak

7.1 ariketa. Izan bedi $F(x,y) = y\vec{i} - x\vec{j}$. Kalkulatu Fren integrala $A(0,1)$ eta $B(1,0)$ puntuak lotzen dituen zuzenean zehar, eta egiaztatu integralaren balioa zuzena korritzen den norantzaren menpekoa dela.

Eremu bektoriala definituko dugu, eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
F1[x_, y_] = y; F2[x_, y_] = -x;
F[x_, y_] = {F1[x, y], F2[x, y]}
VectorPlot[{F1[x, y], F2[x, y]}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, Axes → True,
Frame → False, VectorColorFunction → Hue]
```

$\{y, -x\}$



Zuzena parametrizatuko dugu:

```
a = {0, 1}; b = {1, 0};
r[t_] = a + t(b - a)
```

$\{t, 1 - t\}$

```
x[t_] = r[t][[1]]
y[t_] = r[t][[2]]
```

t

$1 - t$

Eta zuzenaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ta = Solve[r[t] == a, t]
```

$\{\{t \to 0\}\}$

```
t0 = t/.ta[[1]]
```

0

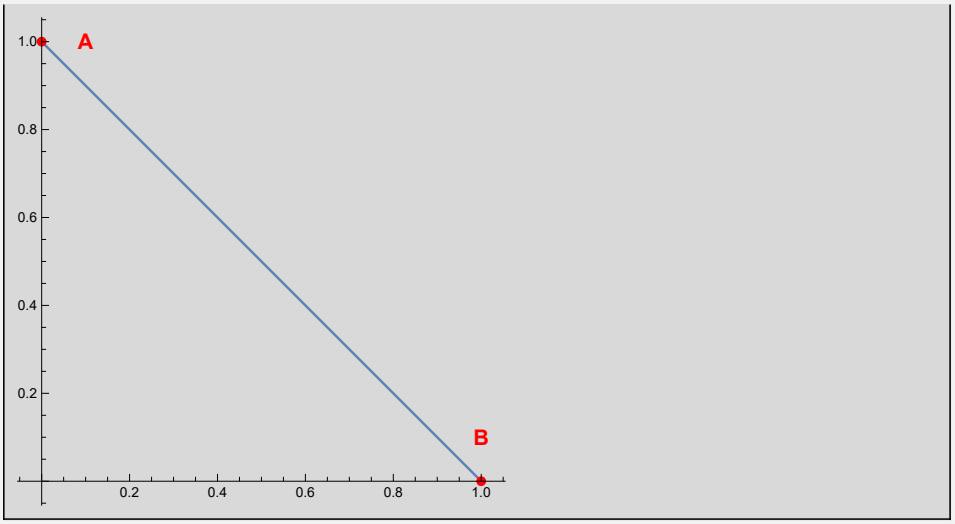
```
tb = Solve[r[t] == b, t]
```

$\{\{t \to 1\}\}$

```
t1 = t/.tb[[1]]
```

1

```
zuzena = ParametricPlot[r[t], {t, t0, t1}];
puntuak = ListPlot[{a, b}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
etiketak = {{Text["A", {0.1, 1}], Text["B", {1, 0.1}]}};
Show[zuzena, puntuak, PlotRange → {.0, 1}, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Eta AB zuzenean barreneko integrala kalkulatuko dugu, Atik Bra:

```
∫_t0^t1 F[x[t], y[t]].r'[t] dt
```

1

Eta Btik Ara:

```
∫_t1^t0 F[x[t], y[t]].r'[t] dt
```

-1

Horrela, egiaztatuta geratzen da norantza batean edo bestean egiteak integralaren ikurra aldatzen duela.

7.2 ariketa. Kalkulatu $F(x, y) = y\vec{i} - x\vec{j}$ eremu bektorialaren integrala $A(0, 1)$ eta $B(1, 0)$ puntuak lotzen dituen $x^2 + y^2 = 1$ zirkunferentziaren arkuan zehar.

Eremu bektoriala definituko dugu:

```
F1[x_, y_] = y; F2[x_, y_] = -x;
F[x_, y_] = {F1[x, y], F2[x, y]}
```

$\{y, -x\}$

Kurba parametrizatuko dugu:

```
a = {0, 1}; b = {1, 0};
x[t_] = Cos[t]; y[t_] = Sin[t];
r[t_] = {x[t], y[t]}
```

$\{\text{Cos}[t], \text{Sin}[t]\}$

Kurbaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
ta = Solve[r[t] == a, t]
```

$\left\{\left\{t \to \text{ConditionalExpression}\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi c_1, c_1 \in \mathbb{Z}\right]\right\}\right\}$

$c_1 = 0$ dela izango dugu kontuan, $t = \frac{\pi}{2}$ soluzioa hartzen badugu:

```
t0 = π/2;

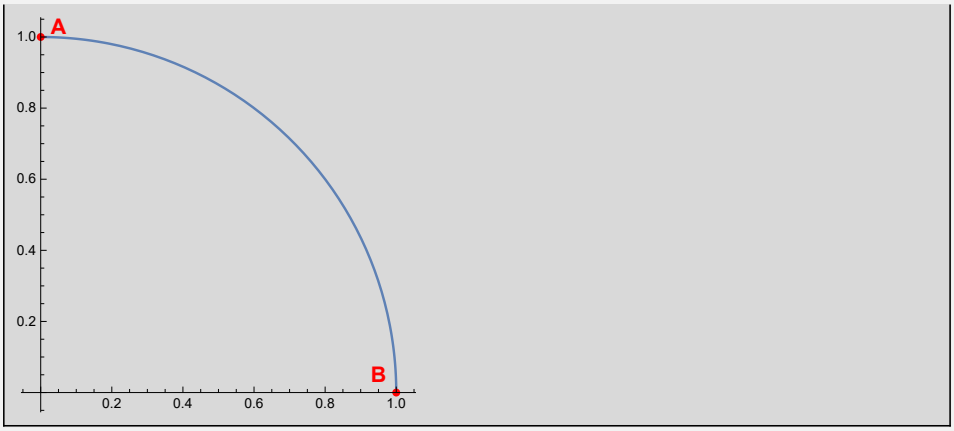
tb = Solve[r[t] == b, t]
```

$\{\{t \to \text{ConditionalExpression}[2\pi c_1, c_1 \in \mathbb{Z}]\}\}$

Eta $c_1 = 0$ dela izango dugu kontuan, $t = 0$ soluzioa hartzen dugunean:

```
t1 = 0;

zuzena = ParametricPlot[r[t], {t, t0, t1}];
puntuak = ListPlot[{a, b}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
etiketak = {{Text["A", {0.05, 1.03}, {0, 0}], Text["B", {0.95, 0.05}, {0, 0}]}};
Show[zuzena, puntuak, PlotRange → {.0, 1}, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



A puntutik B punturako norantzan egingo dugu integralaren kalkulua:

```
∫t0^t1 F[x[t], y[t]].r'[t] dt
```

$\frac{\pi}{2}$

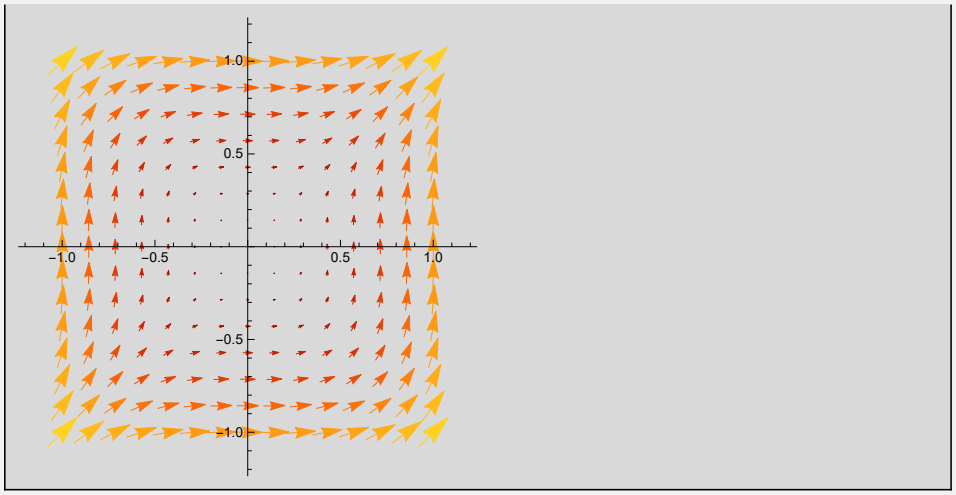
Aurreko ariketako eta honetako emaitzak ezberdinak dira. Hori gertatzen da eremu bektoriala ez delako kontserbakorra, aurrerago ikusiko dugun moduan.

7.3 ariketa. Izan bedi $F(x,y) = y^2\vec{i} + x^2\vec{j}$, eta $A(0,1)$, $B(1,1)$ eta $D(0,0)$ erpinak dituen T triangelua. Kalkulatu lerro horretan barreneko integrala.

Eremu bektoriala definituko dugu eta haren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
F1[x_, y_] = y^2; F2[x_, y_] = x^2;
F[x_, y_] = {F1[x, y], F2[x, y]}
VectorPlot[{F1[x, y], F2[x, y]}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, Axes → True, Frame → False,
VectorColorFunction → "SolarColors",
VectorScale → Medium]
```

$\{y^2, x^2\}$



Triangelua mugatzen duten hiru zuzenak parametrizatuko ditugu:

```
a = {1, 0}; b = {1, 1}; d = {0, 0};
r1[t_] = {x1[t_], y1[t_]} = a + t * (b − a)
r2[t_] = {x2[t_], y2[t_]} = b + t * (d − b)
r3[t_] = {x3[t_], y3[t_]} = d + t * (a − d)
```

$\{1, t\}$

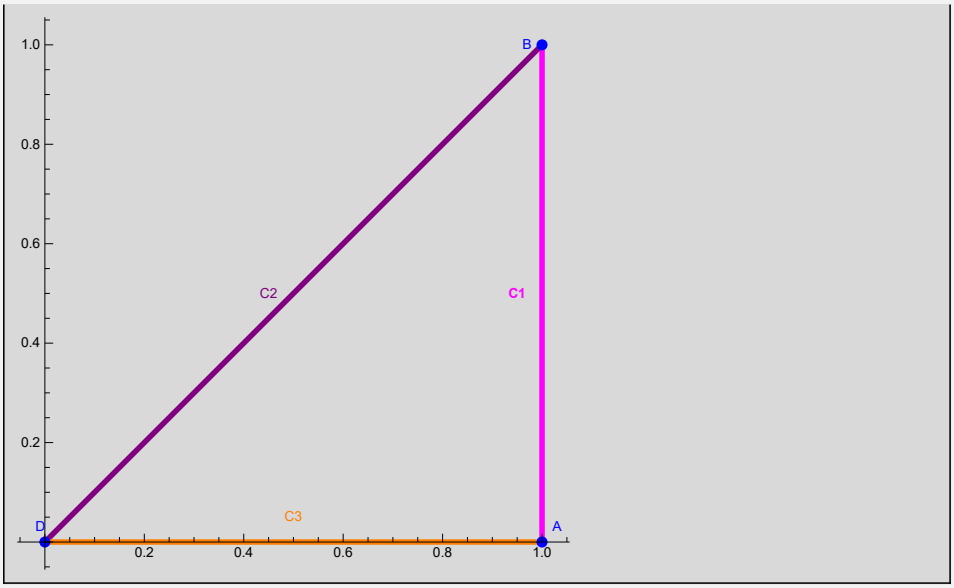
$\{1 - t, 1 - t\}$

$\{t, 0\}$

Triangeluaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
t0 = 0;
t1 = 1;
etiketak = {{Text["C1", {0.95, 0.5}], Text["C2", {0.45, 0.5}], Text["C3", {0.5, 0.05}],
Text["A", {1.03, 0.03}],
Text["B", {0.97, 1}], Text["D", {−0.009, 0.03}]}};
puntuak = ListPlot[{a, b, d}, PlotStyle → {Blue, PointSize[0.02]}];
```

```
triangelua = ParametricPlot[{r1[t], r2[t], r3[t]}, {t, t0, t1},
PlotStyle → {{Magenta, Thickness[0.01]}, {Purple, Thickness[0.01]},
{Orange, Thickness[0.01]}}];
Show[triangelua, puntuak, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Lerro-integral hori kalkulatzeko, beharrezkoa da integrala kalkulatzea $C1$, $C2$ eta $C3$ hiru bideetan zehar, eta, ondoren, integralak batzea:

```
dr1[t_] = D[r1[t], t]
```

$\{0, 1\}$

```
i1 = ∫_0^1 F[x1[t], y1[t]].dr1[t] dt
```

1

```
dr2[t_] = D[r2[t], t]
```

$\{-1, -1\}$

```
i2 = ∫_0^1 F[x2[t], y2[t]].dr2[t] dt
```

$-\frac{2}{3}$

```
dr3[t_] = D[r3[t], t]
```

$\{1, 0\}$

```
i3 = ∫_0^1 F[x3[t], y3[t]].dr3[t] dt
```

0

```
i = i1 + i2 + i3
```

$\frac{1}{3}$

7.4 ariketa. Egiaztatu $F(x,y) = \left(5 - \frac{x}{x^2+y^2}\right)\vec{i} - \frac{y}{x^2+y^2}\vec{j}$ eremu kontserbakorra dela. Kalkulatu $x^2+y^2=2$ zirkunferentziako $A(-1,1)$ eta $B(1,1)$ puntuen arteko ibilbiderik laburrenean zeharreko integrala.

$F(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$ eremu bektoriala kontserbakorra da honako hau betetzen bada:

$$\frac{\partial \mathrm{F1}(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{F2}(x,y)}{\partial x}.$$

Eremu bektoriala kontserbakorra denean, kurba itxi bateko lerro-integralaren balioa zero da.

Eremu bektoriala definituko dugu:

```
F1[x_, y_] = 5 - x/(x^2+y^2); F2[x_, y_] = -y/(x^2+y^2);
F[x_, y_] = {F1[x, y], F2[x, y]}
```

$\left\{5 - \frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right\}$

Eremu kontserbakorra dela egiaztatuko dugu:

```
D[F1[x, y], y]
```

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

```
D[F2[x, y], x]
```

$$\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Deribatuak berdinak direnez, eremu kontserbakorra da.

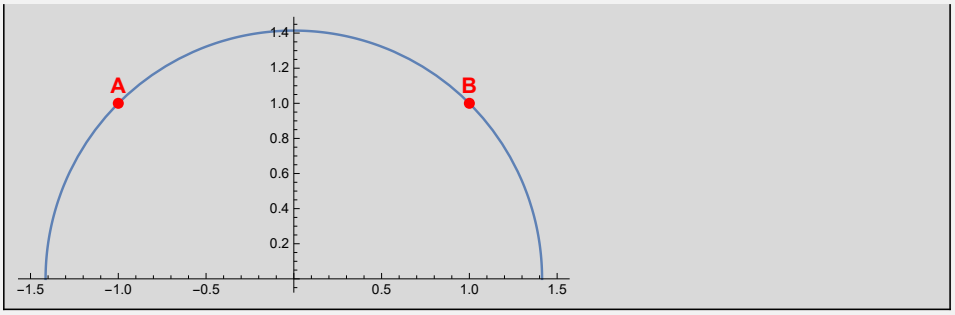
Zirkunferentzia parametrizatuko dugu:

```
a = {-1, 1}; b = {1, 1};
x[t_] = √2 Cos[t]; y[t_] = √2 Sin[t];
r[t_] = {x[t], y[t]}
```

$$\{\sqrt{2}\,\mathrm{Cos}[t], \sqrt{2}\,\mathrm{Sin}[t]\}$$

Zirkunferentziaren adierazpen grafikoa egingo dugu:

```
zuzena = ParametricPlot[r[t], {t, 0, π}];
puntuak = ListPlot[{a, b}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
etiketak = {{Text["A", {-1, 1.1}], Text["B", {1, 1.1}]}};
Show[zuzena, puntuak, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



A puntutik Brako integrala egiteko integralaren mugak lortuko ditugu:

```
Solve[{√2Cos[t] == -1, √2Sin[t] == 1}]
```

$\{\{t \to \text{ConditionalExpression}\left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi c_1, c_1 \in \mathbb{Z}\right]\}\}$

```
t0 = 3π/4;
```

```
Solve[{√2Cos[t] == 1, √2Sin[t] == 1}]
```

$\{\{t \to \text{ConditionalExpression}\left[\frac{\pi}{4} + 2\pi c_1, c_1 \in \mathbb{Z}\right]\}\}$

```
t1 = π/4;
```

Integrala egingo dugu:

```
∫_t0^t1 F[x[t], y[t]].r'[t] dt
```

10

Eremua kontserbakorra izaterakoan, ez zen beharrezkoa zirkunferentziaren parametrizazioa egitea. Bi puntuetatik igarotzen den zuzenean zeharreko lerro-integrala kalkula zitekeen:

```
a = {-1, 1}; b = {1, 1};
r[t_] = a + t(b - a)
```

$\{-1 + 2t, 1\}$

```
x[t_] = r[t][[1]]
y[t_] = r[t][[2]]
```

$-1 + 2t$

1

```
ta = Solve[r[t] == a]
```

$$\{\{t \to 0\}\}$$

```
t0 = t/.ta[[1]]
```

$$0$$

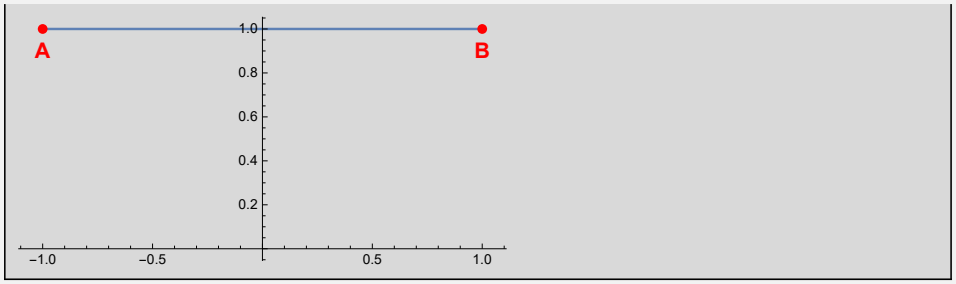
```
tb = Solve[r[t] == b]
```

$$\{\{t \to 1\}\}$$

```
t1 = t/.tb[[1]]
```

$$1$$

```
t0 = 0; t1 = 1;
zuzena = ParametricPlot[r[t], {t, 0, 1}];
puntuak = ListPlot[{a, b}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
etiketak = {{Text["A", {−1, 0.9}], Text["B", {1, 0.9}]}};
Show[zuzena, puntuak, PlotRange → {0, 1}, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



AB zuzenean zeharreko lerro-integrala kalkulatuko dugu:

```
∫_t0^t1 F[x[t], y[t]].r'[t] dt
```

10

Eta egiaztatuta geratzen da integrala ez dela integrazio-ibilbidearen menpekoa, eremu bektoriala kontserbakorra baita.

7.5 ariketa. Izan bedi $F(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$ eremu bektoriala. Kalkulatu haren lerro-integrala $C : (x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ kurban zehar.

Eremu bektoriala definituko dugu:

```
F1[x_, y_] = -y/(x^2+y^2); F2[x_, y_] = x/(x^2+y^2);
F[x_, y_] = {F1[x, y], F2[x, y]}
```

$$\left\{-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right\}$$

Eremua kontserbakorra dela egiaztatuko dugu:

```
D[F1[x, y], y]//Simplify
```

$$\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

```
D[F2[x, y], x]//Simplify
```

$$\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

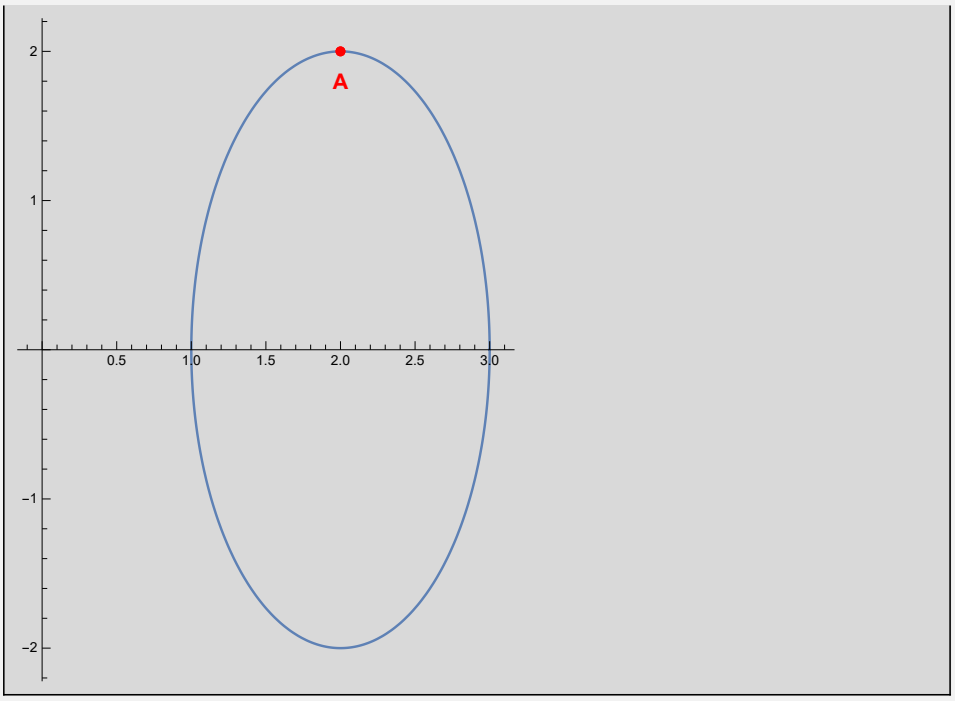
Deribatuak berdinak direnez, eremua kontserbakorra da. Integrala lerro itxi batean zehar kalkulatzeko esaten digu ariketak. Eremua kontserbakorra denez, integralak zero emango digu.

```
x[t_] = 2 + Cos[t]; y[t_] = 2Sin[t];
r[t_] = {x[t], y[t]}
```

$$\{2 + \text{Cos}[t], 2\text{Sin}[t]\}$$

```
t0 = 0; t1 = 2π;
```

```
zuzena = ParametricPlot[r[t], {t, t0, t1}, AxesOrigin → {0, 0}];
puntuak = ListPlot[{{2, 2}}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
etiketak = {{Text["A", {2, 1.8}]}};
Show[zuzena, puntuak, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```



Eta bukatzeko, lerro-integrala kalkulatuko dugu:

```
∫_t0^t1 F[x[t], y[t]].r'[t] dt
```

0

7.6 ariketa. Kalkulatu $\int_C \frac{ydx-xdy}{x^2}$ integrala, C lerroa izanik $A(4,7)$ eta $B(2,1)$ puntuak lotzen dituena. Kalkulatu integralaren balioa ibilbide bat erabilita, bai eta funtzio potentziala erabilita ere.

Eremu bektoriala definituko dugu eta kontserbakorra ea den ikusiko dugu:

```
F1[x_, y_] = y/x^2; F2[x_, y_] = -x/x^2;
F[x_, y_] = {F1[x, y], F2[x, y]}
```

$\left\{\frac{y}{x^2}, -\frac{1}{x}\right\}$

```
D[F1[x, y], y]
```

$\frac{1}{x^2}$

```
D[F2[x, y], x]
```

$\frac{1}{x^2}$

Deribatuak berdinak direnez, eremua kontserbakorra da. Beraz, integrala edozein bide erabiliz kalkula daiteke, beti izango baitu balio bera. Adibidez, A eta B puntuak lotzen dituen zuzenean barrena kalkulatuko dugu:

```
a = {4, 7}; b = {2, 1};
r[t_] = a + t(b - a)
```

$\{4 - 2t, 7 - 6t\}$

```
x[t_] = r[t][[1]]
y[t_] = r[t][[2]]
```

$4 - 2t$

$7 - 6t$

```
ta = Solve[r[t] == a]
```

$\{\{t \to 0\}\}$

```
t0 = t/.ta[[1]]
```

0

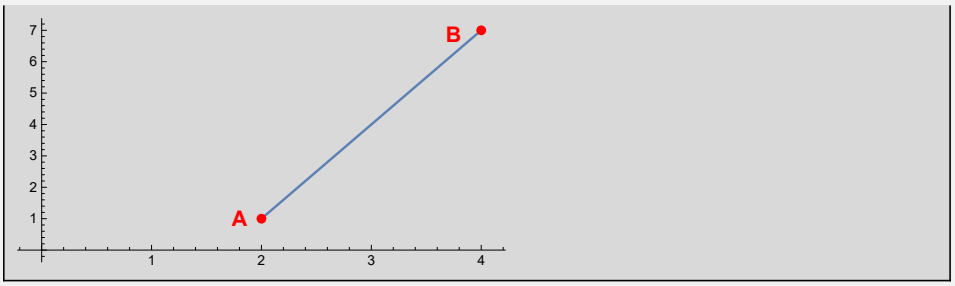
```
tb = Solve[r[t] == b]
```

$$\{\{t \to 1\}\}$$

```
t1 = t/.tb[[1]]
```

$$1$$

```
zuzena = ParametricPlot[r[t], {t, 0, 1}, AspectRatio → 1/2, AxesOrigin → {0, 0}];
puntuak = ListPlot[{a, b}, PlotStyle → {Red, PointSize[0.02]}];
etiketak = {{Text["A", {1.8, 1}], Text["B", {3.75, 6.85}]}};
Show[zuzena, puntuak, Epilog → Graphics[etiketak][[1]]]
```




```
∫_t0^t1 F[x[t], y[t]].r'[t] dt
```

$$\frac{5}{4}$$

Funtzio potentziala erabilita kalkulatzeko ere esaten digutenez, funtzio potentziala kalkulatuko dugu orain:

```
g[x_, y_] = ∫ F1[x, y] dx + c[y]
```

$$-\frac{y}{x} + c[y]$$

```
konstante = Solve [∂_y g[x, y] − F2[x, y] == 0, c'[y]]
```

$$\{\{c'[y] \to 0\}\}$$

```
d[y_] = ∫ konstante[[1, 1, 2]] dy
```

0

```
f[{x_, y_}] = g[x, y] + k /. c[y] → d[y]
```

$k - \frac{y}{x}$

Funtzio potentziala lortu ondoren, nahikoa da kurbaren helmugako eta abiapuntuko puntuetan hura ebaluatzea eta balio bien kenketa egitea:

```
lerrointegrala = f[b] - f[a]
```

$\frac{5}{4}$

Batera zein bestera lortzen diren emaitzak berdinak dira, jakina.

Bibliografia

[1] E. Alberdi Celaya, M. I. Eguía Ribero, M. J. González Gómez. OpenCourseWare (OCW, publicación de material docente), 2014. *Matematikak bistaratuz eta animatuz*. ISSN: 2255-2316.

[2] F. Ayres. *Cálculo diferencial e integral*. McGraw Hill, Mexiko, 1971.

[3] J. I. Barragués, I. Arrieta, J. Manterola. *Analisi Matematikoa*. Pearson Educación, 2012.

[4] G. Beck, S. Wolfram. *Mathematica: The Student Book*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Boston, United States, 1994.

[5] P. Cembranos Díaz, J. Mendoza Casas. *Cálculo integral*. Anaya Educación - Base universitaria, 2004.

[6] B. Demidovich. *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. Paraninfo, 1990.

[7] J. R. Franco Brañas. *Introducción al cálculo*. Pearson Educación argitaletxea, Madril, Espainia, 2003.

[8] F. Granero. *Cálculo*. McGraw Hill, Madril, Espainia, 1991.

[9] E. Kreyszig. *Matemáticas avanzadas para Ingeniería*. Limusa-Noriega, Mexiko, 1985.

[10] R. Larson, R. Hostetler, B. Edwards. *Cálculo*. McGraw Hill, 1999.

[11] M. J. Manterola Zabala, C. Alcalde Valverde, J. I. Barragués Fuentes, A. Mor. *Ingeniaritzarako Oinarri Matematikoak. Ariketa ebatziak*. Elhuyar Edizioak, 2005.

[12] E. Mijangos Fernández. *Ingeniaritzaren Oinarri Matematikoak*. Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua (UPV/EHU), Leioa, Espainia, 2003.

[13] N. Piskunov. *Cálculo diferencial e integral. Tomos I y II*. MIR argitaletxea, Mosku, Errusia, 1983.

[14] S.L. Salas, E. Hille, G. J. Etgen. *Calculus Una y varias variables*. Reverte argitaletxea, 2006.

[15] R. T. Smith, R. B. Minton. *Cálculo. Volumen I*. McGraw Hill, 2002.

[16] R. T. Smith, R. B. Minton. *Cálculo. Volumen II*. McGraw Hill, 2004.

[17] B. F. Torrence, E. A. Torrence. *The Student's introduction to Mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2009.

[18] S. Wolfram. *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Boston, United States, 1991.

[19] S. Wolfram. *The Mathematica book*. Cambridge University Press, 1999.