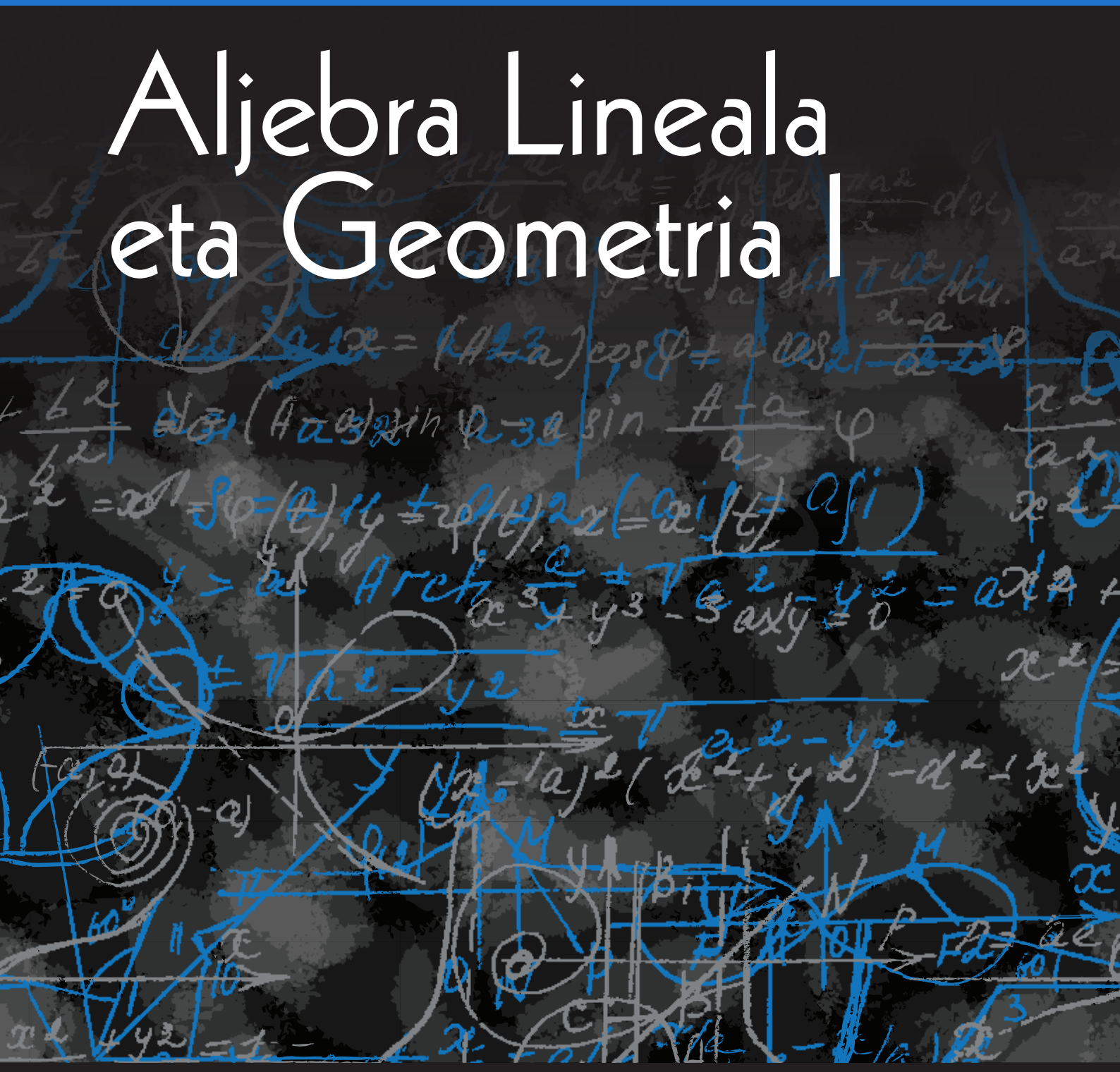
Oihana Garayalde Ocaña
Federico Berlai

Aljebra Lineala eta Geometria I



eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Aljebra Lineala eta Geometria I

Federico Berlai
Oihana Garayalde Ocaña

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

CIP. Unibertsitateko Biblioteka

Berlai, Federico

Aljebra lineala eta geometria I [Recurso electrónico] / Federico Berlai, Oihana Garayalde Ocaña. – Datos. – [Leioa] : Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial, [2025]. – 1 recurso en línea: PDF (238 p.). – (Unibertsitateko Eskuliburuak = Manuales Universitarios)
Modo de acceso: World Wide Web
ISBN: 978-84-1319-628-2

1. Álgebra lineal. 2. Geometría. I. Garayalde Ocaña, Oihana, coaut.

(0.034)512/514

UPV/EHUko Euskara Zerbitzuak sustatua eta zuzendua, Euskarazko ikasmaterialgintza sustatzeko deialdiaren bitartez

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua

ISBN: 978-84-1319-628-2

Hitzaurrea

Eskuliburu hau idazten hasi ginen unean, Aljebra Lineala eta Geometria I irakasgaian jorratzen den material osoa batzen zuen liburuxka osatzea genuen helburu. Eskuragarri genituen irakasgai horretan ikasten diren emaitza guztiak jasotzen zituzten «gidoiak» (hor agertzen ziren teorian lantzen ziren emaitzak). Baina gidoi horietatik abiatuz, emaitza nagusien frogak eta adibideak zituen materiala sortzeko nahia sentitu genuen. Horrela bada, Matematika gradua edo Fisika, Ingeniaritza Elektronikoa nahiz gradu bikoitza ikasten hasten den ikasle batek Aljebra Lineala eta Geometria I irakasgairako euskaraz idatzitako beste erreferentzia bat izatea nahi genuen (nahiz eta badakigun, adibidez, Fisika, Ingeniaritza elektronikoa eta gradu bikoitzeko gaitegi guztia ez asebete). Honako orrialde hauek, beraz, zuretzat erabilgarriak izatea espero dugu.

Lerro hauetan, liburu honetan aurki daitezkeen kontzeptu eta emaitza nagusien laburpen bat egingo dugu.

Bi pertsonak elkar ongi uler dezaten ezinbestekotzat jotzen dugu gutxienez bi pertsona horiek ezagutzen duten hizkuntza bat amankomunean izatea. Matematika hizkuntza gisa ulertzen dugunontzat, beraz, ikasle batek Matematikako graduko irakasgai bat uler dezan, lehen pausoa Matematikan erabiltzen den oinarrizko terminologia ezagutzea izango da. Horregatik, liburu hau *Oinarrizko nozioak* izeneko atalarekin abiatzen da. Bertan, multzoen adierazpenak, funtzioen definizio eta propietateak eta zenbaki multzo desberdinak aurkeztuko ditugu, besteak beste. Atal horietan, matematikan erabiltzen diren ikur batzuk ere agertuko dira. Hortik aurrera, lehenengo gaian ikasiko ditugun nozioak ulertzeko beharrezkoak diren kontzeptu batzuk ikasteaz gain (adibidez, taldeak eta gorputzak), bigarren eta hirugarren gaian erabiliko ditugun matrize eta ekuazio linealetako sistemak ere agertuko dira.

Lehen gaiarekin batera, irakasgai honetako aljebrako zatiarekin hasiko gara. Bertan, gure objektu nagusiak definituko ditugu: *bektore-espazioak* edo *espazio bektorialak*. Definizio eta adibide batzuk ikusi ondoren, espazio-egitura mantentzen duten azpimultzoak definitzen dira: *azpiespazio bektorialak*. Atal honetako kontzeptu nagusietako bat *oinarri*arena da (eta estuki loturik dagoen *dimentsio*arena): bektore-espazio orok oinarri bat onartzen du, eta bektore-espazioko elementu bakoitza oinarriko elementuak soilik erabiliz «adierazi» daiteke. Hala ere, bektore-espazio batek oinarri bat baino gehiago izango ditu, eta, gai hau amaitzeko, oinarri horien arteko erlazioa azalduko dugu.

Bigarren gaian, bektore-espazioak elkarren artean «konparatzeko» aplikazio edo funtzio berezi batzuk definitzen dira: *aplikazio linealak*. Aplikazio horiek, espazio bektorial bat hartuta, horren irudia (eta aurre-irudia) berriro ere espazio bektorial bat izango dela bermatzen dute, besteak beste. Aplikazio linealek duten beste abantaila bat ere ikasiko dugu: behin eremuko eta koeremuko oinarriak finkatuz gero, matrize bakar baten bidez adieraz daitezkeela, hain zuzen ere. Baina noski, finka dezakegun oinarri kopurua infinitua denez, aplikazio lineal bati elkartu dakizkioken matrize kopurua ere infinitua izango da. Horregatik, aplikazio lineal bati elkartutako matrizeen artean zein erlazio dagoen ere ikasiko dugu. Azkenik, aplikazio lineal berezi batzuk ikasiko ditugu: *isomorfismo linealak*.

Hirugarren gaian, matrizeekin lotuta dauden ideia batzuk definituko ditugu; bi matrize *antzekoak*

izatea eta matrize baten *heina*, esaterako. Bereziki, matrize bati *oinarrizko aldaketak* eginez gero, horren heina ez dela aldatzen frogatuko dugu. Lehen bi ataletan frogatutako emaitzak ekuazio linealetako sistemak ebazteko erabiliko ditugu. Azkenik, matrize baten determinantea definitu eta hori kalkulatzeko moduak azalduko ditugu baina, horren aurretik, beharrezkoa izango da talde simetrikoak definitu eta oinarrizko propietate batzuk ezagutzea.

Laugarren gaian aplikazio lineal berezi batzuk aztertuko ditugu: *endomorfismoak*. Hau da, eremuan eta koeremuan bektore-espazio bera duten aplikazio linealak. Gai honen helburua izango da, endomorfismo bat emanda, horri elkartuta dagoen matrize diagonal bat (hau da, diagonal nagusitik kanpo zeroak dituen matrizea) aurkitzea. Lehen galdera naturala, ordea, honako hau da: endomorfismo guztiek horrelako matrize bat izango al dute elkartuta? Horrela ez bada, kapitulu honetan, endomorfismo bati matrize diagonal bat elkartzeko bete behar diren baldintza beharrezko eta nahikoak zein diren frogatuko dugu. Horretarako, nahitaezkoa izango da *balio* eta *bektore propioak* nahiz *polinomio karakteristikoa* definitzea.

Bosgarren gaia forma bilineal eta koadratikoei buruzkoa da. Hasteko, forma bilinealen eremua da K gorputz baten gaineko bektore-espazio bat bere buruarekin biderketa kartesiarra egitean lortzen den bektore-espazioa; eta koeremua, berriz, K gorputza. Lehendabizi, bektore-espazioko oinarri bat finkatuta, aplikazio mota horien adierazpen matriziala lortzen ikasiko dugu, eta, noski, oinarri desberdinetarako lortzen diren matrizeen arteko erlazioa ezagutuko dugu. Kontzeptu berri bat definituko dugu: *ortogonaltasuna*; eta forma bilineal simetrikoek oinarri ortogonalak onartzen dituztela frogatuko dugu (K gorputzaren karakteristika bi ez bada). Matrize bat forma bilineal bati elkartuta dagoen edo ez erabakitzeko, hainbat irizpide ere ikasiko ditugu (forma bilineal simetriko eta hertsiki positiboentzat, *Sylvesterren irizpidea*, adibidez). Azkenik, forma koadratikoak definitzen dira, bigarren mailako polinomio homogeneoen bidez definituriko funtzioak. Horiek forma bilinealekin estuki lotuta daudela ikusiko dugu, horien arteko korrespondentzia bat frogatuz.

Seigarren gaian, forma bilineal simetriko eta hertsiki positiboei izen berezi bat emango diegu; *biderketa eskalarra*, alegia. Horrela, zenbaki errealen goputzaren gaineko dimentsio finituko bektore-espazio bat eta bertan definituriko biderketa eskalar bat baditugu, bikote horri *espazio euklidear* deituko diogu. Biderketa eskalarrak ahalbidetuko digu bektoreen *norma*, nolabait bektoreen «tamaina» neurtzeko erabiliko duguna, eta bi bektoreren arteko angelua definitzea. Gai honetan ikusiko dugun emaitza nagusietako bat *Grand-Schmidt-en ortogonalizazio-metodoa* izango da. Emaitza horri esker, espazio euklidearretan oinarri ortonormalak existitzen direla frogatuko dugu, eta horiek lortzeko bidea ikasi. Azken bi atalak *endomorfismo autoadjuntu* eta *isometria lineal*ei buruzkoak dira. Lehenengo, endomorfismoek onartzen duten oinarri ortonormala endomorfismoaren bektore propioz osaturikoa dela frogatu dugu. Bigarren motako endomorfismoak, berriz, biderketa eskalarra «gordetzen» dutenak dira. Bereziki, isometria linealen sailkapena emango dugu plano eta espazio errealetan.

Aurreko atalarekin Aljebra linealeko zatiarekin amaituko dugu, eta, hemendik aurrera, liburuaren bigarren zatiarekin hasiko gara: geometria atalarekin, hain zuzen ere. Geometria afina modu orokorrago batean defini eta analiza badaiteke ere, hemendik aurrera $\mathbb{R}^n$ espazioak duen egitura afina aztertzen zentratuko gara.

Zazpigarren gaian, $\mathbb{R}^n$ bektore-espazioa puntu multzotzat hartuko dugu. Are gehiago, bertako puntuak eta bektoreak propietate jakin batzuk betetzen dituen aplikazio baten bidez erlazionatuta daudela ikusiko dugu. Horrela, $\mathbb{R}^n$ puntu multzo eta bektore-espazio gisa ikusita eta aurrez aipatutako erregela horrekin hornituta, *espazio afina* dela esango dugu. Hurrengo pausoa, liburu honetako lehenengo gaian bezala, espazio afin egitura duten $\mathbb{R}^n$-ko azpimultzoak aztertzea izango da: *azpiespazio afinak* izenekoak. Ikusiko dugu espazio bektorialen «kopiak» besterik ez direla, jatorritik «pasatu» beharrik izan gabe. Horien arteko posizio erlatiboa (adibidez, paraleloak diren, ebakitzen diren, etab.) aztertu eta eragiketak (ebakidura, batura, etab.) definituko ditugu. Azkenik, *erreferentzia-sistema afinak* definituko ditugu, bektore-espazioetako oinarrien baliokideak direnak, eta azpiespazio

afinak ekuazio linealen bidez deskriba daitezkeela ikasiko.

Zortzigarren gaian, $\mathbb{R}^n$-k duen egitura euklidearra ere kontsideratuko dugu, eta, horrela, *espazio afin euklidearra* dela esango dugu. Biderketa eskalar estandarra erabiliz, bektoreen norma defini dezakegu (seigarren gaian ikasi bezala), eta norma horri esker, $\mathbb{R}^n$-ko edozein bi puntu emanda, horien arteko distantzia kalkulatu. Horregatik, $\mathbb{R}^n$ espazio afina, distantzia funtzioaz horniturik, *espazio afin euklidearra* dela esango dugu. Bi punturen arteko distantziaren nozioa $\mathbb{R}^n$-ko bi azpiespazio afinen arteko distantziara hedatuko dugu. Horrela, $\mathbb{R}^n$-ko edozein bi azpiespazio emanda, horien arteko distantzia kalkulatzeko metodo desberdinak ikasiko ditugu. Gai honetan ikasiko ditugun nozio nagusien artean *perpendikulartasuna* agertuko da.

Bederatzigarren gaian, edozein n, m bi zenbaki arrunt emanda, $\mathbb{R}^n$-tik $\mathbb{R}^m$-ra definituta dauden *aplikazio afinak* definituko ditugu: $\mathbb{R}^n$-ren azpimultzoen egitura afina «gordetzen » dutenak. Horien adierazpen matriziala eta propietate nagusiak ikasiko ditugu. Ondoren, aplikazio afin mota desberdinak definituko ditugu: *translazioak, homoteziak, simetriak, proiekzioak* eta *biraketak*, adibidez, eta horien ezaugarri nagusiak eman eta frogatuko ditugu. Atal honetako azken zatian, *mugimenduak eta antzekotasunak* aurkeztuko ditugu. Lehenengo aplikazioak distantzia «gordetzen» duten $\mathbb{R}^n$-tik $\mathbb{R}^n$-rako aplikazio afinak dira eta horien sailkapena emango dugu $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazioetan.

Hamargarren eta azken gaia konika eta koadriken sarrera labur bat da. Bereziki, *konikak* dira bigarren mailako ekuazioak erabiliz definitzen diren $\mathbb{R}^2$ plano afineko azpimultzoak. *Koadrikak*, berriz, bigarren mailako ekuazioak erabiliz definitzen diren $\mathbb{R}^3$-ko azpimultzoak dira. Koniken adibideen artean, elipseak, hiperbolak eta parabolak ditugu; koadriken adibideen artean, aldiz, elipsoideak, orri bateko eta bi orriko hiperboloideak eta esferak. Konikak, adibidez, $\mathbb{R}^3$-ko kono bati sekzio desberdinak aplikatuz lortzen diren objektu geometrikoak dira. Azken atal honetan, konika eta koadriken ekuazio laburtua lortzeko bidea erakutsiko da, testuinguru afin nahiz euklidearrean. Metodo horri esker, konika eta koadriken sailkapena emango dugu aurrez aipaturiko testuinguruetan.

Eskuliburu honetako bibliografian EHUko Aljebra Lineala eta Geometria I irakasgaiko oinarrizko bibliografiako liburuak ipintzea erabaki dugu. Horrez gain, beste pare bat liburu edo apunte ere agertzen dira.

Notazioa

Eskuliburu hau idazteko garaian, normalean Matematikan ohikoa edo ezagunena den notazioa erabiltzen saiatu gara. Askotan, ordea, bizitzan bezalaxe, gauza bera adierazteko modu asko daude, eta, egia esan, ez dago aukeraketa «onik» edo «txarrik». Gure kasuan, ziur gaude guk erabilitako notazioa ez dela irakurle guztien gustukoa izango. Egia esan, notazio matematikotik haratago, eskuliburu hau argitaratzeko prozesuan erabili beharreko idazkera askorekin ez gaude oso ados. Hala ere, notazioak notazio, egin dugun aukeraketa bakoitzarekin koherente izaten saiatu gara.

Esker onak

Eskuliburu hau idazteko garaian, momentu atseginak izan baditugu ere, ezin dugu ukatu azken uneko aldaketek eta errepasoek egonezin apur bat sortu digutela. Hala ere, orokorrean esperientzia aberasgarria izan dela esango genuke, eta, une batzuetan, irakasgai hau eman heinean ohartu ez garen zorroztasun edo leuntasun batzuez jabetzeko balio izan digu.

Esan bezala, lan honek gozotik gehiago izan du gazitik baino. Hori, hein handi batean, eskuliburu hau idazteko prozesua zerotik hasi behar ez izanari esker da. Izan ere, azken urteetan Euskal Herriko Unibertsitateko Matematika Saileko hainbat irakaslek ahalegin ikaragarria egin dute, euskaraz irakasteaz gain, Matematika graduko (nahiz Matematikako lizentziaturako) materiala ikasleentzat euskaraz eskuragarri egon zedin (eta, beraz, dadin).

Horregatik, gure kasura mugatuz, oso eskertuta gaude Aljebra Lineala eta Geometria I irakasgairako dagoeneko idatzita zeuden «teoriako gidoiak» nahiz ariketa-zerrendak erabiltzeko baimena izateagatik. Bereziki, ezingo genuke atal hau amaitu honako irakasle hauen laguntza (batzuetan beharrezkoa bezain neurtezina) azpimarratu gabe: eskerrik asko, beraz, Iraide Mardones, Leire Legarreta, Gustavo Fernández eta Josu Sangroniz. Eta baten bat bidean ahaztu bazaigu, barkatu!

Liburu honi buruzko hainbat elkarrizketa izan ditugu gure ingurukoekin, eta, ziur asko, buruko min gehien sortu diguna terminologia (eta notazioa) finkatzea izan da. Eskertu nahi ditugu kafe tarteko hizketaldiak; bereziki eskertu zuei, Jone Uria eta Josu Nájera, *espazio bektorial* eta *bektore-espazio* izenen aukeraketan (ez) laguntzeagatik.

Amaitzeko, oso eskertuta gaude eskuliburu hau idaztera elkar animatu izanagatik, elkarri bidea gozoago egiteagatik, eta, bereziki, azken uneak bizirauten elkarri laguntzeagatik.

Gaien aurkibidea

Gaien aurkibidea **vii**

0. Oinarrizko nozioak **1**
0.1 Multzoak eta funtzioak . . . 1
0.2 Zenbakiak . . . 5
0.3 Taldeak . . . 6
0.4 Gorputzak . . . 8
0.5 Ekuazio linealetako sistemak . . . 10
0.6 Matrizeak . . . 11
0.7 Ariketak . . . 17

I. Aljebra lineala **19**

1. Bektore-espazioak **21**
1.1 Bektore-espazioak eta lehenengo adibideak . . . 21
1.2 Bektore-azpiespazioak . . . 24
1.3 Oinarria eta dimentsioa . . . 33
1.4 Oinarri- eta koordenatu-aldaketak . . . 42
1.5 Ariketak . . . 45

2. Aplikazio linealak **49**
2.1 Aplikazio linealak eta oinarrizko propietateak . . . 49
2.2 Aplikazio linealen adierazpen matriziala . . . 56
2.3 Isomorfismo linealak . . . 59
2.4 Ariketak . . . 63

3. Matrizeen propietate nagusiak eta horien aplikazioak **67**
3.1 Matrize baliokideak eta matrizeen heina . . . 67
3.2 Oinarrizko aldaketak eta ekuazio linealetako sistemak matrizeen bidez . . . 72
3.3 Talde simetrikoa . . . 81
3.4 Determinantea . . . 85
3.5 Ariketak . . . 94

4. Endomorfismoen diagonalizazioa **97**
4.1 Balio eta bektore propioak . . . 98
4.2 Polinomio karakteristikoa . . . 100
4.3 Diagonalgarritasuna . . . 103

4.4 Ariketak 109

5. Forma bilinealak eta koadratikoak **113**
5.1 Forma bilinealak eta horien matrizeen bidezko adierazpena 113
5.2 Ortogonaltasuna eta oinarri ortogonalak 117
5.3 Forma koadratikoak 123
5.4 Ariketak 127

6. Espazio euklidearrak **133**
6.1 Biderketa eskalarra eta norma 133
6.2 Angeluak 136
6.3 Oinarri ortonormalak 137
6.4 Endomorfismo autoadjuntuak 142
6.5 Isometria linealak 145
6.6 Isometria linealak $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazio euklidearretan 146
6.7 Ariketak 151

II. Geometria **153**

7. Geometria afina **155**
7.1 $\mathbb{R}^n$-ren egitura afina 155
7.2 Azpiespazio afinak 157
7.3 Azpiespazio afinen arteko posizio erlatiboak 161
7.4 Azpiespazio afinen arteko eragiketak eta Grassmann-en formulak 163
7.5 Erreferentzi-sistema afinak 166
7.6 Azpiespazio afinen ekuazioak 168
7.7 Ariketak 172

8. Geometria euklidearra **175**
8.1 $\mathbb{R}^n$-ren egitura afin euklidearra 175
8.2 Perpendikulartasuna 176
8.3 Azpiespazio afinen arteko distantzia 179
8.4 Ariketak 185

9. Aplikazio afinak, mugimendu, eta antzekotasunak **187**
9.1 Aplikazio afinak 187
9.1.1. Talde afina 189
9.1.2. Aplikazio afinak eta azpiespazio afinak 190
9.2 Aplikazio afin motak 191
9.2.1. Translazioak 191
9.2.2. Homoteziak 192
9.2.3. Proiekzioak 193
9.2.4. Simetriak 194
9.2.5. Biraketak 196
9.3 Mugimendu eta antzekotasunak 197
9.4 Mugimenduak planoan eta espazioan 198
9.5 Ariketak 201

10. Konika eta koadriken sarrera **205**
10.1 Sarrera eta definizioa 205
10.2 Ekuazio laburtua lortzeko metodoa 207
10.2.1. Zati koadratikoa 208
10.2.2. Zati lineala 210
10.3 Ekuazio laburtua eta sailkapena 213
10.4 Ariketak 216

Eranskina: oinarrizko sinbolo matematikoak **217**

Kontzeptuen aurkibidea **219**

Bibliografia **223**

0. kapitulua

Oinarrizko nozioak

Kapitulu honen helburu nagusietako bat oinarrizko notazioa finkatzea izango da. Aldi berean, ondorengo ataletan agertuko diren kontzeptuak ulertzeko beharko ditugun nozio batzuk definitu eta horien propietate nagusiak ikusiko ditugu. Askotan, propietate edo baldintzak, *hitzez* idatzi ordez, sinbolo matematikoen bidez adieraziko ditugu; sinbolo horiek ezagutzen ez dituen irakurleak 10.4 Atalean aurki ditzake oinarrizko ikur eta adierazpenak.

0.1 Multzoak eta funtzioak

Ez dugu multzo bat zer den definituko, kontzeptu sakonegia delako. Multzoak ez diren bilduma asko existitzen dela esan, soilik!

Multzo bat osatzeko bi modu daude: bere elementuak zerrenda ditzakegu, edo multzoa definitzen duten baldintzak nabarmendu ditzakegu. Adibidez,

$$A = \{1, \bullet, 7, x\} \qquad \text{eta} \qquad B = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ jarraitua da}\}$$

bi multzo dira; lehenengoan bere elementuak zerrendatu ditugu, eta bigarrenean bere elementuek betetzen duten baldintza ipini dugu. Multzoak zerrendatzean, bertako elementuen ordenak ez du axola. Hau da, multzo gisa, ondoko berdintza hauek betetzen dira:

$$\{1, \bullet, 7, x\} = \{\bullet, 1, 7, x\} = \{x, 7, \bullet, 1\}.$$

Horrez gain, elementu bat errepikatzeak ez dio multzoari eragiten:

$$\{1, \bullet, 7, x\} = \{\bullet, 1, \bullet, 7, x, x, 7\}.$$

Notazioa. Elementu bat multzo baten barruan dagoela adierazteko $\in$ ikurra erabiliko dugu. Adibidez, $1 \in A$ betetzen da. Aldiz, 1 elementua B multzoan ez dagoela adierazteko, $1 \notin B$ idatziko dugu.

0.1.1. Definizioa. Baldin eta A multzoa bada, bere *tamaina*, $|A|$ adierazita, A-ren elementuen kopurua da.

Multzo baten tamaina finitua izan daiteke, ala ez. Bi multzok tamaina infinitua izan arren, ezin dugu ziurtatu tamaina bera izango dutenik. Adibidez, zenbaki errealen tamaina zenbaki arrazionalen tamaina baino handiagoa da; hau da, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}|$ betetzen da.

0.1.2. Adibidea (**Multzo hutsa).** Multzoen adibiderik garrantzitsuena *multzo hutsa* da. Multzo hutsa $\varnothing$ ikurraren bidez (edo $\varnothing$, $\{\}$, eta abar..) adierazten da, eta hurrengo baldintza hauek betetzen ditu (baliokideak dira, hau da, edozein baldintzak bestea inplikatzen du):

- Bere tamaina zero da.
- Ez da existitzen elementurik multzo horretan dagoenik.

Honako era honetan defini genezake:

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

Multzoen arteko bilketa, ebaketa eta kenketa eragiketak aurkeztuko ditugu: A eta B bi multzo badira,

$$\begin{aligned} A \text{ eta } B \text{ multzoen } \textit{bildura}: &\quad A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ edo } x \in B\},\\ A \text{ eta } B \text{ multzoen } \textit{ebakidura}: &\quad A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ eta } x \in B\},\\ A \text{ eta } B \text{ multzoen } \textit{diferentzia}: &\quad A\backslash B := \{x \mid x \in A \text{ eta } x \notin B\}. \end{aligned}$$

Batzuetan A-ren eta B-ren arteko kendura $A - B$ ikurraren bidez adierazten da.

0.1.3. Definizioa. Izan bitez A eta B multzoak. Esaten da B multzoa A-ren *azpimultzoa* dela, baldin eta $b \in A$ elementu guztietarako $b \in B$ betetzen bada.

Notazioa. Aurreko kasuan, $B \subseteq A$ ikurra erabiliko dugu. Baldin eta $B \subsetneq A$ idazten bada, horrek azpimarratu nahi du B multzoa A-ren azpimultzoa dela eta $B \neq A$ dugula. Aldiz, B multzoa A multzoaren parte ez dela adierazteko, $B \not\subset A$ idatziko dugu.

Definizioz, multzo hutsa edozein multzoren azpimultzoa da:

$$A \text{ multzoa} \qquad \Rightarrow \qquad \varnothing \subseteq A.$$

0.1.4. Definizioa (**Multzo baten parteen multzoa).** Baldin eta A multzoa bada, honako multzo hau defini dezakegu:

$$\mathcal{P}(A) := \big\{B \mid B \subseteq A\big\}.$$

Multzo horri A-ren *potentzia-multzo* edo A-ren *parteen multzo* deritzo. Batzuetan, $\mathcal{P}(A)$ erabili ordez, naturalagoa da 2^A ikurra erabiltzea.

Definizioa ikusita, $\varnothing, A \in \mathcal{P}(A)$ betetzen da edozein A multzotarako; hau da, multzo hutsa eta A parteen multzoaren elementuak dira.

0.1.5. Definizioa (**Biderketa kartesiarra).** Izan bitez A eta B bi multzo. Esango dugu honako multzo hau A-ren eta B-ren arteko *biderketa kartesiarra* dela:

$$A \times B := \big\{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\big\}.$$

0.1.6. Adibidea. Izan bitez $A = \{\bullet, \triangle, \heartsuit\}$ eta $B = \{\spadesuit, \square, \triangle\}$ multzoak. Honako hauek betetzen dira:

$$A \cap B = \{\triangle\}, \qquad A \cup B = \{\bullet, \triangle, \heartsuit, \spadesuit, \square\}, \qquad A\backslash B = \{\bullet, \heartsuit\}, \qquad B\backslash A = \{\spadesuit, \square\},$$

eta

$$A \times B = \big\{(\bullet, \spadesuit), (\bullet, \square), (\bullet, \triangle), (\triangle, \spadesuit), (\triangle, \square), (\triangle, \triangle), (\heartsuit, \spadesuit), (\heartsuit, \square), (\heartsuit, \triangle)\big\}.$$

Oraintxe ikusi bezala, multzoen arteko kenketa ez da eragiketa trukakorra, $A\backslash B \neq B\backslash A$ baita.

Azter ditzagun aurreko multzo pare baten parteen multzoak:

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \{\varnothing, A \cap B\},$$

eta

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\varnothing, \{\bullet\}, \{\triangle\}, \{\heartsuit\}, \{\bullet, \triangle\}, \{\bullet, \heartsuit\}, \{\triangle, \heartsuit\}, \underbrace{\{\bullet, \triangle, \heartsuit\}}_{=A}\Big\}.$$

Ohartu, $|A| = 3$ izanik, $|\mathcal{P}(A)| = 8 = 2^3$ betetzen dela. Berdintza hori orokorragoa da; hau da, C multzo finitua bada,

$$|\mathcal{P}(C)| = 2^{|C|},$$

eta horregatik, sarritan, C-ren parteen multzoa adierazteko 2^C ikurra erabiltzen da. Egiaztatu dugun beste propietate bat honako hau da:

$$|A \times B| = 9 = 3 \cdot 3 = |A| \cdot |B|$$

betetzen da. Propietate hau ere betetzen da orokorrean: A eta B bi multzo finitu badira, orduan $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ betetzen da.

0.1.7. Definizioa (**Baliokidetasun-erlazioa).** Izan bedi A hutsa ez den multzoa. Orduan, $R \subseteq A \times A$ mutzoaren azpimultzoa *baliokidetasun-erlazioa* dela esaten da, baldin eta honako baldintza hauek betetzen baditu:

i. *(Erreflexibotasuna)*: $(a, a) \in R$ elementu $a \in A$ guztietarako;

ii. *(Simetrikotasuna)*: baldin eta $(a, b) \in R$ bada, orduan $(b, a) \in R$ ere betetzen da;

iii. *(Iragankortasuna)*: baldin eta $(a, b), (b, c) \in R$ bada, orduan $(a, c) \in R$ ere betetzen da.

Baldin eta $(a, b) \in R$ bada, hori aRb ikurraren bidez adieraz daiteke.

Askotan, 0.1.7. definizioan agertzen den notazioa erabili ordez, $a \sim b$ ikurra erabiltzen da aRb adierazteko. Beraz, formalki $\sim \subseteq A \times A$ dugu.

Jarrai dezagun orain multzoen arteko funtzioak definitu eta adibide batzuk ikusten.

0.1.8. Definizioa. Izan bitez A eta B bi multzo. A multzotik B multzorako *funtzio* bat (edo *aplikazio* bat) da A multzoko edozein elementuri (gehienez) B multzoko elementu bakar bat esleitzen dion erregela bat, eta A-tik B-rako funtzioen multzoa $\mathcal{F}(A, B)$ bidez adieraziko da.

A multzoari funtzioaren *eremu*, edo *izate-eremu*, deritzo, eta B multzoari funtzioaren *koeremu* deritzo. Notazioa honako hau da:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & A & \to & B, \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array} \qquad \forall\, a \in A. \tag{0.1}$$

Baldin eta $b = f(a)$ betetzen bada, $b \in B$ elementua $a \in A$ elementuaren *irudia* da, eta

$$\{f(a) \mid a \in A\} = \{b \in B \mid \exists\, a \in A,\ f(a) = b\} \subseteq B$$

multzoari f-ren *irudi* deritzo. Sarritan $\mathrm{Im}(f)$ edo $\mathrm{Im}\, f$ ikurraren bidez adierazten da. Horrez gain,

$$\{a \in A \mid \exists\, b \in B,\ f(a) = b\} \subseteq A$$

multzoari f-ren *aurreirudi* deritzo, eta normalean $f^{-1}(B)$ ikurraren bidez adierazten da.

Notazioa. Demagun A eta B multzoen arteko f funtzioa dugula; orduan, (0.1). ekuazioan agertzen diren ikurren bidez adieraziko genuke. Bereziki, $\mapsto$ geziak a elementu bakoitzaren irudia $f(a)$ dela adierazten du. Sinbolo hori inoiz ez da eremu eta koeremu artean agertuko, beti elementuen artean idazten baita.

0.1.9. Adibidea. Has gaitezen funtzio bat ez den erregela bat eraikiz zenbaki arrunten artean:

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \{0,1,2,\dots,\} & \to & \{0,1,2,\dots,\} \\ & n & \mapsto & f(n) := \begin{cases} n, & n \text{ bikoitia bada,} \\ n+1, & 3\text{-k } n \text{ zatitzen badu.} \end{cases} \end{array}$$

Definizioz, 6 elementuak f-ren bitartez irudi bat baino gehiago ditu, eta, beraz, f ezin da funtzio bat izan. Har dezagun honako funtzio hau:

$$\begin{array}{rccl} g\colon & \{0,1,2,,\dots\} & \to & \{0,1,2,,\dots\} \\ & n & \mapsto & g(n) := \begin{cases} n, & n \text{ bikoitia bada,} \\ n+1, & n \text{ bakoitia bada.} \end{cases} \end{array}$$

Kasu horretan, g funtzio bat da eta $\mathrm{Im}(g) = \{0,2,4,\dots\}$ dugu.

Aurreko 0.1.8. definizioan *erregela* hitza erabili dugu horren definizioa eman gabe. Datorren definizioak *aplikazio* kontzeptua formalkiago ematen lagunduko digu.

0.1.10. Definizioa. Izan bitez A eta B bi multzo. Orduan, A-tik B-rako funtzioak honako bi propietate hauek betetzen dituzten $f \subseteq A \times B$ azpimultzoak baino ez dira:

i. $a \in A$ elementu guztietarako existitzen da $b \in B$, non $(a,b) \in f$ den.

ii. $a \in A$ elementu guztietarako eta $b, b' \in B$ elementu guztietarako $(a,b) \in f$ eta $(a,b') \in f$ betetzen badira, orduan $b = b'$ betetzen da.

0.1.11. Definizioa. Izan bedi $f\colon A \to B$ funtzioa. Esango dugu f funtzioa

i. *injektiboa* dela, baldin eta $a, a' \in A$ guztietarako honako inplikazio hau betetzen bada:

$$a \neq a' \quad \Rightarrow \quad f(a) \neq f(a');$$

ii. *supraiektiboa* dela, baldin eta $\mathrm{Im}(f) = B$ bada;

iii. *bijektiboa* dela, baldin eta injektiboa eta supraiektiboa bada.

Multzoekin egin bezala, ikus dezagun funtzioen arteko zein eragiketa gauzatu dezakegun funtzio berriak lortzeko.

0.1.12. Definizioa (Funtzioen konposaketa). Izan bitez A, B, C multzoak eta $f\colon A \to B$ eta $g\colon B \to C$ funtzioak. Kasu honetan, f eta g funtzioen *konposaketa*, $g \circ f\colon A \to C$ adierazten dena, honako era honetan definitzen da:

$$\begin{array}{rccl} g \circ f\colon & A & \to & C, \\ & a & \mapsto & g\big(f(a)\big) \end{array} \qquad \forall\, a \in A.$$

Hau da, $(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big)$ dugu.

0.1.13. Definizioa (Funtzioen murrizketa). Izan bitez A, B bi multzo, $f\colon A \to B$ funtzioa eta $\widetilde{A} \subseteq A$ azpimultzoa. Kasu honetan, f-ren $\widetilde{A}$ azpimultzorako *murrizketa*, $f\restriction_{\widetilde{A}}\colon \widetilde{A} \to B$ adieraziko duguna,

$$f\restriction_{\widetilde{A}}\colon \begin{array}{ccc} \widetilde{A} & \to & B, \\ \tilde{a} & \mapsto & f(\tilde{a}) \end{array} \qquad \forall\, \tilde{a} \in \widetilde{A}$$

eran definitutako funtzioa da.

Notazioa. Sarritan, notazio-abusu txiki bat eginez, hasierako f funtzioa eta horren murrizketa $f\restriction_{\widetilde{A}}$ hizki berberaz adierazten dira; $f\restriction_{\widetilde{A}}\colon \widetilde{A} \to B$ idatzi ordez, $f\colon \widetilde{A} \to B$ soilik idatziz.

0.1.14. Adibidea. Har ditzagun $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eta $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ honako era honetan definituriko funtzioak:

$$f(x) := 2^x, \qquad g(x) := 3x - 7, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Orduan, $h := f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ datorren moduan definituriko funtzioa izango da:

$$h(x) = \big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x - 7) = 2^{3x-7}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Kasu honetan, $g \circ f$ konposaketa ere funtzio bat da, honako era honetan emanda dagoena:

$$g \circ f(x) = 3 \cdot 2^x - 7, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Bereziki, orokorrean $f \circ g \neq g \circ f$ betetzen dela ikusten da; adibidez,

$$\big(f \circ g\big)(0) = 2^{-7} \neq -4 = \big(g \circ f\big)(0)$$

delako. Azkenik, har dezagun g funtzioaren murrizketa $\mathbb{Z}$ multzora:

$$g\restriction_{\mathbb{Z}}\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & 3x + 7 \end{array} \qquad \forall\, x \in \mathbb{Z}.$$

Ohartu $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$ eta $\operatorname{Im} g\restriction_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ berdintzak betetzen direla.

0.2 Zenbakiak

Dagoeneko ikasi duzue zenbaki mota desberdinak daudela eta, hortaz, mota ezberdineko zenbakiz osaturiko multzoak defini daitezkeela. Atal honen helburua multzo horien notazioa finkatzea izango da. Hala ere, ez dugu multzo horien existentzia frogatuko, ezta horien eraikuntza emango ere.

Notazioa. *Zenbaki arrunt*en multzoa, $\mathbb{N}$ ikurraren bidez adierazita, honako hau da:

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Hau da, zero zenbaki arrunta da. *Zenbaki oso*ak

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

dira. Ikusiko duzuen bezala, zenbaki osoak *eraztun*-egitura dute. Zenbaki *arrazional*ak zenbaki osoen zatikien gorputza dira (irakasgai honetan ez ditugu hitz horiek ulertu behar):

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

Zenbaki *errealak* era desberdin askotan eraiki daitezke, eta $\mathbb{R}$ ikurraren bidez adieraziko ditugu. Zoritxarrez, eskuliburu honetan ez dugu horien definizio edo eraikuntzarik emango. Baina, adibide gisa, zenbaki errealak axiomen bidez definitu daitezke edo zenbaki arrazionaletatik eraiki daitezke; zenbaki arrazionalen gainean definituriko balio absolutua osotuz.[1]

Azkenik, har dezagun $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$ *unitate irudikaria* eta idatzi zenbaki *konplexu*en multzoa ondoko era honetan:

$$\mathbb{C} := \{a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Bereziki $\mathrm{i}^2 = -1$ berdintza betetzen da, eta, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ bada, z zenbaki *irudikari*a dela esaten da.

Zenbaki konplexuen gainean bi eragiketa definitu daitezke: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zenbaki erreal guztietarako,

$$\begin{aligned} \text{batuketa:} \quad & (a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d), \\ \text{eta biderketa:} \quad & (a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = (ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc). \end{aligned}$$

0.2.1. Oharra. Honako partekotasun hauek betetzen dira:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

0.3 Taldeak

Matematikan egitura aljebraikorik ezagunenetakoa *talde* batena da, alor desberdinetan parte hartzen duen objektu edo egitura baita. Ohartu ez bagara ere, dagoeneko ikusi ditugu taldeen hainbat adibide; $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ eta $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, esaterako (ikusi 0.3.4. Adibidea). Ikasturtean zehar ikusiko dugun talde nagusia *matrizeen taldea* izango da.

0.3.1. Definizioa (Taldeak). Izan bitez G ez-hutsa den multzoa eta $\cdot : G \times G \to G$ eragiketa. Esango dugu $(G, \cdot)$ bikotea *taldea* dela baldin eta honako baldintzak betetzen badira:

i. Elkartze-propietatea: $g, h, k \in G$ guztietarako, $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$ betetzen da.

ii. Elementu neutroa: existitzen da $e_G \in G$ elementua non $g \cdot e_G = g = e_G \cdot g$ betetzen den elementu $g \in G$ guztietarako; taldearen *identitatea* edo *elementu neutroa* deituko dioguna.

iii. Alderantzizko elementuak: $g \in G$ elementu guztietarako, existitzen da $h \in G$ elementu bakar bat non $g \cdot h = e_G = h \cdot g$ betetzen den; h elementua g-ren *alderantzizkoa* dela eta g^{-1} ikurraz adieraziz.

0.3.2. Oharra. definizioari buruzko ohar pare bat emango ditugu.

1. Definizioz, $G = (G, \cdot)$ taldea bada, G multzo ez-hutsa da. Bereziki, definizioko bigarren baldintzagatik, $e_G \in G$ da beti. Ohartu, $G = \{e_G\}$ bada, G taldea dela; sarritan, *talde tribiala* deiturikoa.

2. $(G, \cdot)$ taldea bada eta e_G bere elementu neutroa, ez da zaila ikustea elementu hori bakarra dela (0.7.2. ariketaa).

Notazioa. Eragiketa zein den argi badago, normalean ez da adierazten, eta, $g \cdot h$ ordez, gh idazten da. Gainera, elkartze-propietatea betetzearren, $g, h, k \in G$ badira, ghk ikurrak esanahi bat eta bakar bat izango du, hau da:

$$ghk = (gh)k = g(hk).$$

[1] *osotu* hitzak ingelesezko *completion* ordezkatu nahi du.

Nahiz eta irakasgai honetan beharrezkoak ez izan, datozen lerroetan taldearen definizioarekin estuki lotuta dauden nozio batzuk aurkeztuko ditugu.

0.3.3. Definizioa (**Monoideak eta erditaldeak).** Izan bitez S ez-hutsa den multzoa eta $\cdot : S \times S \to S$ eragiketa. Esango dugu $(S, \cdot)$ bikotea:

i. *erditalde*a dela, baldin eta $\cdot$ eragiketak elkartze-propietatea betetzen badu;

ii. *monoide*a dela, baldin eta $\cdot$ eragiketak elkartze-propietatea betetzen badu eta eragiketa horrekiko elementu neutroa existitzen bada.

Notazioa. Normalean, erditaldeak S hizkiaren bitartez adierazten dira, eta monoideak, berriz, M hizkiaren bitartez.

Lehen esan bezela, *talde*, *erditalde* eta *monoide* kontzeptuak estuki lotuta daude. Izan ere, ondoko inplikazio hauek betetzen dira:

$$\text{erditaldeak} \quad \Leftarrow \quad \text{monoideak} \quad \Leftarrow \quad \text{taldeak.}$$

0.3.4. Adibidea. Har dezagun zenbaki osoen multzoa $\mathbb{Z}$ eta batura $+$ eragiketa. Orduan, $(\mathbb{Z}, +)$ taldea da, 0.3.1. definizioko honako baldintzak betetzen baitira:

- $x, y, z \in \mathbb{Z}$ guztietarako, x+(y+z)=(x+y)+z betetzen da.
- Existitzen da 0 elementu neutroa, $x + 0 = x = 0 + x$ betetzen duena.
- Zenbaki oso baten alderantzizkoa existitzen da, hots, $x \in \mathbb{Z}$ bada, $-x \in \mathbb{Z}$ bere alderantzizkoa da, $x + (-x) = 0 = (-x) + x$ izanik.

Gainera, talde honetan datorren baldintza betetzen da:

$$z + \tilde{z} = \tilde{z} + z \qquad \forall z, \tilde{z} \in \mathbb{Z},$$

hau da, bi zenbaki batzerakoan, horien ordena aldatu dezakegu emaitza aldatu gabe. Ohartu horrelako baldintzarik ez dela 0.3.1. definizioan agertzen (eta, bereziki, talde asko existituko direla baldintza hori betetzen ez dutenak).

Aldiz, $\mathbb{Z}$ multzoaren gaineko eragiketa aldatzen badugu eta $(\mathbb{Z}, \cdot)$ bikotea hartu, ez da zaila ikustea $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ez dela taldea. Eragiketa horrek elkartze propietatea betetzen duela ikus daiteke. Gainera, kasu horretan 1 zenbakia izango da $\cdot$-rekiko elementu neutroa. Baina $\cdot$ eragiketarekiko alderantzizkoa onartzen duten zenbakiak 1 eta -1 soilik dira. Bereziki, 0-k ez dauka alderantzizkorik:

$$\nexists z \in \mathbb{Z} \mid 0 \cdot z = z \cdot 0 = 1.$$

Beraz, $\mathbb{Z}$ ez da taldea biderketarekiko. Pentsa dezakegu $\mathbb{Z}$ multzoa hartu ordez $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ edo $\mathbb{C}$ hartuta talde bat lortuko dugula, baina kasu horietan ere 0 zenbakiak ez du alderantzizkorik izango. Hori bai, ikus dezakezue $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ eta $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ taldeak direla.

0.3.5. Definizioa (**Talde abeldarrak).** Izan bedi $(G, \cdot)$ taldea. Esango dugu $(G, \cdot)$ talde *abeldarra* edo talde *trukakorra* dela, baldin eta $g \cdot h = h \cdot g$ betetzen bada elementu $g, h \in G$ guztietarako; hau da, baldin eta $\cdot$ eragiketa trukakorra bada.

Notazioa. Talde abeldarren kasuan, horien eragiketa adierazteko batuketa erabili ohi da; hau da, $(G, \cdot)$ idatzi ordez, normalean $(G, +)$ idazten da. Bereziki, elementu neutroa 0_G eta $g \in G$ bakoitzaren alderantzizkoak $-g$ bidez adierazten dira.

Beste behin, talde ezagunak erabiliz berriak lortzeko tresna edo emaitza bat aurkeztuko dugu. Hasteko, $(G,\cdot)$ eta $(H,\star)$ bi talde badira, bereziki G eta H multzoak direnez, horien biderketa kartesiarra egin dezakegu

$$G \times H = \{(g,h) \mid g \in G, h \in H\}.$$

Gainera, $G \times H$ multzoan honako eragiketa hau defini dezakegu:

$$\begin{array}{rccc} \heartsuit\colon & \Big(G \times H\Big) \times \Big(G \times H\Big) & \to & G \times H \\ & \Big((g_1,h_1),(g_2,h_2)\Big) & \mapsto & (g_1 \cdot g_2, h_1 \star h_2) \end{array} \qquad \forall\, (g_1,h_1),(g_2,h_2) \in G \times H.$$

Hau da, talde bakoitzari dagokion eragiketa «osagaiz osagai» egiten da. Irakurleak honako emaitza hau betetzen dela ziurta dezake.

0.3.6. Lema. *Izan bitez $(G,\cdot)$ eta $(H,\star)$ bi talde. Orduan, aurrez definituriko $(G \times H, \heartsuit)$ bikotea taldea da. Gainera, $(G \times H, \heartsuit)$ talde abeldarra izango da, baldin eta soilik baldin $(G,\cdot)$ eta $(H,\star)$ talde abeldarrak badira.*

0.3.7. Oharra. Aipatu dugun bezala, normalean talde bateko eragiketa ez da esplizituki adierazten. Horregatik, $G \times H$ taldearen eragiketa honako era honetan adieraziko dugu: $(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$.

0.3.8. Adibidea. Dagoeneko ikusi dugu $\mathbb{Z}$ talde abeldarra dela $+$ batura eragiketarekiko. Ez da zaila ikustea $\mathbb{R}$ ere talde abeldarra dela batura $+$ eragiketarekiko. Orduan, $n \in \mathbb{N}$ guztietarako,

$$(\mathbb{R}^n, +) = \underbrace{(\mathbb{R},+) \times \cdots \times (\mathbb{R},+)}_{n \text{ aldiz}}$$

talde abeldarra da (ikusi 0.3.6. lema).

0.4 Gorputzak

0.4.1. Definizioa (Gorputzak). Izan bedi K hutsa ez den multzoa. Demagun K-ren gainean bi eragiketa existitzen direla:

$$+\colon K \times K \to K \quad \text{eta} \quad \cdot\colon K \times K \to K.$$

Esango dugu $(K,+,\cdot)$ hirukotea *gorputza* dela, baldin eta aurreko eragiketek honako propietate hauek betetzen badituzte:

- **elkartze-propietatea**: $a,b,c \in K$ elementu guztietarako $(a+b)+c = a+(b+c)$ eta $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ betetzen dira;
- eragiketak **trukakorrak** dira: $a,b \in K$ guztietarako, $a+b = b+a$ eta $a \cdot b = b \cdot a$ betetzen dira;
- **$+$-rekiko eta $\cdot$-rekiko elementu neutroak**: existitzen dira $0_K \in K$ eta $1_K \in K$ bi elementu desberdin (hau da $0_K \neq 1_K$), non, a guztietarako, $a + 0_K = a$ eta $a \cdot 1_K = a$ betetzen diren;
- **$+$-rekiko alderantzizkoak**: $a \in K$ elementu guztietarako existitzen da K-ren beste elementu bat, $-a$ bidez adierazten dena, non $a + (-a) = 0_K$ den;
- **$\cdot$-rekiko alderantzizkoak**: $a \in K \backslash \{0_K\}$ elementu guztietarako existitzen da K-ren beste elementu bat, a^{-1} bidez adierazten dena, non $a \cdot a^{-1} = 1_K$ den;

- **banakortasuna**: $a, b, c \in K$ elementu guztietarako, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ betetzen da.

Notazioa. $(K, +, \cdot)$ multzoaren gaineko bi eragiketak ezagunak badira, K soilik idatziko dugu.

Gorputzen adibideen artean zenbaki arrazionalak $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, errealak $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ eta konplexuak $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ditugu. Zenbaki osoen multzoa $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, aldiz, ez da gorputza, bertako elementu guztiek ez baitute alderantzizkorik $\cdot$ biderketarekiko.

Gorputzen gainean definitzen den nozio bat aurkeztuko dugu; irakasgai honetako emaitza batzuetan «rol» garrantzitsua izango duena.

0.4.2. Definizioa (**Karakteristika).** Izan bedi K gorputza. Honako balio hau K gorputzaren *karakteristika* gisa definitzen da:

$$\operatorname{char}(K) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}_{>0} \mid \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n \text{ aldiz}} = 0_K\}, & n \in \mathbb{N}_{>0} \text{ existitzen bada;} \\ 0, & \text{ez bada existizen.} \end{cases}$$

Beraz, orain arte aipatu ditugun gorputzen karakteristika (hau da, zenbaki arrazionalak, errealak eta konplexuak) zero da.

0.4.3. Adibidea. Adibide honetan, bi elementu dituen gorputza sortuko dugu. Ikusiko dugunez, bere karakteristika bi izango da. Zenbaki osoen multzoan, $\mathbb{Z}$, honako baliokidetasun-erlazio hau, $\sim$ ikurraz adierazia, defini dezakegu: $n, m \in \mathbb{Z}$ bi zenbaki oso badira, orduan

$$n \sim m \quad \text{baldin eta soilik baldin} \quad n - m \quad \text{bikoitia bada (hau da, } 2 \mid n - m).$$

Bi baliokidetasun-klase daude:

$$[0]_\sim = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ bikoitia da}\}, \qquad [1]_\sim = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ bakoitia da}\}.$$

Izenak emango dizkiegu bi klase hauei:

$$\bar{0} := [0]_\sim, \qquad \bar{1} := [1]_\sim,$$

eta $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ multzoa hartu. Dagoeneko ezaguna zaigun $\mathbb{Z}$ multzoko batuketa eta biderketa erabiliz, $\mathbb{F}_2$ multzoan hurrengo eragiketa hauek defini daitezke:

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}, \qquad \bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}, \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}. \tag{0.2}$$

Bereziki

$$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \qquad \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}, \qquad \bar{1} + \bar{0} = \bar{1} = \bar{0} + \bar{1}$$

eta

$$\bar{0} \cdot \bar{0} = \bar{0}, \qquad \bar{1} \cdot \bar{0} = \bar{0} = \bar{0} \cdot \bar{1}, \qquad \bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}.$$

Orduan, ikus daiteke $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ hirukoteak 0.4.1. definizioaren baldintzak betetzen dituela, eta, beraz, $\mathbb{F}_2$ bi elementu dituen gorputza da. Gainera, $\operatorname{char}(\mathbb{F}_2) = 2$ da, $\bar{1} \neq \bar{0}$ delako eta $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$ delako.

Datorren adibidean aurreko ideia orokortuko dugu.

0.4.4. Adibidea. 0.4.3. Adibidean egin dugun moduan, defini dezagun $\mathbb{Z}$ multzoan $\sim$ bidez adieraziko dugun baliokidetasun-erlazioa: $n, m \in \mathbb{Z}$ emanda,

$$n \sim m \quad \text{baldin eta soilik baldin} \quad p \quad \textbf{zenbaki lehen}\text{ak } n - m \text{ zatitzen badu (hau da, } p \mid n - m).$$

Egiazta ezazue p baliokidetasun-klase desberdin daudela, $\bar{0}, \bar{1}, \ldots \overline{p-1}$ bidez adieraz daitezkeenak. Orduan, (0.2). ekuazioan bezala, $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots \overline{p-1}\}$ multzoan batuketa eta biderketa defini ditzakegu eta $(\mathbb{F}_p, +, \cdot)$ hirukotea gorputza dela ondorioztatu. Gainera, zein izango da $\mathbb{F}_p$ gorputzaren karakteristika?

0.5 Ekuazio linealetako sistemak

Izan bedi K gorputza. Demagun $a, b \in K$ elementuak eta x aldagai ezezaguna emanda, $ax + b = 0$ ekuazioa askatu nahi dugula. Hasteko, $a = 0$ bada, $b = 0$ genuke zuzenean. Beraz, demagun $a \neq 0$ dela (eta, hortaz, a^{-1} elementua existitzen da). Orduan,

$$ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + \underbrace{b - b}_{=0} = -b \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{a^{-1}a}_{=1} x = a^{-1}b \quad \Leftrightarrow \quad x = a^{-1}b.$$

0.5.1. Definizioa (Ekuazio linealetako sistemak). Izan bitez $m, n \in \mathbb{N}$ bi zenbaki arrunt positibo eta K gorputza. Esango dugu

$$\mathcal{L}: \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ddots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

K-gaineko *n ezezagunetako m ekuazio linealetako sistema* dela, non $a_{ij} \in K$ eta $b_i \in K$ diren indize guztietarako. Sistemaren *soluzioak*

$$\mathcal{S}ol(\mathcal{L}) := \left\{(s_1, \ldots, s_n) \mid s_i \in K \quad \forall\, i = 1, \ldots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ji}s_i = b_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, m\right\}$$

multzoaren elementuak dira. Gainera, esango dugu:

i. $\mathcal{L}$ *sistema bateraezina* dela, baldin eta $\mathcal{S}ol(\mathcal{L}) = \varnothing$ bada;

ii. $\mathcal{L}$ *sistema bateragarria* dela, baldin eta $\mathcal{S}ol(\mathcal{L}) \neq \varnothing$ bada. Kasu horretan,

- sistemak soluzio bakarra badu, $\mathcal{L}$ *bateragarri determinatua* dela esaten da;
- sistemak soluzio bat baino gehiago badu (beraz, infinitu soluzio), *bateragarri indeterminatua* dela esaten da.

Amaitzeko, $i = 1, \ldots, m$ guztietarako $b_i = 0$ bada, sistema horri *sistema homogeneo* deritzo. Sistema horiek bateragarriak dira, gutxienez $\mathbf{0} = (0 \ldots 0)$ soluzioa dutelako.

Honako hau izango da 3. Atalean ebatzi nahiko dugun galdera.

0.5.2. Problema. *$\mathcal{L}$ ekuazio linealetako sistema emanda, aurkitu $\mathcal{S}ol(\mathcal{L})$ multzoa.*

0.5.3. Definizioa. Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ zenbaki arrunt positiboa eta n ezezagunetako $\mathcal{L}_1$ eta $\mathcal{L}_2$ ekuazio linealetako sistemak. Baldin eta $\mathcal{S}ol(\mathcal{L}_1) = \mathcal{S}ol(\mathcal{L}_2)$ betetzen bada, bi sistema hauek *baliokideak* direla esaten da.

Notazioa. Hemendik aurrera, honako notazio hau erabiliko dugu:

i. Baldin eta $\mathcal{L}_1$-eko ekuazioak trukatuz gero $\mathcal{L}_1$ sistematik $\mathcal{L}_2$ lortzen bada, orduan $\mathcal{L}_1 \xrightarrow{I} \mathcal{L}_2$ idatziko dugu.

ii. Baldin eta $\mathcal{L}_1$-eko ekuazioren bat $t \neq 0$ zenbakiaz biderkatuz gero $\mathcal{L}_1$ sistematik $\mathcal{L}_2$ lortzen bada, orduan $\mathcal{L}_1 \xrightarrow{II} \mathcal{L}_2$ idatziko dugu.

iii. Baldin eta $\mathcal{L}_1$-eko ekuazioren bat $t \neq 0$ zenbakiaz biderkatuz eta $\mathcal{L}_1$-eko beste ekuazioren batekin batuz $\mathcal{L}_1$ sistematik $\mathcal{L}_2$ lortuz gero, orduan $\mathcal{L}_1 \xrightarrow{III} \mathcal{L}_2$ idatziko dugu.

0.5.4. Adibidea. Izan bitez $K = \mathbb{R}$ eta

$$\mathcal{L}_1 : \quad \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 4x + 5y = 7, \end{cases} \tag{0.3}$$

sistema. Orduan

$$\mathcal{L}_1 \overset{II}{\to} \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}, \\ 4x + 5y = 7, \end{cases} \overset{III}{\to} \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}, \\ 0 - y = 5, \end{cases} \overset{III}{\to} \begin{cases} x = 8, \\ -y = 5, \end{cases} \overset{III}{\to} \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x = 8, \\ y = -5. \end{cases}$$

0.5.5. Lema. *Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ zenbaki arrunt positiboa eta n ezezagunetako $\mathcal{L}_1$ eta $\mathcal{L}_2$ ekuazio linealetako sistemak. Baldin eta $\mathcal{L}_1 \overset{I}{\to} \mathcal{L}_2$ edo $\mathcal{L}_1 \overset{II}{\to} \mathcal{L}_2$ edo $\mathcal{L}_1 \overset{III}{\to} \mathcal{L}_2$ bada, orduan $Sol(\mathcal{L}_1) = Sol(\mathcal{L}_2)$ dugu.*

Aurreko emaitza erabiliz, 0.5.4. Adibideko $\mathcal{L}_1$ eta $\mathcal{L}_2$ sistemak baliokideak dira.

0.6 Matrizeak

Dagoeneko ikusiko zenuten bezala, ekuazio linealetako sistemak matrizialki adieraz daitezke, eta, horrela, aurreko notazioan agertzen diren ekuazio linealetako sistemen eraldaketak matrizialki burutu. Oraindik matrize baten definizioa eman ez badugu ere, ikus dezagun zein den 0.3 ekuazioko sistemaren adierazpen matriziala.

0.6.1. Adibidea. Hasteko, gogoratu 0.3 ekuazioko sistema matrizialki idatz dezakegula:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Orduan, 0.5.4. Adibidean egindako eragiketak honako era honetan idatz daitezke:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{II}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \overset{III}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{III}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{III}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}. \tag{0.4}$$

Hau da, ezezagunak diren aldagaiak ezkuta ditzakegu eta ekuazio linealetako sistemako koefizienteak soilik idatzi.

Has gaitezen, beraz, matrizeak definitzetik.

0.6.2. Definizioa (Matrizeak). Izan bitez K gorputza eta $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ bi zenbaki arrunt positibo. Har dezagun datorren multzoa:

$$\mathrm{M}_{n,m}(K) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in K \, \forall i = 1, \dots, n, \, \forall j = 1, \dots, m \right\}.$$

Definitu berri dugun $\mathrm{M}_{n,m}(K)$ multzoko elementuei ($n \times m$ tamainako) *matrize* deritze. Esango dugu

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

A matrizearen *zutabeak* direla, eta

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

berriz, matrizearen *errenkadak*.

Hau da, matrize bat n errenkada eta m zutabetan kokatuta dauden K-ko elementuen «taula» bat baino ez da.

Notazioa. Baldin eta $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ matrizea bada, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ itxurakoa, horren idazkera errazteko, askotan $A = (a_{ij})$ soilik idatziko dugu; edo, baliokideki, $A = (a_{ij})_{i\in\{1,\dots,n\},\, j\in\{1,\dots,m\}}$.
Hainbat modu daude $\mathrm{M}_{n,m}(K)$ multzoa adierazteko: aukeren artean $\mathrm{M}(n\times m, K)$ edo $\mathrm{M}(n,m;K)$ daude. Baldin eta $n = m$ badira, $\mathrm{M}_{n,n}(K)$ adierazteko $\mathrm{M}_n(K)$ ikurra erabiliko dugu, eta $\mathrm{M}_n(K)$-ko elementuei *matrize karratu* deituko.

Irakasgaian zehar agertuko diren matrize mota desberdinak aurkeztuko ditugu orain.

0.6.3. Definizioa. Izan bitez $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ zenbaki arrunt positiboak eta $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ matrizea.

i. Esango dugu A matrize *diagonala* dela, baldin eta $i \neq j$ guztietarako, $a_{ij} = 0$ betetzen bada.

ii. Esango dugu A matrizea *azpitriangeluarra* dela, baldin eta $i < j$ guztietarako, $a_{ij} = 0$ bada.

iii. Esango dugu A matrizea *goi-triangeluarra* dela, baldin eta $i > j$ indize guztietarako $a_{ij} = 0$ betetzen bada.

0.6.4. Adibidea. Har ditzagun $\mathbb{R}$ gaineko honako matrize hauek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ohartu A matrizea goi-triangeluarra dela; B, berriz, azpitriangeluarra, eta D matrize diagonala da, diagonaletik kanpo zero zenbakiak agertzen direlako.

Definizioz, matrize karratu bat diagonala da, baldin eta soilik baldin goi-triangeluarra nahiz azpitriangeluarra bada.

0.6.5. Oharra. Formalki, $\mathrm{M}_{n,m}(K)$-ko edozein matrize $A = (a_{ij})$ funtzio bat baino ez da. Izan ere, A hizkiz adieraziko dugun honako erregela bezala uler dezakegu:

$$A\colon \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\} \to K, \qquad A(i,j) := a_{ij} \in K \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,n\} \text{ eta } \forall\, j \in \{1,\dots,m\}.$$

Hurrengo helburua matrizeen arteko eta matrizeen bidezko eragiketak ezagutu eta ulertzea izango da.

0.6.6. Definizioa. Izan bedi K gorputza eta $\mathrm{M}_{n,m}(K)$ aurretik definituriko multzoa. Tamaina bereko matrizeen arteko *batura* edo *batuketa*

$$+\colon \mathrm{M}_{n,m}(K) \times \mathrm{M}_{n,m}(K) \to \mathrm{M}_{n,m}(K)$$

horrela definitzen da:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}. \tag{0.5}$$

Ohartu, $\mathrm{M}_{n,m}(K)$ multzoan $(0) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ elementua dagoela eta

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,m} \end{pmatrix}$$

betetzen dela. Irakurleak honako emaitza hau froga dezala.

0.6.7. Lema. *Izan bitez $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ zenbaki arrunt positiboak eta K gorputza. Orduan $(\mathrm{M}_{n,m}(K), +)$ bikotea talde abeldarra da.*

0.6.8. Definizioa. Izan bedi K gorputza. Defini dezagun $\cdot : K \times \mathrm{M}_{n,m}(K) \to \mathrm{M}_{n,m}(K)$ eragiketa honako era honetan

$$\lambda \cdot A := (b_{i\,j}) \in \mathrm{M}_{n,m}(K), \qquad b_{i\,j} := \lambda \cdot a_{i\,j}, \quad \forall\, i = 1, \dots, n, \forall\, j = 1, \dots, m. \tag{0.6}$$

Eragiketa horri *eskalar bidezko biderketa* deituko diogu.

0.6.9. Adibidea. Har ditzagun $\mathbb{R}$ gaineko $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ matrizea eta $2 \in \mathbb{R}$ balioa; orduan,

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

izango da.

0.6.10. Galdera. Baldin eta $A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ bi matrize badira, A-ren eta B-ren arteko biderkadura beti defini al daiteke?

Erraz erantzun dezakegu galdera: ez, orokorrean ezin da bi matrizeren biderkadura definitu. Baina egoera konkretu batean bai.

0.6.11. Definizioa. Izan bedi K gorputza eta defini dezagun $\cdot : \mathrm{M}_{n,m}(K) \times \mathrm{M}_{m,l}(K) \to \mathrm{M}_{n,l}(K)$ eragiketa honako era honetan: $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ eta $B = (b_{rs}) \in \mathrm{M}_{m,l}(K)$ guztietarako,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \dots & a_{n\,m} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{M}_{n,m}(K)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1\,1} & \dots & b_{1\,l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m\,1} & \dots & b_{m\,l} \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{M}_{m,l}(K)} := \underbrace{(c_{i\,j})}_{\in \mathrm{M}_{n,l}(K)}, \qquad \text{non } c_{i\,j} := \sum_{k=1}^{m} a_{i\,k} \cdot b_{k\,j} \text{ den.} \tag{0.7}$$

Eragiketa hori *matrizeen arteko biderketa* dela esango dugu.

0.6.12. Oharra. Bereziki, $c_{i\,j} \in K$ koefizientea honako era honetan lortzen da: A-ren i. errenkada eta B-ren j. zutabea hartuta (beraz, m zenbaki, osagai edo koefiziente daude errenkada nahiz zutabe horietan), errenkadako lehenengo koefizientea zutabeko lehenengoarekin biderkatuko dugu, horri errenkadako bigarren koefizientea zutabeko bigarrenarekin biderkatuta batuko diogu, eta horrela jarraituko dugu errenkadako eta zutabeko m. koefizienteraino iritsi arte.

0.6.13. Adibidea. Izan bitez $\mathbb{R}$ gaineko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,3}(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

bi matrize. Orduan, (0.7). ekuazioa aplikatuz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot 4 + 1\cdot 6 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 4 + 1\cdot 6 \\ 0\cdot 2 + 0\cdot 4 + 1\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

dugu. Esplizituago,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bereziki, $n = m = l$ badira, (0.7). ekuazioan definitutako biderketa $\cdot\colon \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K)$ motakoa da (gogoratu, $\mathrm{M}_n(K)$ multzoa $\mathrm{M}_{n,n}(K)$ da). Beraz, galde dezakegu ea $(\mathrm{M}_n(K), \cdot)$ taldea den, eta baiezkoan, talde abeldarra den. Erraz ikusiko dugun bezala, bi galdera horien erantzuna ezezkoa da. Hori egin baino lehen $\cdot$ eragiketak elkartze-propietatea betetzen duela eta elementu neutroa onartzen duela frogatuko dugu, hurrengo bi lemetan.

0.6.14. Lema. *Izan bitez $n, m, l \in \mathbb{N}_{>0}$ zenbaki arrunt positiboak. Orduan,* (0.7). *ekuazioan definitutako $\cdot\colon \mathrm{M}_{n,m}(K) \times \mathrm{M}_{m,l}(K) \to \mathrm{M}_{n,l}(K)$ eragiketak elkartze-propietatea betetzen du; hau da, $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{m,l}(K)$ eta $D \in \mathrm{M}_{n,l}(K)$ guztietarako, $A \cdot (B \cdot D) = (A \cdot B) \cdot D$ betetzen da.*

Frogapena. Ikusi 0.7.3. ariketaa. □

0.6.15. Definizioa (Matrize baten iraulia). Baldin eta $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ matrizea bada, A-ren *iraulia*, A^t adieratzen dena, honako matrize hau da:

$$A^t = (b_{ij})_{i\in\{1,\dots,m\}, j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathrm{M}_{m,n(K)} \qquad \text{non} \qquad b_{ij} := a_{ji} \text{ definitzen den } \forall\, i \in \{1,\dots,m\},\ \forall\, j \in \{1,\dots,n\}.$$

0.6.16. Adibidea. Har dezagun $\mathbb{R}$ gaineko datorren A matrizea, eta bere iraulia kalkulatu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ 0 & 0 & 0 \\ \pi^2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{R}) \qquad \Rightarrow \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pi^2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ \pi & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

0.6.17. Lema. *Izan bitez $n, m, l \in \mathbb{N}_{>0}$ zenbaki arrunt positiboak, $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ eta $B \in \mathrm{M}_{m,l}(K)$. Orduan, $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ betetzen da.*

Frogapena. Izan bitez $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ eta $B = (b_{rs}) \in \mathrm{M}_{m,l}(K)$ matrizeak. Ikusi dugu $C = A \cdot B$ matrizearen (i, j) posizioko elementua $c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$ eran emanda dagoela. Orduan, definizioz, $C^t = (c^t_{uv})$-ren (i,j) posizioko elementua $\sum_{k=1}^{m} a_{jk} \cdot b_{ki}$ da.

Bestalde, $B^t \cdot A^t$ matrizea lortzeko $A^t = (a_{ji})$ eta $B^t = (b_{sr})$ matrizeei 0.7 ekuazioko eragiketa aplikatuko diegu. Orduan, $D = (d_{uv}) = B^t \cdot A^t$-ren (i,j) posizioko elementua $\sum_{k=1}^{m} a_{jk} \cdot b_{ki}$ da. Ondorioz, lema frogatuta geratzen da. □

Matrize karratuak

0.6.14. lemak dio (0.7). ekuazioan definitutako $\cdot\colon \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K)$ biderketak elkartze-propietatea betetzen duela. Beraz, geure buruari galde geniezaioke ea $(\mathrm{M}_n(K), \cdot)$ bikotea taldea den; hau da, ea 0.3.1. definizioko baldintzak betetzen dituen. Erraz ikusiko dugun bezala, erantzuna ezezkoa da.

Hurrengo lemak eta 0.6.14. lemak baieztatzen dute $(\mathrm{M}_n(K), \cdot)$ monoidea dela.

0.6.18. Lema. *Izan bedi $n \in \mathbb{N}_{>0}$ zenbaki arrunt positiboa. Diagonalak 1_K dauzkan matrize diagonala $\cdot\colon \mathrm{M}_n(K) \times \mathrm{M}_n(K) \to \mathrm{M}_n(K)$ eragiketaren elementu neutroa da.*

Frogapena. Berehalakoa da. □

0.6.19. Definizioa. Defini dezagun

$$\mathrm{GL}_n(K) := \left\{P \in \mathrm{M}_n(K) \mid \exists\, Q \in \mathrm{M}_n(K),\ P \cdot Q = Q \cdot P = I_n\right\} \subseteq \mathrm{M}_m(K)$$

multzoa. Baldin eta P matrizea $\mathrm{GL}_n(K)$ barne badago, orduan P *matrize alderanzgarria* dela esango dugu. Gainera, $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ emanda, $P \cdot Q = Q \cdot P = I_n$ betetzen duen Q matrizea P^{-1} bidez adierazten da, eta P-ren *alderantzizko matrize* deritzo.

0.6.20. Oharra. Laster ikusiko dugu $\mathrm{GL}_n(K) \neq \mathrm{M}_n(K)$ betetzen dela.

Definiziotik ikus daiteke $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ bada, orduan P^{-1} matrizea ere $\mathrm{GL}_n(K)$ barne dagoela eta, bereziki, $(P^{-1})^{-1} = P$ betetzen lortzen da.

Baldin eta $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ bi matrize baditugu, horien biderkadura ere $\mathrm{GL}_n(K)$ multzoan egongo da; izan ere,

$$(P \cdot Q) \cdot (Q^{-1} \cdot P^{-1}) = P \cdot (Q \cdot Q^{-1}) \cdot P^{-1} = P \cdot I_n \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = I_n$$

eta

$$(Q^{-1} \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot Q) = Q^{-1} \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot Q = Q \cdot I_n \cdot Q^{-1} = Q \cdot Q^{-1} = I_n.$$

Beraz, $P \cdot Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ eta $(P \cdot Q)^{-1} = Q^{-1} \cdot P^{-1}$ betetzen direla egiaztatu berri dugu. Orain, 0.6.14. eta 0.6.18. lemak eta aurreko oharrak erabiliz, matrize alderanzgarriek biderketarekiko talde bat sortzen dutela ondoriozta dezakegu.

0.6.21. Lema. *Izan bedi $n \in \mathbb{N}$ zenbaki oso positiboa. Orduan, $n \times n$ tamainako matrize alderanzgarrien multzoa biderketarekiko taldea da.*

Orain, matrize karratuen arteko biderketa ez dela trukakorra eta $\mathrm{GL}_n(K) \neq \mathrm{M}_n(K)$ betetzen dela ikusiko dugu.

0.6.22. Adibidea. Kontsidera ditzagun koefiziente errealak dituzten 3×3 matrizeak; hau da, $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ multzoa eta bertako bi matrize:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{eta} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definizioa erabiliz, honako berdintza hauek betetzen direla egiazta dezakezue:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beraz, $A \cdot B \neq B \cdot A$ betetzen duen adibidea aurkitu dugu, eta horregatik ondoriozta dezakegu $\cdot$ eragiketa ez dela trukakorra.

Matrize horiek erabilita ere ikus dezakegu $\left(\mathrm{M}_n(K), \cdot\right)$ ez dela taldea. Bereziki

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.8}$$

dugu (kalkulu esplizituak egin ditzakezue). Beraz, A matrizearen alderantzizkoa existituko balitz, (0.8). ekuaziotik

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{=I_n}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ondorioztatuko genuke; hau da,

$$I_n\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\underset{\text{0.6.18. lema}}{\overset{\uparrow}{=}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Baina bi matrize horiek ez dira matrize bera eta, hortaz, absurdo batera heldu gara. Horregatik, A matrizearen alderantzizkoa ez da existitzen, eta 0.3.1. definizioko baldintzak ez direla betetzen egiaztatu dugu.

0.6.23. Lema. *Baldin eta $P\in \mathrm{GL}_n(K)$ matrize alderanzgarria bada, orduan $(P^t)^{-1}=(P^{-1})^t$ dugu.*

Frogapena. Badakigu $P\cdot P^{-1}=I_n=P^{-1}\cdot P$ berdintzak betetzen direla. Beraz, irauliak hartuz gero,

$$I_n=I_n^t=\left(P\cdot P^{-1}\right)^t\underset{\text{0.6.17. lema}}{\overset{\uparrow}{=}}(P^{-1})^t\cdot P^t$$

dugu, eta, antzeko moduan, $I_n=P^t\cdot(P^{-1})^t$ ondorioztatzen dugu. Beraz, $(P^{-1})^t$ matrizeak P^t-ren alderantzizko matrizeak betetzen dituen bi baldintzak betetzen ditu. Definizioz, orduan, $(P^{-1})^t=(P^t)^{-1}$ dugu. □

Bektoreak matrize zutabe gisa

Izan bitez $m\in\mathrm{M}$ zenbaki arrunt positiboa eta K gorputza. Irakasgai honetan *bektore* hitzak orain ikusiko dugun kontzeptuak baino esanahi handiagoa izango duen arren, oraingoz, $M_{1,m}(K)$-ko matrizeei, edo simetrikoki $M_{m,1}(K)$-ko matrizeei, *bektore* deituko diegu.

Lehenengo kasuan, bektoreak «matrize zutabe» gisa idazten dira:

$$\mathrm{M}_{m,1}(K)=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}\mid a_i\in K,\ \forall\, i=1,\dots,m\right\},\tag{0.9}$$

eta bigarren kasuan, berriz, «errenkada edo lerro matrize« modura:

$$\mathrm{M}_{1,m}(K)=\left\{\begin{pmatrix}a_1&\dots&a_m\end{pmatrix}\mid a_i\in K\,\forall\, i=1,\dots,m\right\}.\tag{0.10}$$

Sarritan, ordea, aurreko multzoak adierazteko K^m erabiltzen da. Ohartu, $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{m,1}(K)$ bada, horren iraulia $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}^t$, bektorearen iraulia, alegia, (0.10). ekuazioko multzo barruan dagoela.

0.6.24. Oharra. Irakasgaian zehar ulertuko dugu zergatik diren gauza bera (0.9). ekuazioko multzoko elementuak eta (0.10). ekuazioko multzoko elementuak.

0.7 Ariketak

0.7.1. Ariketa. Gorputzeko axiomak soilik erabiliz, egiaztatu honako hauek:

i. $a \in K$ elementu guztietarako, $+$-rekiko a-ren alderantzizko elementua bakarra dela.

ii. $a \in K$ elementu guztietarako, $\cdot$-rekiko a-ren alderantzizko elementua bakarra dela.

iii. $a \in K$ elementu guztietarako, $-(-a) = a$ betetzen dela.

iv. $a \in K$ elementu guztietarako, $a \cdot 0 = 0$.

v. $a, b \in K$ elementu guztietarako, $a \cdot b = 0$ izanez gero, $a = 0$ edo $b = 0$ betetzen dela.

vi. $a \in K$ elementu guztietarako, $(-1) \cdot a = -a$ betetzen dela.

0.7.2. Ariketa. Izan bedi $(M, \cdot)$ monoidea. Frogatu $(M, \cdot)$ monoidean elementu neutro bakar bat existitzen dela.
Iradokizuna suposatu bi existizen direla, demagun e_M eta $\tilde{e}_M$ direla, eta frogatu $e_M = \tilde{e}_M$ betetzen dela.

0.7.3. Ariketa. Froga ezazu 0.6.14. Lema.

0.7.4. Ariketa. 0.6.18. Lema frogatu.

0.7.5. Ariketa. Izan bitez $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ edozein matrize, $v, w \in K^m$ edozein bi bektore eta $\lambda \in K$. Froga ezazu honako bi baldintza hauek betetzen direla:

i. $A \cdot (v + w) = A \cdot v + A \cdot w$.

ii. $A \cdot (\lambda v) = \lambda\big(A \cdot v\big)$.

0.7.6. Ariketa. **i.** Izan bitez $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ edozein matrize eta $v \in M_{n,1}(K)$ edozein bektore. Egiazta ezazu $A \cdot v$ bektorea A-ren zutabeen konbinazio lineala dela, non agertzen diren eskalarrak v-ren koefizienteak diren.

ii. Izan bitez $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ eta $B \in \mathrm{M}_{n,l}(K)$ edozein bi matrize. Egiazta ezazu $A \cdot B$ matrizearen i. zutabea A matrizea bider B-ren i. zutabea dela.

0.7.7. Ariketa. Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ bi matrize. Baldin eta

$$vAw = vBw \qquad \forall\, v \in \mathrm{M}_{1,n}(K),\ \forall\, w \in \mathrm{M}_{m,1}(K)$$

bada, orduan frogatu $A = B$ betetzen dela.
Iradokizuna: A-ren a_{11} eta B-ren b_{11} elementuak berdinak direla frogatzeko, erabil itzazue $v = (1, 0, \ldots, 0)$ eta $w = (1, 0, \ldots, 0)^t$. Zein bektore erabili behar dira $a_{ij} = b_{ij}$ berdintza egiaztatzeko?

I. Atala

Aljebra lineala

1. kapitulua

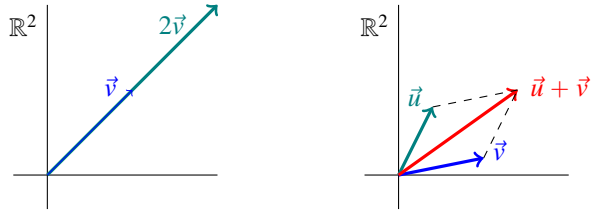
Bektore-espazioak

Lehen gai honen helburua irakasgai honetako Aljebra Linealaren ataleko objektu nagusiak definitu eta horien ezaugarri nagusiak zehaztea izango da. Zehazkiago, K gorputz bat emanda, horren gaineko *bektore-espazioa* definituko dugu; hainbat propietate betetzen dituzten bi eragiketaz hornituriko multzo ez-huts bat, alegia. Bertako elementuei *bektore* deituko diegu. Definizio hori eta adibide nagusiak ezagutu ondoren, egitura hori 'mantentzen' duten azpimultzoak aztertuko ditugu; *azpiespazio bektorial* deiturikoak. Gainera, 0.1 Atalean bezala, azpiespazio bektorialen arteko eragiketa batzuk definituko ditugu; *ebakidura* eta *batura*, besteak beste.

Aztertuko ditugun multzo (*ez-tribial*) horiek infinitu elementuz osatuta daude. Hala ere, kasu batzuetan, nahikoa izango da bektore-espazioko bektore kopuru bat ezagutzea objektu hori guztiz zehaztu ahal izateko. Bektore kopuru finitu berezi horri *oinarri* izena emango diogu eta bektore-espazio bakoitzak oinarri bakar bat soilik ez duela ikusiko dugun arren, oinarri horietan parte hartzen duten bektore kopurua beti berbera dela frogatuko dugu. Horrela bada, bektore kopuru horri bektore-espazioaren *dimentsio* deituko diogu. Azkenik, bektore baten oinarri batekiko *koordenatuak* definituko ditugu eta oinarri desberdinekiko koordenatuak elkarren artean nola erlazionatzen diren ikasi.

1.1 Bektore-espazioak eta lehenengo adibideak

Ziur ohituta zaudetela bektoreak erabiltzen, planoan nahiz espazioan. Bektoreen ezaugarri nagusietako bat da elkarren artean batu eta zenbaki osoen bidez biderka daitezkeela. Oinarrizko propietate horietan oinarrituta, egitura aljebraiko bat definituko dugu: *espazio bektorialarena*.



1.1.1. Definizioa (Bektore-espazioak). Izan bedi K gorputza. Orduan, V multzoa *K-ren gaineko bektore-espazioa* (edo, laburkiago, *K-gaineko bektore-espazioa*) dela esaten dugu, honako baldintza hauek betetzen badira:

1. existitzen da $+\colon V \times V \to V$ eragiketa, *batura* deiturikoa, eta $(V,+)$ talde abeldarra da;

2. existitzen da $\cdot\colon K \times V \to V$ eragiketa, *eskalar bidezko biderketa* deiturikoa, eta honako propietate hauek betetzen ditu:

   i. $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$ elementu $\lambda \in K$ eta $v_1, v_2 \in V$ guztietarako;

   ii. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$ elementu $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ eta $v \in V$ guztietarako;

   iii. $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$ elementu $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ eta $v \in V$ guztietarako;

   iv. $1_K \cdot v = v$ elementu $v \in V$ guztietarako.

Notazioari begira, 1.1.1. Definizioaren arabera $(V, +)$ talde abeldarra da. Beraz, $+$ eragiketarekiko $0_V \in V$ elementu neutroa existitzen da. Normalean azpi-indize hori ezabatzen da, soilik $0 \in V$ idatziz.

1.1.2. Oharra. Oraintxe bertan esan dugun bezala, $(V, +)$ talde abeldarra da. Bereziki, V multzoa ezin da multzo hutsa izan (ikusi 0.3.1. Definizioa eta 0.3.2. oharra); hau da, bektore-espazioak inoiz ez dira hutsak. Bereziki, $e_V \in V$ betetzen da beti.

1.1.3. Adibidea. Aipatu berri dugu K gorputzaren gaineko V bektore-espazio bat emanda, $V \neq \varnothing$ dela; $(V, +)$ talde abeldarra izanik, $0 \in V$ baita. Hartu $V = \{0\}$ multzoa eta froga ezazu K-ren gaineko bektore-espazioa dela. Bektore-espazio horri *bektore-espazio tribiala* deituko diogu.

1.1.4. Adibidea. Dagoeneko 0.4 Atalean ikusi dugu $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ hirukotea gorputza dela. Gainera, 0.3.8. adibidean ikusi dugu, $n \in \mathbb{N}$ zenbaki arrunt positibo guztietarako, $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, +)$ talde abeldarra dela. Har dezagun orain 0.6.8. Definizioan aurkeztutako eragiketa $\cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Orduan, ziurta dezakezue $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ bektore-espazioa dela $\mathbb{R}$ gorputzaren gainean.

Terminologia. Terminologiaren eta notazioaren inguruko ohar batzuk:

i. Bektore-espazio baten elementuei *bektore* deitzen zaie, eta bektore-espazioari dagokion K gorputzekoei *eskalarrak*. Eskalarren eta bektoreen arteko $\cdot\colon K \times V \to V$ biderketari *eskalar bidezko biderketa* deitzen zaio.

ii. Eskuliburuaren lehenengo atalean honako notazio hau erabiltzen saiatuko gara: bektoreak adierazteko $u, v, w, \ldots$ letrak, eta eskalarretarako, berriz, hizki grekoak $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ erabiliko ditugu.

1.1.5. Oharra. Ohartu ikur batzuek esanahi bikoitza dutela. Adibidez, $+$ ikurra K-ren batuketa zein V-ren batuketa adierazteko erabiltzen da. Era berean, $\cdot$ ikurrak K-ren $\cdot\colon K \times K \to K$ biderketa nahiz $\cdot\colon K \times V \to V$ eskalar bidezko biderketa adierazten ditu.

Beste adibide bat 0 ikurrarena da: eskalarra nahiz bektorea izan daiteke. Printzipioz, honek guztiak anbiguotasun handia ekarriko duela pentsa genezake, baina ez da horrela, testuinguruak garbi utziko baitu zein den esanahia kasu bakoitzean.

Notazioa. Hemendik aurrera, idazkera arintzeko asmoz, bektore-espazioetan lan egiterakoan sarritan ez dugu $\cdot$ ikurra idatziko (gorputzeko biderketa nahiz eskalar bidezko biderketa adierazteko).

Bektore-espazioen hainbat adibide ikusi baino lehen, horiek betetzen dituzten oinarrizko propietate batzuk frogatuko ditugu.

1.1.6. Proposizioa. *Izan bedi K gorputza eta horren gaineko V bektore-espazioa. Edozein $u, v, w \in V$ bektoretarako eta edozein $\lambda, \mu \in K$ eskalarretarako, honako propietate hauek betetzen dira:*

1. *$u + w = v + w$ bada, orduan $u = v$;*
2. *$0_K \cdot v = 0_V$ eta $\lambda \cdot 0_V = 0_V$;*
3. *$(-\lambda)v = -(\lambda v)$;*

4. *$\lambda v = 0_V$, baldin eta soilik baldin $\lambda = 0_K$ edo $v = 0_V$;*
5. *$v \neq 0_V$ bada, $\lambda v = \mu v$, baldin eta soilik baldin $\lambda = \mu$;*
6. *$\lambda \neq 0_K$ bada, $\lambda v = \lambda w$, baldin eta soilik baldin $v = w$.*

Frogapena. Egin 1.5.1. ariketa. □

Datozen adibideetan K gorputza finkatuko dugu. Adibidez, $K = \mathbb{R}$ edo $K = \mathbb{C}$ dela pentsa dezakegu.

1.1.7. Adibidea. Har dezagun honako multzo hau:

$$K[x] := \Big\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid i \in \mathbb{N},\ a_i \in K\ \forall i = 0, \dots, n \Big\}.$$

Hau da, $K[x]$ multzoko elementuak x aldagaiarekiko polinomioak dira. Orduan, $K[x]$ multzoa K-gaineko bektore-espazioa da, non $+\colon K[x] \times K[x] \to K[x]$ eta $\cdot\colon K \times K[x] \to K[x]$ eragiketak honako era honetan definituta dauden:

$$\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) + \Big(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\Big) := \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) x^i, \qquad \forall\, n, m \in \mathbb{N},\ \forall\, a_i, b_i \in K \text{ eta } a_i = b_j = 0,\ i > n, j > m; \tag{1.1}$$

eta

$$k \cdot \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big) := \sum_{i=0}^{n} (k \cdot a_i) x^i, \qquad \forall\, k \in K. \tag{1.2}$$

Ohartu 1.1 eta 1.2 ekuazioetan ezkerraldean agertzen diren $+$ eta $\cdot$ eragiketak bektore-espazioarenak direla, eta eskuinaldean agertzen diren $+$ eta $\cdot$ eragiketak gorputzarenak direla. Orain 1.1.1. Definizioaren baldintzak betetzen direla frogatzea faltako litzaiguke (egin 1.5.2. ariketa).

1.1.8. Adibidea. Kasu honetan, 1.1.4. adibidea edozein K gorputzetarako orokortuko dugu. Har dezagun $K^n = K \times \overset{n}{\dots} \times K$ multzoa. Aurrera jarraitu aurretik, ohartu bi era desberdinetan idatz ditzakegula K^n-ren elementuak: zutabeka edo errenkadaka.

Notazioa. Ikusiko dugun bezala, K^n-ren elementuak zutabeka nahiz errenkadaka idazteak matematikoki ez du inolako eraginik. Baina aurreko aukeraketak eragin zuzena izango du kalkuluak egiterako garaian. Liburu honetan zutabekako notazioa erabiliko dugu.

Dena den, K^n multzoa K-gaineko bektore-espazioa da, batuketa eta eskalar bidezko biderketa «osagaiz osagai» definituta (hau da, (0.6). ekuazioko eragiketekiko):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \text{eta} \qquad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Berriro, irakurleoi dagokizue $(K^n, +, \cdot)$ hirukoteak 1.1.1. Definizioaren baldintzak betetzen dituela egiaztatzea.

Azken 1.1.8. adibidea orokorragoa da:

1.1.9. Adibidea. Har dezagun $\mathrm{M}_{n,m}(K)$ matrizeen multzoa, 0.6 Azpiatalean definituta. Orduan, (0.6). ekuazioan definituriko $\cdot\colon K \times \mathrm{M}_{n,m}(K) \to \mathrm{M}_{n,m}(K)$ eskalar bidezko biderketa eta (0.5). ekuazioan definituriko $+\colon \mathrm{M}_{n,m}(K) \times \mathrm{M}_{n,m}(K) \to \mathrm{M}_{n,m}(K)$ eragiketak hartuz, $\mathrm{M}_{n,m}(K)$ bektore-espazioa da K gorputzaren gainean (ikus dezakezue bektore-espazioa izateko bete behar diren baldintzak betetzen direla).

1.1.10. Adibidea. Izan bitez A hutsa ez den edozein multzo eta

$$V = \{f\colon A \to K \mid f \text{ aplikazioa}\}.$$

Alde batetik, $f, g \in V$ guztietarako, defini dezagun $f + g\colon A \to K$ eragiketa honako era honetan:

$$(f + g)(a) := f(a) + g(a), \qquad \forall a \in A.$$

Kontuan izan $f(a)$ eta $g(a)$ batu daitezkeela, balio horiek K gorputzean daudelako. Beste alde batetik, $\lambda \in K$ eta $f \in V$ izanik, $\lambda f\colon A \to K$ modu honetan definituko dugu:

$$(\lambda f)(a) := \lambda \cdot f(a), \qquad \forall a \in A.$$

Berriro, λ eta $f(a)$ biderka daitezke, biak K gorputzean daudelako. Beste behin ere, irakurleak froga dezala V bektore-espazioa dela K gorputzaren gainean.

Ohartu aurreko adibidean V multzoak bektore-espazio egitura duela, nahiz eta $f\colon A \to K$ funtzioen eremua, A, multzo soil bat izan. Antzeko eran, V multzo gisa $\mathbb{R}$-tik $\mathbb{R}$-rako funtzio jarraituena har genezakeen (ikusi 1.5.8. ariketa). Hala ere, hurrengo adibidean, $K = \mathbb{R}$ eta $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ kasua aurkeztuko dugu.

1.1.11. Adibidea. Izan bitez $a < b \in \mathbb{R}$ bi zenbaki erreal, eta har dezagun

$$V = \{f\colon [a, b] \to K \mid f \text{ aplikazio jarraitua}\}.$$

Orduan, V multzoak $\mathbb{R}$ gaineko bektore-espazioko egitura du, non $+$ eta $\cdot$ eragiketak 1.1.10. adibidean bezalakoak diren. Izan ere, $f, g \in V$ bi funtzio jarraitu eta $\lambda \in \mathbb{R}$ eskalarra emanda, honako era honetan definitutako $f + g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eta $\lambda \cdot f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funtzioak ere jarraituak dira:

$$\big(f + g\big)(z) := f(z) + g(z), \qquad \big(\lambda \cdot f\big)(z) := \lambda \cdot f(z), \quad \forall z \in [a, b]$$

eta ikus daiteke 1.1.1. Definizioko baldintzak betetzen dituztela.

1.2 Bektore-azpiespazioak

Atal honetan, bektore-espazio egitura «gordetzen» duten V bektore-espazio baten azpimultzoak aztertuko ditugu, adibide batzuk aurkeztuz. Gainera, bektore-espazioen arteko eragiketak definituko ditugu, ezagunak diren bektore-espazioen bidez berriak sortzeko tresnak izan ditzagun.

1.2.1. Definizioa. Izan bitez K-gaineko V bektore-espazioa eta $W \subseteq V$ azpimultzoa. Esango dugu W multzoa V-ren *bektore-azpiespazioa* dela, $W \leqslant V$ adierazita, W multzoa V-k dituen batuketa eta eskalar bidezko biderketarekiko K-gaineko bektore-espazioa bada.

Beste era batean esanda, $W \leqslant V$, baldin eta soilik baldin

$$+ \restriction_{W\times W}\colon W \times W \to V \quad \text{eta} \quad \cdot \restriction_{K\times W}\colon K \times W \to V$$

murrizketen irudiak W-ren barne badaude.

Terminologia. Sarritan, *bektore-azpiespazio* edo soilik *azpiespazio* erabiliko dugu kontzeptu berbera adierazteko.

1.2.2. Adibidea. Izan bitez K gorputza eta K-ren gaineko V bektore-espazioa. Bereziki, $(V,+)$ talde abeldarra izanik, horren elementu neutroa $0 \in V$ bertan dago (ikusi 1.1.3. adibidea). Hartu, beraz, $W = \{0\} \subset V$ multzoa, eta ziurta ezazu $W \leqslant V$ dela, honako berdintza hauek erabiliz

$$0 + 0 = 0 \in W \quad \text{eta} \quad \lambda \cdot 0 = 0 \in W, \quad \lambda \in K \quad \text{guztietarako.}$$

Kasu horretan, W azpiespazioa V-ren *azpiespazio tribiala* dela esango dugu, eta bektore bat soilik daukan azpiespazio bektorial bakarra da, aurrerago ikusiko dugun bezala.

1.2.3. Adibidea. Kontsidera ditzagun 1.1.7. adibidean ikusi dugun multzoa $K = \mathbb{R}$ gorputzerako

$$\mathbb{R}[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 0, \dots, n \right\}$$

eta 1.1.10. adibidean ikusi dugun funtzioen multzoa $K = A = \mathbb{R}$ multzoetarako

$$V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ aplikazioa}\}.$$

Lehen egiaztatu dugun bezala, $\mathbb{R}[x]$ eta V multzoak $\mathbb{R}$-gaineko bektore-espazioak dira. Gainera, $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ edozein polinomiok honako funtzio hau definitzen du:

$$\begin{array}{rccc} p\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ & a & \mapsto & p(a) \end{array} \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}$$

Beraz, $\mathbb{R}[x] \subseteq V$ dela uler dezakegu. Are gehiago, 1.1.7. adibidean eta 1.1.10. adibidean definitutako eragiketak identifika ditzakegu. Hortaz, $\mathbb{R}[x]$ polinomioek V-ren bektore-azpiespazioa osatzen dutela esan dezakegu, hau da, $\mathbb{R}[x] \leqslant V$.

Definizioa erabilita, badirudi K-ren gaineko V bektore-espazio bat emanda, horren W azpimultzo bat emanda, azpiespazio den edo ez erabakitzeko, 1.1.1. Definizioko propietate guztiak $+\restriction_{W\times W}$ eta $\cdot\restriction_{K\times W}$ eragiketentzat egiaztatu beharko ditugula. Hala ere, praktikan, azpimultzo bat azpiespazioa den ala ez erabakitzea oso erraza da, honako teorema honi esker.

1.2.4. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $W \subseteq V$ hutsa ez den azpimultzoa. Orduan, $W \leqslant V$, baldin eta soilik baldin honako bi baldintza hauek betetzen badira:*

i. *$w_1, w_2 \in W$ baditugu, $w_1 + w_2 \in W$ ere betetzen da;*

ii. *$w \in W$ eta $\lambda \in K$ baditugu, $\lambda w \in W$ betetzen da.*

Frogapena. Hasteko, demagun W multzoa V-ren azpiespazioa dela. Bereziki, $(W,+)$ taldea denez, $W \neq \varnothing$ da. Ohartu W-k elementu bakar bat badu, orduan $W = \{0\}$ azpiespazio tribiala dela, eta amaitu dugula (ikusi 1.1.3. adibidea). Demagun $w_1, w_2 \in W$ edozein bi bektore direla. Orduan, W azpiespazio bektoriala denez, $w_1 + w_2 \in W$ beteko da. Hau da, frogatu nahi dugun lehenengo propietatea zuzenean betetzen da. Era berean, eskalar bidezko biderketaren irudia W barne dagoela ondoriozta dezakegu; hau da, $\lambda \in K$ bada eta $w \in W$ bada, orduan $\lambda \cdot w \in W$ izango dugu.

Ikus dezagun, alderantziz, teorema honen bi baldintzak nahikoak direla W multzoa V-ren azpiespazioa izateko. Hori egiteko, 1.1.1. Definizioaren baldintzak betetzen direla egiaztatuko dugu.

Hasteko, ikus dezagun $(W,+)$ talde abeldarra dela. Hipotesiz, $+\restriction_{W\times W} \colon W \times W \to W$ defini dezakegu. Orduan, $+$ eragiketa elkarkorra eta trukakorra denez V-n, $W \subset V$ izanik, $+\restriction_{W\times W}$ ere elkarkorra eta trukakorra da W-n. Gainera, hipotesiz ere, W ez da multzo hutsa eta hortaz, $w \in W$ bada, 1.1.6. proposizioko **ii.** atala erabiliz,

$$0_K \cdot w = 0_V \in W \quad \text{eta} \quad (-1_K) \cdot w = -w \in W$$

berdintzak ditugu. Lehenengotik, W-k elementu neutroa duela lortzen da eta bigarrenetik berriz, W-ko elementu guztiek batuketarekiko alderantzizkoa dutela. Hortaz, $(W,+)$ talde abeldarra da.

Bestalde, hipotesiz, $\cdot\restriction_{K\times W}\colon K\times W\to W$ eskalar bidezko biderketa definitu dezakegu eta, $\lambda,\mu\in K$ eskalar guztietarako eta $w,w'\in W$ bektore guztietarako, honako propietateak betetzen dira:

$$\lambda\cdot(\underbrace{w+w'}_{\in W\subseteq V})=\lambda\cdot w+\lambda\cdot w';\qquad (\lambda+\mu)\cdot w=\lambda\cdot w_1+\mu\cdot w;$$
$$\lambda\cdot(\mu\cdot w)=(\lambda\cdot\mu)\cdot w;\qquad 1_K\cdot w=w,$$

Beraz, $W\leqslant V$ ondorioztatu dugu. □

Atal honen hasieran ikusi dugu, K-ren gaineko V bektore-espazio bat emanda, $W=\{0\}\leqslant V$ dela. Aurreko teoremaren frogapenaren barruan, ordea, propietate interesgarri hau topatu dugu.

1.2.5. Lema. *Izan bedi $W\leqslant V$ azpiespazioa. Orduan $0\in W$.*

Datorrena aurreko emaitzaren ondorio zuzena da.

1.2.6. Korolarioa. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $W\subseteq V$ bere azpimultzoa. Baldin eta $0\notin W$ bada, orduan W ez da V-ren bektore-azpiespazioa.*

1.2.7. Oharra. Azken teorema erabiliz, erraz froga daiteke $\{0\}\leqslant V$ azpiespazio tribiala benetan azpiespazio bektoriala dela. Lehenengo eta behin, $\lambda\in K$ eskalar guztietarako honako hau betetzen da:

$$\lambda\cdot(0+0)=\lambda\cdot 0=0=0+0=\lambda\cdot 0+\lambda\cdot 0,$$

hau da, 1.2.4. teoremaren **i.** baldintza betetzen da. Gainera, $\lambda\in K$ edozein eskalar bada, $\lambda\cdot 0=0\in\{0\}$ eta, horregatik, 1.2.4. teoremaren **ii.** baldintza ere betetzen da. Beraz, $\{0\}$ bektore-azpiespazioa da.

1.2.8. Oharra. Bereziki, $\{0\}\leqslant V$ edozein V bektore-espazioren azpiespazioa izaten da beti, eta hori da azpiespaziorik txikiena.

Ikus ditzagun azpiespazioen adibide pare bat.

1.2.9. Adibidea. Argi dagoen adibide batekin hasiko gara. Edozein K-ren gaineko V bektore-espaziotatik abiatuta, V bera V-ren bektore-azpiespazioa da; V-ren azpiespaziorik handiena, alegia.

1.2.10. Adibidea. Izan bitez $a,b\in\mathbb{R}$ eta

$$W:=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\mid ax+by=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

multzoa. Ikus dezagun $W\leqslant\mathbb{R}^2$ azpiespazioa dela.

Lehenengo eta behin, $a\cdot 0+b\cdot 0=0$ berdintza betetzen denez, $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\in W$ da, eta W multzo ez-hutsa da. Bektore nulua bakarrik egongo balitz W multzoan, $W\leqslant\mathbb{R}^2$ genuke; nahi bezala.

Demagun $w_1,w_2\in W$ bi bektore direla. Orduan, existitzen dira $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}$ non $w_1=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\end{smallmatrix}\right)$ eta $w_2=\left(\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\end{smallmatrix}\right)$ diren. Bereziki, $ax_1+by_1=0$ eta $ax_2+by_2=0$ berdintzak ditugu, eta, hortik,

$$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)=0$$

berdintza ondoriozta dezakegu. Horrek esan nahi du $w_1+w_2=\left(\begin{smallmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{smallmatrix}\right)\in W$ dela.

Era berean, $w=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\end{smallmatrix}\right)\in W$ bektorea eta $\lambda\in\mathbb{R}$ eskalarra badira, $ax_1+by_1=0$ izanik,

$$a(\lambda x_1)+b(\lambda y_1)=\lambda\big(ax_1+by_1\big)=\lambda\cdot 0=0$$

beteko da; hau da, $\lambda w\in W$ dugu. Hortaz, 1.2.4. teoremagatik $W\leqslant\mathbb{R}^2$ azpiespazioa dela egiaztatu dugu.

Hala ere, $\mathbb{R}^2$ planoko zuzen guztiak ez dira bektore-azpiespazioak. Adibidez, $x + y = 1$ zuzena ez da azpiespazioa: $\binom{1}{0}$ eta $\binom{0}{1}$ zuzenaren bi elementu izan arren, $\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = \binom{1}{1}$ ez dago multzo horretan. Bestalde ere argudia daiteke: 1.2.6. korolarioagatik $x+y = 1$ zuzena ezin da $\mathbb{R}^2$-ko bektore-azpiespazioa izan, $\binom{0}{0}$ elementuak ez duelako $x + y = 1$ ekuazioa betetzen.

Gure hurrengo helburua, ezagunak diren bektore-espazio edo -azpiespazioetatik abiatuta, bektore-espazio edo azpiespazio berriak sortzeko eragiketak definitzea izango da. Hasteko, ohartu $U, W \leqslant V$ azpiespazioak badira, horien diferentzia

$$U - W = \{u \in U \mid u \notin W\}$$

ezin dela berriro ere V-ren azpiespazioa izan. Zeren eta V-ren zero bektorea U eta W azpiespazioetan dagoenez, $0 \notin U - W$ genuke (ikusi 1.2.6. korolarioa). Badaude, ordea, multzoen arteko eragiketa gehiago: ebaketa, bilketa eta batuketa, esaterako.

1.2.11. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta U eta W bi azpiespazio. Orduan, $U \cap W$ ere V-ren azpiespazioa da.*

Frogapena. Erraz ikusten da. □

Hurrengo adibidearen bidez ikusiko dugu bektore-espazio baten bi azpiespazio bektorialen arteko bildura ez dela berriro azpiespazio bektorial bat izan behar.

1.2.12. Adibidea. Izan bitez

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \right\}$$

$\mathbb{R}^2$-ren azpiespazioak. Orduan,

$$U \cup W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \text{ edo } x - y = 0 \right\}$$

dugu. Orduan, $\binom{-1}{1}, \binom{1}{1} \in U \cup W$ betetzen deln arren, $\binom{-1}{1} + \binom{1}{1} = \binom{0}{2} \notin U \cup W$ da. Beraz, $U \cup W$ ez da $\mathbb{R}^2$-ren azpiespazioa.

Ikusi dugunez, $U \cup W$-ko bi bektoreen baturak ez du zertan $U \cup W$-n egon. Hala ere, ikus daiteke, $v \in U \cup W$ bektorea eta $\lambda \in K$ eskalarra hartuz gero, $\lambda \cdot v \in U \cup W$ betetzen dela.

1.2.13. Definizioa (Bi azpiespazioren batura). Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta U eta W bi azpiespazio. Orduan, U-ren eta W-ren *batura*, $U + W$ ikurraren bidez adierazten dena, U-ren eta W-ren bektoreen arteko batura guztien multzoa da:

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Hurrengo teoreman frogatuko dugun bezala, definitutako $U + W$ multzoa V-ren azpiespazioa da; gainera, $U \cup W$ barne duen azpiespaziorik txikiena da, eta, askotan, $U + W = \langle U \cup W \rangle$ bidez adierazten da.

1.2.14. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta U eta W bi azpiespazio. Orduan, $U + W$ multzoa V-ren azpiespazioa da; bereziki, $U \cup W$ barne duen azpiespaziorik txikiena da.*

Frogapena. Hau frogatzeko, 1.2.4. teorema erabiliko dugu. Lehenengo eta behin, $U + W$ multzoa ez da hutsa, U eta W ez-hutsak direlako. Alde batetik, $U + W$-ren definizioa kontuan hartuta, baldin eta $v_1, v_2 \in U + W$ baditugu, existitzen dira $u_1, u_2 \in U$ eta $w_1, w_2 \in W$ non

$$v_1 = u_1 + w_1, \qquad \text{eta} \qquad v_2 = u_2 + w_2$$

diren. Hortaz,

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) \underset{\substack{\uparrow \\ +\text{ trukakorra da}}}{=} u_1 + u_2 + w_2 + w_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elkartze-propietatea}}}{=} (\overbrace{u_1 + u_2}^{\in U}) + (\overbrace{w_2 + w_2}^{\in W}) \in U + W.$$

Beste alde batetik, $\lambda \in K$ eta $v \in U + W$ badira, existitzen dira $u \in U$ eta $w \in W$ bektoreak, non $v = u + w$ den, eta orduan

$$\lambda v = \lambda(u + w) = \lambda u + \lambda w \in U + W,$$

$\lambda u \in U$ eta $\lambda w \in W$ izateagatik (beste era batean esanda: U eta W bektore-azpiespazioak izateagatik).

Aurreko baldintzak egiaztatuta, $U + W \leqslant V$ azpiespazioa dela frogatu dugu.

Orain, U eta W barne dituen V-ren azpiespazio txikiena dela ikusiko dugu. Demagun existitzen dela $T \leqslant V$ beste azpiespazio bat U eta W azpiespazioak barnean dituena, eta froga dezagun $U+W \leqslant T$ betetzen dela. Horretarako, hartu $u + w \in U + W$ edozein bektore, $u \in U$ eta $w \in W$ izanik. Hipotesiz $U \leqslant T$ eta $W \leqslant T$ ditugu. Bereziki, $u, w \in T$ dira, eta, T bektore-azpiespazioa denez, $u + w \in T$ ondorioztatzen dugu. Beraz, $U + W \leqslant T$. □

1.2.15. Adibidea. 1.2.12. adibidean hartutako $\mathbb{R}^2$-ko azpiespazioak hartuko ditugu

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \right\}.$$

Badakigu $U + W$ azpiespazioa U nahiz W barruan dituen $\mathbb{R}^2$-ren azpiespazioa dela. Baina zein da, zehatz-mehatz?

Froga dezagun $U + W = \mathbb{R}^2$ betetzen dela. Horretarako, hartu $v = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ edozein bektore, eta ikus dezagun existitzen direla $u \in U$ eta $w \in W$ bektoreak, $v = u + w$ betetzen dutenak. Ohartu

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

dela, eta, era berean,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

dela. Ondorioz, $u \in U$ eta $w \in W$ elementuak $u = (a, -a)$ eta $w = (b, b)$ erakoak dira, a eta b balio erreal ezezagunak izanik. Orduan,

$$v = u + w \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = a + b, \\ y = -a + b \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = (x - y)/2, \\ b = (x + y)/2 \end{cases}$$

Beraz, $\mathbb{R}^2$-ko edozein bektore U-ko baten eta W-ko baten batura honela deskoposatzen da:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ -\frac{x-y}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix}$$

Horrenbestez, $U + W = \mathbb{R}^2$ dela frogatu dugu.

Ondoren, geure buruari galdetuko diogu $U + W$ baturaren bektoreek deskonposizio bakarra noiz duten eta noiz ez. Erantzuna hurrengo kontzeptuak emango digu.

1.2.16. Definizioa. Izan bitez V espazio bektoriala eta $U, W \leqslant V$. Orduan, U-ren eta W-ren batura *zuzena* dela esango dugu, $U \cap W = \{0\}$ bada. Hori azpimarratu nahi izanez gero, $U + W$ ikurraren ordez $U \oplus W$ idatziko dugu.

Batura zuzena ez da azpiespazioen arteko eragiketa berri bat. Aurreko definizioan U eta W bi azpiespazioren batura aztertzen dugu, eta, $U \cap W = \{0\}$ baldintza betez gero, batura horrek batura zuzena izena du. Baina batura hori lehenagoko batura bera da; hau da, $U \oplus W = U + W$ dugu. Notazioaren aldetik, $U \oplus W$ edo $U + W$ aukeratzea, eman nahi dugun enfasiaren araberakoa izango da: lehenengoarekin bigarrenarekin baino informazio gehiago ematen dugu. Hori bai, ez du zentzurik $U \oplus W$ idazteak $U \cap W \neq \{0\}$ bada.

1.2.17. Teorema. *Izan bitez V bektore-espazioa eta $U, W \leqslant V$ bi azpiespazio. Baliokideak dira:*

i. *$U + W$ batura zuzena da.*

ii. *$v \in U + W$ bektore bakoitzak deskonposizio bakarra du $u + w$ moduan, $u \in U$ eta $w \in W$ izanik.*

Frogapena. **i. $\Rightarrow$ ii.** Demagun existitzen dela bi deskonposizio desberdin onartzen dituen $U + W$-ko bektore bat, hau da, existitzen direla $u_1, u_2 \in U$ eta $w_1, w_2 \in W$ non $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ diren. Ikusi nahiko dugu, $U + W$ batura zuzena bada, $u_1 = u_2$ eta $w_1 = w_2$ betetzen dela. Izan ere,

$$u_1 + w_1 = u_2 + w_2 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{u_1 - u_2}_{\in U} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

dugu; hau da, $u_1 - u_2$ eta $w_2 - w_1$ elementuak $U \cap W$ ebakiduran daude. Baina, $U + W$ batura zuzena denez, badakigu $U \cap W = \{0\}$ dela, eta, ondorioz,

$$u_1 - u_2 = 0 = w_2 - w_1;$$

hau da, $u_1 = u_2$ eta $w_1 = w_2$ ondorioztatu dugu, nahi genuen bezala.
ii. $\Rightarrow$ i. $U + W$-ko bektoreen deskonposizioa bakarra dela suposaturik, $U \cap W = \{0\}$ ondorioztatu behar dugu. Hori frogatzeko, bi partekotasunak ikusiko ditugu. Alde batetik, garbi dago $\{0\} \subseteq U \cap W$ betetzen dela, 0 elementua azpiespazio guztietan dago eta.

Beste alde batetik, izan bedi $v \in U \cap W$ edozein elementu eta ikus dezagun $v = 0$ dela. Horretarako, deskonposatu 0 bektorea honako bi era hauetara:

$$\underbrace{0}_{\in U} + \underbrace{0}_{\in W} = 0 = \underbrace{v}_{\in U} + (\underbrace{-v}_{\in W}).$$

Orain, aplikatu hipotesia, hots, **ii.** baldintza, eta hortik ondorioztatzen da $0 = v$ eta $0 = -v$ dela, hau da, $U \cap W$-ren elementu bakarra 0 dela. Beraz, $U + W$ batura zuzena da. □

1.2.18. Definizioa. Izan bitez V bektore-espazioa eta $W \leqslant V$. Esango dugu $U \leqslant V$ azpiespazioa W-ren *osagarria* dela V barruan, baldin eta $V = U \oplus W$ bada. Bestela esanda, U azpiespazioa W-ren osagarria da, baldin eta $U + W = V$ eta $U \cap W = \{0\}$ baldintzak betetzen badira.

Esaterako, 1.2.12. adibideko azpiespazioak $x + y = 0$ eta $x - y = 0$ osagarriak dira $\mathbb{R}^2$-ren barruan. Orokorkiago, edozein bi zuzen bektorial desberdin osagarriak dira $\mathbb{R}^2$-ren barruan. Beraz, W azpiespazio batek osagarri bat baino gehiago izan ditzake.

Orain arte, gorputz baten gaineko bektore-espazio desberdinen adibide batzuk ikusi ditugu, eta horiekin hainbat eragiketa egiten ikasi, nolabait, bektore-(azpi)espazio berriak lortzeko. Orain, demagun V bektore-espazioan $S \subseteq V$ azpimultzo ez-hutsa dela, V-ren azpiespazioa izan gabe. Hurrengo helburua, S azpimultzotik abiatuta, bera barnean duen V-ren azpiespazio bat lortzea izango da. Noski, batek pentsa dezake V bera hartzea soluzio bat dela (noski, egia da). Baina gure nahia S barnean duen V-ren azpiespaziorik txikiena eraikitzea izango da. Horretarako, beste definizio bat beharko dugu.

1.2.19. Definizioa. Izan bedi K-ren gaineko V bektore-espazioa. Orduan, $v_1, \ldots, v_n \in V$ bektoreen *konbinazio lineal* bat

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

moduko bektorea da, $\lambda_i \in K$ izanik $i = 1, \ldots, n$ indize guztietarako. Kasu horretan, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ balioei konbinazio linealaren *koefizienteak* deritze.

1.2.20. Adibidea. Ohartu 0 bektorea edozein bektore multzoren konbinazio lineala dela: nahikoa da indize guztietarako $\lambda_i = 0$ hartzea.

Har ditzagun orain, $\mathbb{R}^2$ bektore-espazioan,

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bektoreak. Zein bektore lortzen dira bektore horien konbinazio linealak eginez? Horretarako, hartu $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ edozein eta kalkulatu:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Ohartu 1.2.19. Definizioan bektore kopuru finitu baten konbinazio linealak definitu ditugula. Multzo baten konbinazio lineal guztiak zeintzuk diren honako teorema honetan zehazten da.

1.2.21. Teorema. *Izan bitez V bektore-espazioa eta $S \subseteq V$ multzo ez-hutsa. Orduan, S-ko bektoreekin egindako konbinazio lineal guztien multzoa, hau da*

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in K,\ v_i \in S,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}, \tag{1.3}$$

V-ko S multzoa barruan duen azpiespaziorik txikiena da.

Frogapena. Alde batetik, kontsideratutako multzoa ez da hutsa, S barruan duelako eta S multzoa hutsa ez delako. Garbi dago bi konbinazio lineal batzean, edo konbinazio lineal eskalar batez biderkatzean, beste konbinazio lineal bat lortzen dela. Beraz, 1.2.4. teoremak baieztatzen digu (1.3). ekuazioko multzoa V-ren azpiespazioa dela.

Beste alde batetik, $W \leqslant V$ bada, $S \subseteq W$ izanik, berriro 1.2.4. teoremari esker badakigu S-ko bektoreekin egindako edozein konbinazio lineal W barruan dagoela; hau da, (1.3). ekuazioko V-ren bektore-azpiespazioa W barne dago. □

1.2.22. Adibidea. Aurreko 1.2.20. adibidearekin jarraituz, e_1 eta e_2 bektoreen konbinazio lineal guztien multzoa hartuz gero,

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

$\mathbb{R}^2$ bektore-espazio osoa lortzen da.

1.2.23. Definizioa (Multzo batek sortutako azpiespazio). Izan bitez V bektore-espazioa eta $S \subseteq V$ azpimultzoa. Esango dugu $\langle S \rangle$ azpiespazioa S multzoak *sortutako azpiespazioa* dela.

Konbentzioagatik, $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$ da eta $S \subseteq \langle S \rangle$ betetzen da beti. Izan ere, $s \in$ bada, orduan $s = 1 \cdot s \in \langle S \rangle$ baita. Ohartu S jada V-ren azpiespazioa bada, $\langle S \rangle = S$ dugula. Normalean, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bada, $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ idatziko dugu, $\langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$ ordez. Horrez gain, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ idaztean, bektoreen ordenak ez dauka garrantzirik,

$$\langle S \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle = \langle v_2, \ldots, v_n, v_1 \rangle = \ldots = \langle v_n, v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle,$$

multzo bera idazten ari garelako.

1.2.24. Adibidea. Har dezagun 1.1.7. adibidean ikusitako bektore-espazioa, hau da, $K[x]$ polinomioen multzoa. Kasu honetan,

$$\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$$

multzoa infinitua da, eta multzo horretako bektoreen konbinazio lineal guztien multzoa $K[x]$ baino ez da. Kontuz, definizioz,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

ez da $K[x]$-ren elementua eta ez da $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$-ko bektoreen konbinazio lineala.

1.2.25. Adibidea. Dagoeneko 1.2.20. adibidean aipatu dugu $e_1 = \binom{1}{0}$ eta $e_2 = \binom{0}{1}$ bektoreek $\mathbb{R}^2$ espazio osoa sortzen dutela. Notazio berriarekin, beraz, $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$.

Orokorrago, izan bitez K edozein gorputz eta $n \in \mathbb{N}_{>0}$ edozein zenbaki arrunt positibo. Definitu K^n bektore-espazioko $e_1, \ldots, e_n$ bektoreak honako modu honetan: $i \in \{a, \ldots, n\}$ guztietarako, e_i bektorearen osagai guztiak 0 dira, i-garren osagaia izan ezik, zeina 1 baita. Hau da,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n, \qquad \ldots \qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n. \tag{1.4}$$

Orduan, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ izanik, $e_1, \ldots, e_n$ bektoreen konbinazio lineala honako era honetakoa da:

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ondorioz, $K^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

1.2.26. Adibidea. Har ditzagun $\mathbb{R}^3$-ko

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bektoreak, eta ikusi horiek sortutako $\mathbb{R}^3$-ko azpiespazioa $y = 0$ planoa dela. Izan ere,

$$\langle v, w \rangle = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

dugu. Beraz, $\langle v, w\rangle$ azpiespazioa $y = 0$ planoaren barruan dago. Bestetik, har dezagun $y = 0$ planoko $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right)$ puntu orokor bat, eta ikus dezagun $\left(\begin{smallmatrix} \lambda+\mu \\ 0 \\ \mu \end{smallmatrix}\right)$ moduan idatz daitekeela. Horretarako, ekuazio bat askatu behar dugu, x eta z balio ezagunak izanik, eta λ eta μ, berriz, ezezagunak:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda + \mu, \\ z = \mu, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = x - z, \\ \mu = z. \end{cases}$$

Soluzioa dagoenez, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \langle v, w\rangle$ dugu, eta $\langle v, w\rangle$ eta $y = 0$ planoa bat datozela frogaturik gelditzen da.

Hurrengo galdera naturala honakoa hau da: izan al daiteke V bektore-espazio batean, $S \neq T$ azpimultzo desberdinak emanda, $\langle S\rangle = \langle T\rangle$? Espero bezala, erantzuna baiezkoa izango da.

1.2.27. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $S, T \subseteq V$ bi multzo. Baliokideak dira:*

i. $\langle S\rangle \subseteq \langle T\rangle$.

ii. *S-ko bektore guztiak T-koen konbinazio linealak dira.*

Frogapena. **i. $\Rightarrow$ ii.** Izan bedi $s \in S$ eta idatzi $s = 1_K \cdot s \in \langle S\rangle \subseteq \langle T\rangle$. Hortaz, s bada T-ko bektoreen konbinazio lineala.

ii. $\Rightarrow$ i. Har dezagun $v \in \langle S\rangle$ edozein eta ikus dezagun $v \in \langle T\rangle$ betetzen dela. Hasteko, idatzi

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_v, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \quad \text{eta } v_1, \ldots, v_n \in S \quad \text{izanik,} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{batentzat.}$$

Hipotesiz, $i \in \{1, \ldots, n\}$ guztietarako $v_i \in S$ denez, existitzen dira $\mu_{i1}, \ldots, \mu_{ik_i} \in K$ eta $w_{i1}, \ldots, w_{ik_i} \in \langle T\rangle$ non

$$v_i = \mu_{i1} w_{i1} + \ldots, \mu_{ik_i} w_{ik_i}$$

den. Hortaz, $v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{k_i} \mu_{ij} w_{ij} \in \langle T\rangle$ da; nahi bezala.

□

1.2.28. Definizioa. Izan bedi K-ren gaineko V bektore-espazioa.

i. $S \subseteq V$ azpimultzoa V-ren *sistema sortzailea* dela esaten da, baldin eta $V = \langle S\rangle$ bada.

ii. Existitzen bada $S \subseteq V$ azpimultzo finitua non $V = \langle S\rangle$ den, V bektore-espazioa *finituki sortua* dela esaten da.

Dagoeneko aipatu dugu, $S \subseteq V$ azpimultzoa azpiespazioa bada, orduan $S = \langle S\rangle$ dela, eta, hortaz, edozein V bektore-espazio emanda, V multzoa bada V-ren sistema sortzailea. Hala ere, gure nahia ahalik eta sistema sortzailerik txikiena aurkitzea izango da (hurrengo atalaren hasieran azalduko dugu zergatik).

Aurreko 1.2.25. adibidean ikusi dugu, $\mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2\rangle$ betetzen dela. Baina $\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ bektore multzoak $\mathbb{R}^2$ bektore-espazioa sortzen du. Izan ere, badakigu $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle \leqslant \mathbb{R}^2 = \langle e_1, e_2\rangle$ dela, eta beste partekotasuna frogatu nahi dugu. Orduan, 1.2.27. teoremagatik, nahikoa da e_1, e_2 bektoreak $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle$-n daudela ikustea, $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\rangle = \mathbb{R}^2$ lortzeko. Ziurta ezazue honako berdintza hauek betetzen direla

$$e_1 = 0 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{eta} \quad e_2 = 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Bereziki, aurrekoak frogatzen du $\mathbb{R}^2$ bektore-espazioa finituki sortua dela. Orokorkiago, K^n bektore-espazioa finituki sortua da, (1.4). ekuazioan definitutako $\{e_1, \ldots, e_n\}$ multzoa sistema sortzaile finitua da eta.

1.3 Oinarria eta dimentsioa

Aurreko atalaren amaieran ikusi dugu $\{e_1, e_2\}$ bektore multzoa $\mathbb{R}^2$ bektore-espazioaren sistema sortzailea dela. Har dezagun orain

$$S = \{\binom{1}{1}, \binom{1}{0}, \binom{1}{0}\}$$

multzoa. Berehalakoa da ohartzea $\langle S \rangle = \mathbb{R}^2$ betetzen dela (ikusi 1.2.27. teorema). Bereziki, $\mathbb{R}^2$-ko edozein bektore emanda, S-ko bekoreen konbinazio lineal gisa idatz dezakegu. Adibidez, hartu $\binom{2}{1} \in \mathbb{R}^2$ bektorea, eta ohartu

$$\binom{2}{1} = 1 \cdot \binom{1}{1} + 1 \cdot \binom{1}{0}, \quad \binom{2}{1} = 2 \cdot \binom{1}{1} - 1 \cdot \binom{0}{1}, \quad \binom{2}{1} = 3 \cdot \binom{1}{1} - 2 \cdot \binom{0}{1} - 1 \cdot \binom{1}{0} \quad \text{etab.}$$

bektore hori idazteko hainbat konbinazio lineal egin daitezkeela. Aldiz, $\binom{2}{1}$ bektorea $\{e_1, e_2\}$ bektoreen konbinazio lineal gisa idazteko, modu bakar bat dago. Gure helburua, beraz, bektore-espazioen sistema sortzaileak aurkitzea izango da, espazio horretako bektoreen deskonposizioa bakarra izanik, eta, horretarako, nozio berriak ikasi beharko ditugu.

1.3.1. Definizioa. Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $S \subseteq V$ azpimultzoa.

i. Baldin eta S-ko bektoreen konbinazio lineal bat 0 izan badaiteke koefiziente guztiak 0 izan gabe, orduan S *linealki dependentea* edo *lotua* dela esaten da.

ii. Bestela, S *linealki independentea* edo *askea* dela esaten da.

Beraz, S multzoa linealki independentea dela ikusteko, honako inplikazio hau frogatu beharko dugu:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0, \quad v_i \in S,\ \lambda_i \in K \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Adibide batzuk emateko, finka dezagun K gorputzaren gaineko V bektore-espazioa. Hartu $\{0\}$ multzoa eta ohartu linealki dependentea dela. Izan ere, $\lambda \cdot 0 = 0$ da edozein $0 \neq \lambda \in K$ balioetarako. Arrazoi beragatik, zero bektorea barnean duen bektore multzo bat beti linealki dependentea da. Aldiz, $v \in V$ bektore ez-nulua bada, orduan $\{v\}$ linealki independentea da.

Ikus dezagun orain $\{e_1, \ldots, e_n\}$ linealki independentea dela:

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Azkenik, azter dezagun $\mathbb{R}^2$ bektore-espazioan adibide konkretu bat. Hartu $\{\binom{1}{1}, \binom{1}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ multzoa, eta ikus dezagun linealki independentea dela. Baldin eta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ edozein bi eskalar badira,

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda + 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = 0, \\ \lambda + 2\mu = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 0, \\ \mu = 0. \end{cases}$$

Beraz, $\{\binom{1}{1}, \binom{1}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ multzoa linealki independentea da.

1.3.2. Lema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $S \subseteq V$ multzoa. Baliokideak dira:*

i. *S linealki dependentea da.*

ii. *Existitzen da $v \in S$ non $v \in \langle S \setminus \{v\} \rangle$ den.*

Frogapena. Hasteko, demagun S linealki dependentea dela. Hau da, existitzen dira $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ eskalarrak, guztiak aldi berean zero izan gabe, eta $v_1, \ldots, v_n \in S$ bektoreak non $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ den. Beraz, hartu $i \in \{1, \ldots, n\}$ non $\lambda_i \neq 0$ den. Orain, K gorputza eta $\lambda_i \neq 0$ izateagatik, biderketarekiko alderantzizkoa $\lambda_i^{-1} \in K$ existitzen da. Orduan,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_i v_i = -(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\
&\Leftrightarrow \quad v_i = -\lambda_i^{-1}(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n) \\
&\Leftrightarrow \quad v_i = -(\lambda_i^{-1}\lambda_1) v_1 - \ldots - (\lambda_i^{-1}\lambda_{i-1}) v_{i-1} - (\lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}) v_{i+1} - \ldots - (\lambda_i^{-1}\lambda_n) v_n \\
&\Leftrightarrow \quad v_i \in \langle S \backslash \{v_i\} \rangle,
\end{aligned}$$

eta **ii.** atala betetzen dela ondorioztatu dugu.

Orain, Lemako **ii.** atala betetzen bada, existitzen dira $v_1, \ldots, v_n \in S \backslash \{v\}$ bektoreak eta $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ eskalarrak non

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

den. Orduan,

$$(-1)v + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0$$

betetzen da koefiziente guztiak zero izan gabe, eta, beraz, S linealki dependentea da. □

Lema horretan oinarrituz, garbi dago bi bektore noiz diren linealki dependenteak.

1.3.3. Korolarioa. *Izan bedi K-ren gaineko V bektore-espazioa. Bi bektore linealki dependenteak dira, baldin eta soilik baldin proportzionalak badira (hau da, bektoreetako bat bestearen multiploa bada).*

Ondorioz, 1.3.2. lemak, multzo linealki independente batetik abiatuta hori (hertsiki) barnean duen multzo linealki independete handiagoak sortzeko prozedura ematen digu.

1.3.4. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $S \subseteq V$ multzo linealki independentea. Demagun $v \in V$ bektorea ez dela S-ko bektoreen konbinazio lineala. Orduan, $S \cup \{v\}$ ere linealki independentea da.*

Aurrerago emaitza hau erabiliko dugu (ikusi 1.3.11. teorema). Antzeko moduan honako emaitza hau froga dezakegu.

1.3.5. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $S \subseteq V$ sistema sortzailea. Demagun $v \in S$ bektorea $S \backslash \{v\}$-ko multzoko bektoreen konbinazio lineala dela. Orduan, $S \backslash \{v\}$ ere V-ren sistema sortzailea da.*

Frogapena. Hipotesiz, existitzen dira $w_1, \ldots, w_m \in S \backslash \{v\}$ bektoreak eta $\mu_1, \ldots, \mu_m \in K$ eskalarrak, non

$$v = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m \tag{1.5}$$

den. Izan bedi $u \in V$ bektore orokor bat, eta ikus dezagun $S \backslash \{v\}$-ko bektoreen konbinazio lineal gisa jar daitekeela. Hasteko, S sistema sortzailea denez,

$$u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \tag{1.6}$$

idatz dezakegu, $\lambda_i \in K$ eta $v_i \in S$ izanik. Orain, bi aukera ditugu: alde batetik, v_i bektoreetako bat ere ez bada v bektorea, ez dugu ezer egin behar.

Beste alde batetik, existitzen bada $i \in \{1, \ldots, n\}$ non $v_i = v$ den, (1.6). ekuazioan (1.5). ekuazioko berdintza erabiliko dugu:

$$\begin{aligned}
u &= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_i(\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_m w_m) + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n \\
&= \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + (\lambda_i \mu_1) w_1 + \ldots + (\lambda_i \mu_m) w_m + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n.
\end{aligned}$$

Beraz, $u \in \langle S \backslash \{v\} \rangle$, hau da, $S \backslash \{v\}$ multzoa ere V-ren sistema sortzailea da. □

1.3.6. Definizioa. Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $\beta \subseteq V$ multzoa. Esango dugu β multzoa V bektore-espazioaren *oinarria* dela, baldin eta β multzoa aldi berean linealki independentea eta V-ren sistema sortzailea bada.

Definizioz, $\{0\}$ bektore-espazio nulu edo tribialaren oinarria multzo hutsa da.

1.3.7. Adibidea. 1.2.25. adibideko (1.4). ekuazioan definitutako $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq K^n$ multzoa K^n-ko oinarria da. Oinarri horrek K^n-ren *oinarri kanonikoa* izena du. Multzo hori κ[1] edo κ_n hizkien bidez adieraziko dugu.

Hala ere, bektore-espazio batek sistema sortzaile bat baino gehiago izan ditzakeen bezala, oinarri bat baino gehiago ere izan ditzake. Aurreko ataleko adibide batean ikusi dugu $\beta = \{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\}$ multzoa $\mathbb{R}^2$-ren sistema sortzailea dela. Ez da zaila ikustea multzo hori linealki independentea dela, eta, beraz, $\mathbb{R}^2$-ren oinarria. Beraz, $\mathbb{R}^2$-rentzat gutxienez bi oinarri ezagutzen ditugu jada: κ_2 eta β, alegia.

1.3.8. Lema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazio finituki sortua eta $S \subseteq V$ bektore-espazioaren sistema sortzailea. Orduan, existitzen da $\tilde{S} \subseteq V$ bektore-espazioaren sistema sortzaile finitua, $\tilde{S} \subseteq S$ izanik.*

Frogapena. Hasteko, S multzoa finitua bada ez dago ezer frogatzeko, $\tilde{S} = S$ aukera dezakegulako.

Pentsa dezagun orain S multzoa infinitua dela. Bektore-espazioa finituki sortua da, eta, horregatik, existitzen da $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ sistema sortzaile finitua. Orduan, $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, existitzen dira $s_{i,1}, \ldots, s_{i,r_i} \in S$ bektoreak eta $\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,r_i} \in K$ eskalarrak, non $v_i = \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_{i,j} s_{i,j}$ den. Beraz, hartu

$$\tilde{S} := \{s_{i,j} \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, r_i\}$$

multzoa finitua, eta frogatu nahi ditugun baldintzak beteko ditu. □

Oro har, finituki sortuak diren bektore-espazioen oinarriak existitzen dira. Segidan datorren emaitza 1.3.5. teoremaren korolarioa baino ez den arren, teorema izena du, bere garrantzia azpimarratzeko.

1.3.9. Teorema. *Finituki sortutako bektore-espazioen oinarriak beti existitzen dira. Are gehiago, S multzoa bektore-espazioaren sistema sortzailea bada, orduan existitzen da bektore-espazioaren β oinarria, non $\beta \subseteq S$ den.*

Frogapena. Hipotesiz, existitzen da $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ multzo finitua, non $V = \langle S \rangle$ den. Baldin eta S multzoa linealki independentea bada, S oinarria da. Beste kasuan, existitzen dira denak zero ez diren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ eskalarrak, non

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

den. Demagun $i \in \{1, \ldots, n\}$ batentzat $\lambda_i \neq 0$ betetzen dela. Beraz, $v_i \in \langle S \backslash \{v_i\} \rangle$, eta 1.3.5. teoremak $S \backslash \{v_i\}$ multzoa ere V-ren sistema sortzailea dela ziurtzatzen digu. Ohartu

$$0 \leqslant n - 1 = |S \backslash \{v_i\}| < |S| = n \in \mathbb{N}$$

dela. Orain, argudio bera errepika dezakegu $S_1 = S \backslash \{v_i\}$ sistema sortzailearekin, eta pauso kopuru finitu batean, aldi berean linealki independentea eta sistema sortzailea den multzo batera ailegatuko gara, hau da, oinarri batera. Beraz, oinarriak existitzen dira. □

1.3.10. Oharra. Emaitza orokorragoa egia da: edozein bektore-espaziotan oinarriak existitzen da. Ez dugu hori frogatuko, *Zorn-en lema* erabili beharko baikenuke. Aipatzekoa, dimentsio infinituko bektore-espazioen oinarriek *Hamel-en oinarri* izena dutela.

[1] kappa hizki grekoa, alegia.

Datozen ataletan, oinarri *finitu*ak izatea erabilgarria dela ikusiko dugu. Bektore-espazioak ez badira finituki sortuak (bereziki oinarrien kardinalitatea zenbakigarria *ez* denean), oinarrien kontzeptua ez da hain mesedegarria; besteak beste, ezin dugulako matrize infinituekin erraz lan egin. Horregatik, finituki sortuak ez diren bektore-espazioen beste «multzo sortzaile»nozio batzuk definitu ohi dira.

Hemendik aurrera, enuntziatu gehienetan kontsideratuko ditugun bektore-espazioak dimentsio finitukoak izango dira. Emaitza asko edozein dimentsiotako bektore-espazioetara orokortu daitezke, ikusiko ditugun frogak baino demostrazio zailagoak erabiliz. Baina, esan bezala, liburu hau aljebra linealerako lehen sarrera izanik, gure arreta dimentsio finituko bektore-espazioetan ipintzea erabaki dugu.

Orain arte, finituki sortua den bektore-espazio baten sistema sortzaile bat izanda, horren barruan dagoen tamaina finituko sistema sortzaile bat lortzeko prozedura ikasi dugu. Kontrako bidea ere har dezakegu. Hau da, demagun V bektore-espazioan $T \subseteq V$ multzoa linealki independentea dela. Lor al dezakegu V-ren β oinarria, non $T \subseteq \beta$ den?

1.3.11. Teorema. *Izan bedi K-ren gaineko V bektore-espazio finituki sortua. Baldin eta $T \subseteq V$ multzoa linealki independentea bada, orduan $\beta \subseteq V$ oinarria existitzen da, non $T \subseteq \beta$ betetzen den.*

Frogapena. Orokortasuna galdu gabe, demagun $\langle T \rangle \lneq V$ dela; bestela, T dagoeneko oinarria da. Finka dezagun tamaina finituko $S \subseteq V$ sistema sortzailea. Orduan, existitzen da $v \in S$ bektorea, $v \notin \langle T \rangle$ dena (bestalde, $V = \langle S \rangle \leqslant \langle T \rangle$ izango genuke, kontraesana). Beraz, $T \cup \{v\}$ ere linealki indenpendentea izango da, 1.3.4. teoreman ikusi den bezala.

Orain, $T \cup \{v\}$ sistema sortzailea bada, V espazioaren oinarria ere bada, eta amaitu dugu. Ez bada horrela, existituko da $w \in S$ beste bektore bat, non $w \notin \langle T \cup \{v\} \rangle \lneq V$ eta, beraz, 1.3.4. teoremagatik, $T \cup \{v\} \cup \{w\}$ sistema askea izango da. Prozedura horrekin jarraituko dugu, S-tik behar adina bektore hartuz, V-ren oinarri bat eraiki arte. Ohartu prozedura horretan dagoen pauso kopurua finitua dela, S-ren tamaina horrelakoa delako. □

1.3.11. teoreman, linealki independentea den $T \subseteq V$ multzo batetik abiatuta V-ren β oinarri bat lortzeko prozedura eman dugu, $T \subseteq \beta$ izanik. Kasu horretan, T multzoa V-ren oinarri batera *luzatu* dugula esango dugu. Erakutsi dezagun, bada, zertarako balio duten oinarriek bektore-espazioetan.

1.3.12. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazio finituki sortua eta $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ bere oinarria. Orduan, $v \in V$ bektore bakoitzeko, existitzen dira $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ eskalar bakarrak, non*

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \tag{1.7}$$

den. Ondorioz, $V = \langle v_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle v_n \rangle$ dugu.

Frogapena. Alde batetik, β multzoa V-ren sistema sortzailea izateagatik, garbi dago V-ren v edozein bektorek (1.7). ekuazioko deskonposizio bat onartzen duela. Ikus dezagun deskonposizio hori bakarra dela. Horretarako, bi deskonposizio harturik, koefizienteak bat datozela frogatuko dugu. Izan ere,

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \quad &\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \lambda_1 - \mu_1 = \ldots = \lambda_n - \mu_n = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n, \end{aligned}$$

nahi bezala.

Azkenik, β multzo askea denez, $i \neq j$ guztietarako, $\langle v_i \rangle \cap \langle v_j \rangle = \{0\}$ da. Hortaz, $V = \langle v_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle v_n \rangle$ dugu. □

1.3.13. Definizioa. Izan bedi K-ren gaineko V bektore-espazio finituki sortua, eta demagun $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ horren oinarria dela. Orduan, (1.7). ekuazioko deskonposizioan agertzen diren λ_i eskalarrei v bektorearen β *oinarriarekiko koordenatu* deritze.

Gainera, $v \in V$ bektorearen β oinarriarekiko koordenatuak honako funtzio honen bidezko irudi gisa lor daitezke:

$$\begin{array}{rccl} [-]_\beta\colon & V & \longrightarrow & K^n, \\ & v & \longmapsto & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{non } v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \text{ den.} \tag{1.8}$$

1.3.14. Oharra. Irakurle adeitsuek 1.3.13. Definizioan zer edo zer arraroa gertatu dela sumatu dute. Izan ere, multzo bat zerrendatzean, ez dugu horien elementuen ordena kontuan hartzen edo finkatzen: $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{v_3, v_4, \ldots, v_2\}$ (ikusi 0.1 Atala). Beraz, 1.3.13. Definizioan, $[v]_\beta \in K^n$ bektoreak idazteko garaian inplizituki oinarriko bektoreen ordena aurrez finkatuta dago. Hori liburuan zehar egingo dugu: $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ idaztean, bektoreen ordena finkatuko dugu, $[v]_\beta \in K^n$ bektoreak eta (1.4.1. Definizioan definituko ditugun) M_γ^β matrizeak ondo definituta egon daitezen.

Adibideak ikusi baino lehen, ohartu (1.8). ekuazioan agertzen den $[-]_\beta\colon V \to K^n$ funtzioa ondo definituta dagoela. Hasteko, ikusi beharko genuke $v \in V$ bektore bakoitzak $[-]_\beta$ bidezko irudi bakar bat duela gehienez. Demagun existitzen direla $\mu_1, \ldots, \mu_n \in K$ eskalarrak, non

$$v = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n, \qquad \text{eta} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

diren. Orduan,

$$0 = v - v = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)v_n, \qquad \lambda_i - \mu_i \in K \quad \text{ez guztiak } 0$$

lortuko genuke, eta, beraz, β multzo linealki dependentea litzateke; kontraesana. Gainera, β sistema sortzailea izateagatik, V-ko edozein bektore hartuta, $[-]_\beta$ bidezko irudia onartzen du, $[v]_\beta$ idatziko duguna.

Ohartu 1.3.13. Definizioan β oinarria finitua dela suposatu dugula. Esan bezala, multzo finituekin lan egiteak garrantzi handia izango du, eta, bereziki, koordenatuak testuinguru horretan soilik definitu ditzazkegu.

1.3.15. Galdera. Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta β, γ bektore-espazio horren bi oinarri. Egia da $|\beta| = |\gamma|$ beteko dela? Hau da, β eta γ oinarriek bektore kopuru bera onartzen dutela?

Aurreko 1.3.15. Galdera honako era honetan adierazi daiteke: K-ren gaineko V bektore-espazioaren β eta γ oinarriak emanda, 1.3.13. Definizioko $[-]_\beta\colon V \to K^{|\beta|}$ eta $[-]_\gamma\colon V \to K^{|\gamma|}$ funtzioek koeremu bera al dute?

Hurrengo helburua galdera hori erantzutea da, baina, orain, adibide batzuk ikusiz jarraituko dugu.

1.3.16. Adibidea. Har ditzagun K^n bektore-espazioa eta bere $\kappa = \{e_1, \ldots, e_n\}$ oinarri kanonikoa. Har dezagun $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ edozein bektore. Ez da zaila ikustea $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ betetzen dela, hau da, $[v]_\kappa = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dela. Ondorioz, K^n-ko bektore baten oinarri kanonikoarekiko koordenatuak horren osagaiak dira.

Azken propietate berezi hori ez da orokorrean betetzen. Adibidez, hartu $\beta = \{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ oinarria (1.5.5. ariketan frogatu dugu) eta $w = \binom{3}{4} \in \mathbb{R}^2$ bektorea. Orduan, w bektorearen β-rekiko

koordenatuak lortzeko, $\binom{3}{4} = \lambda\binom{1}{0} + \mu\binom{1}{1}$ berdintza ekuazio bezala ikusi behar dugu, eta λ eta μ ezezagunen balioak aurkitu:

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\ \mu\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda+\mu=3,\\ \mu=4,\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda=-1,\\ \mu=4.\end{cases}$$

Beraz, $[w]_\beta = \binom{-1}{4}$ egiaztatu dugu. Modu berean, $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ bektore orokor baten β oinarriarekiko koordenatuak lor ditzakegu:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda+\mu\\ \mu\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda+\mu=x,\\ \mu=y,\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda=x-y,\\ \mu=y,\end{cases}$$

eta, horregatik, $[\binom{x}{y}]_\beta = \binom{x-y}{y}$ dugu.

Adibide honetan erabilitako metodoa guztiz orokorra da, eta, K^n-ko edozein oinarri finkatuta, oinarri horrekiko K^n-ren edozein bektoreren koordenatuak lortzeko balio du. Ohartu egin beharreko lan bakarra ekuazio linealetako sistema bat askatzea izango dela.

Aurreko adibideetan, bektore-espazio baten oinarri bat finkaturik, emandako bektore baten koordenatuak kalkulatzea izan dugu helburu. Beraz, bektore-espazio baten oinarria ezagututa eta bektore bat emanda, horren koordenatuak ezagunak dira. Alderantzizko bidea ere jarrai dezakegu: bektore baten oinarri batekiko koordenatuak emanda, bektorea zehaztea, alegia. Adibidez, aurreko $\beta \subseteq \mathbb{R}^2$ oinarria finkatuz eta jakinik $[v]_\beta = \binom{-1}{1}$ dela, orduan, koordenatuen definizioagatik,

$$v = -1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

dugu. Beraz, bektore baten oinarri zehatz batekiko koordenatuak jakinik, bektorea lortzeko nahikoa da emandako koordenatuekin oinarri horretako bektoreen konbinazio lineala egitea.

1.3.17. Adibidea. 1.1.7. adibidean ikusi dugun bezala,

$$V = \mathbb{R}[x] = \Big\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N},\, a_i \in \mathbb{R}\ \forall\, i = 0, \dots, n\Big\}$$

koefiziente errealak dituzten polinomioen multzoa $\mathbb{R}$-gaineko bektore-espazioa da. Kontuz: ez da V-ren oinarri finiturik existitzen (bereziki, 1.2.24. adibidean aipatzen den multzo infitinua $\mathbb{R}[x]$-ko oinarria da). Har dezagun

$$\mathbb{R}_2[x] := \big\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\big\},$$

hau da, gehienez bi mailako polinomioen multzoa.

Lehenengo eta behin, ohartu $\mathbb{R}_2[x]$ multzoa V-ren bektore-azpiespazioa dela. Gainera, ikus dezakezue $\beta = \{1, x, x^2\}$ multzoa $\mathbb{R}_2[x]$-ren oinarria dela. Izan bedi $f = 1 + 7x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$ polinomioa. Orduan

$$f = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 7 \cdot x^2 \qquad \Rightarrow \qquad [f]_\beta = \begin{pmatrix}1\\0\\7\end{pmatrix}$$

dugu, eta, orokorrean,

$$g = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \qquad \Rightarrow \qquad [g]_\beta = \begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

izango da.

Hurrengo emaitzak izen propioa du: *Steinitz' exchange lemma*; euskaraz, Steinitzen trukeko lema.

1.3.18. Teorema. *Izan bitez K gorputzaren gaineko V bektore-espazioa eta $T, S \subseteq V$ multzoak. Demagun T linealki independentea dela, eta S berriz, V-ren sistema sortzailea. Orduan, $|T| \leqslant |S|$ betetzen da.*

Frogapena. Demagun T eta S multzo finituak direla, eta, orokortasunik galdu gabe, suposa dezagun $T \neq \varnothing \neq S$ direla. Izan bitez

$$T = \{t_1, \ldots, t_n\}, \quad \text{eta} \quad S = \{s_1, \ldots, s_r\}$$

eta, absurdora eramanez, demagun $r < n$ dela.

Badakigu, S multzoa V bektore-espazioaren sistema sortzailea izateagatik eta $t_i \neq 0$ direnez, guztiak zero ez diren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ eskalarrak existitzen direla, non

$$t_1 = \lambda_1 s_1 + \ldots + \lambda_r s_r$$

den. Orokortasunik galdu gabe, suposa dezakegu $\lambda_1 \neq 0$ dela. Beraz,

$$s_1 = \lambda_1^{-1} t_1 - \lambda_1^{-1}\lambda_2 s_2 - \ldots - \lambda_1^{-1}\lambda_r s_r.$$

Hartu $S_1 = \{t_1, s_2, \ldots, s_r\}$. Definitu berri dugun multzoa V espazio bektorialaren sistema sortzailea da, $V = \langle S \rangle \leqslant \langle S_1 \rangle$ delako (erabili 1.2.27. teorema).

Orain egindako pausoa t_2 bektorearekin errepikatuko dugu: existitzen dira $\mu_1, \ldots, \mu_r$ eskalarrak, denak aldi berean zero izan gabe, non $t_2 = \mu_1 t_1 + \mu_2 s_2 + \ldots + \mu_r s_r$ den. Horretaz gain, $\{\mu_2, \ldots, \mu_r\} \neq \{0\}$ dugu; hau da, existitzen da $i \in \{2, \ldots, r\}$ indizeren bat, non $\mu_i \neq 0$ den (bestela, $t_2 = \mu_1 t_1$ izango litzateke, hau da, t_1 eta t_2 proportzianalak izango lirateke; absurdua T askea baita).

Berriro ere, behar izanez gero, S-ko bektoreen ordena aldatuz, pentsa dezakegu $\mu_2 \neq 0$ betetzen dela. Beraz,

$$s_2 = \mu_2^{-1} t_2 - \mu_2^{-1}\mu_1 t_1 - \mu_2^{-1}\mu_3 s_3 - \ldots - \mu_2^{-1}\mu_r s_r,$$

eta V bektore-espazioaren $S_2 = \{t_1, t_2, s_3, \ldots, s_r\}$ sistema sortzaile berria kontsidera dezakegu. Prozedura hori errepikatuz gero, s_i bektore guztiak ken ditzakegu, $r < n$ suposatu dugulako. Beraz, $S_r = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$ sistema sortzaile berria lortuko dugu. Bereziki, $t_{r+1}, \ldots, t_n$ bektoreak S_r-ko bektoreen konbinazio lineal gisa idatziko genituzke, eta, beraz, $T = \{t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_n\}$ multzoa linealki dependentea dela lortu. Hori absurdoa da, hipotesiz T askea delako.

Hortaz, $r < n$ kasua absurdua da, eta $n = |T| \leqslant |S| = r$ ondorioztatu dugu. □

Orain, 1.3.15. Galderari baiezko erantzuna (gure erantzuna bektore-espazio finituki sortuei aplikatzen zaien arren, emaitza edozein bektore-espaziotan da egia) eman diezaiokegu:

1.3.19. Korolarioa. *Izan bedi K-ren gaineko V bektore-espazio finituki sortua. Orduan, V-ren oinarri guztiek bektore kopuru bera dute (edo tamaina bera dute).*

Frogapena. Izan bitez V-ren β eta γ oinarri finituak. Bereziki, β linealki independentea da, eta γ sistema sortzailea. Beraz, 1.3.18. teoremagatik, $|\beta| \leqslant |\gamma|$ dugu. Bi oinarri horien rola aldatuz gero, $|\gamma| \leqslant |\beta|$ ondorioztatzen da. Beraz, $|\beta| = |\gamma|$ dugu. □

Beraz, honako nozio hau ondo definituta dago.

1.3.20. Definizioa (Dimentsioa). Izan bedi K-ren gaineko V bektore-espazioa. Orduan, V-ren oinarriek duten bektore kopuruari V-ren *dimentsio* deritzo, eta $\dim(V)$ nahiz $\dim V$ ikurraz adierazten da. Azpimarratu nahi bada K gorputza zein den, orduan $\dim_K(V)$ edo $\dim_K V$ idazten da.

1.3.21. Oharra. Gauza bera da bektore-espazio bat dimentsio finitukoa edo finituki sortua (ikusi 1.2.28. Definizioa) dela esatea.

Adibidez, $\dim\{0\} = 0$ da. Definizioz $\{0\}$-ren oinarria multzo hutsa da, eta multzo hutsaren tamaina zero da (ikusi 0.1.2. adibidea). Dagoeneko eman dugu $K[x]$-ren oinarri bat (ikusi 1.2.24. adibidea) eta, hortaz, $\dim_K(K[x]) = \infty$ dela ondoriozta dezakegu; antzeko moduan, $\dim(K^n) = n$ da. Aurrerago $\dim_K\big(M_2(K)\big) = 4$ dela ikusiko dugu.

Orain, 1.3.18. teorema birformulatuko dugu.

1.3.22. Korolarioa. *Izan bedi V bektore-espazioa, $\dim(V) = n$ finitua izanik.*

1. *$S \subseteq V$ sistema sortzailea bada, orduan $|S| \geqslant n$ dugu, eta S oinarria da, baldin eta soilik baldin $|S| = n$ bada;*
2. *$T \subseteq V$ linealki independentea bada, orduan $|T| \leqslant n$ dugu, eta T oinarria da, baldin eta soilik baldin $|T| = n$ bada.*

1.3.23. Adibidea. Aurreko emaitzari esker, $\mathbb{R}^3$-ren honako multzo hau

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathbb{R}^3$ bektore-espazioaren oinarria dela frogatzeko, nahikoa da S sistema sortzailea edo linealki independentea dela ikustea, bere tamaina $|S| = 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ da eta. Egiazta ezazue.

1.3.24. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V dimentsio finituko bektore-espazioa eta $W \leqslant V$ azpiespazioa. Orduan*

i. *W ere dimentsio finituko bektore-espazioa da eta $\dim(W) \leqslant \dim(V)$.*

ii. *W-ren edozein oinarri V-ren oinarri bateraino luza daiteke.*

iii. *$\dim(W) = \dim(V)$ dugu, baldin eta soilik baldin $W = V$ bada.*

Frogapena. Hasiko gara egiaztatzen W dimentsio finitukoa dela. Azpiespazio tribiala bada, hau da, $W = \{0_V\}$ betetzen bada, berehalakoa da. Bestela, existitzen da $w_1 \in W \backslash \{0\}$, eta $W = \langle w_1 \rangle$ bada, W azpiespazioak dimentsio finitua dauka. Baldin eta $W \neq \langle w_1 \rangle$ betetzen bada, existitzen da $w_2 \in W \backslash \langle w_1 \rangle$ beste bektore bat. Berriro, $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ bada, W dimentsio finitukoa da, eta, bestela, prozesu horrekin jarrai dezakegu, $\{w_1, w_2, \ldots, w_r, \ldots\} \subseteq W$ bektoreak lortuz. Ohartu bektore horiek linealki independenteak direnez eta $W \subseteq V$ denez, prozesu hori finitua izan behar dela (gogoratu V dimentsio finitukoa dela). Beraz existitzen da $n \in \mathbb{N}$ non $W = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ den. Gainera, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ sistema sortzailea W-ren oinarria da, aukeratutako bektoreak linealki independenteak izanik eta 1.2.28. Definizioagatik, $\dim(W) = n$ dugu. Esan bezala, $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq W \subseteq V$ multzo askea da, eta 1.3.11. teorema erabiliz, multzo hori V-ren oinarri bateraino luza dezakegu; hau da, existitzen da V-ren β oinarria non $\{w_1, \ldots, w_n\} \subseteq \beta$ den. Horrela,

$$\dim(W) = n \leqslant |\beta| = \dim(V)$$

eta lehenengo bi atalak frogatu ditugu.

Bukatzeko, baldin eta $W = V$ bada, tribialki $\dim(W) = \dim(V)$ dugu. Alderantzizko inplikazioa ere erraz ikusten da: baldin eta $\dim(W) = \dim(V)$ bada, orduan $|\tau| = |\beta|$, eta 1.3.22. korolarioagatik τ ere V-ren oinarria da. Ondorioz,

$$V = \langle \beta \rangle = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle = W$$

dugu. □

1.3.25. Adibidea. Kontsidera dezagun

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

bektore-azpiespazioa. Azpiespazio horren oinarri bat emango dugu, eta oinarria $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bateraino luzatuko dugu. Ohartu

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = -y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=\{w_1, w_2\}} \rangle$$

dela. Beraz, $\{w_1, w_2\}$ multzoa W-ren sistema sortzailea da. Bi bektore horiek ez direnez proportzionalak, 1.3.3. korolarioari esker linealki independenteak direla dakigu. Ondorioz, W-ren oinarri bat osatzen dute.

Oinarri hori $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bateraino luzatzeko, nahikoa dugu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri kanonikoko bektore egoki bat gehitzea, hau da, w_1 eta w_2 bektoreekin linealki independentea den bektore bat. Kasu horretan, e_1 bektoreak ez du balio, $e_1 = w_1$ delako. Erraz ikus daiteke W-ren oinarria luzatzeko e_2 nahiz e_3 erabil daitezkeela.

Jarraian ikusiko dugun bezala, edozein azpiespaziok bere osagarria onartzen du:

1.3.26. Teorema. *Izan bitez V dimentsio finituko bektore-espazioa eta $W \leqslant V$. Orduan, W azpiespazioak V-ren barruko azpiespazio osagarri bat du.*

Frogapena. Izan bedi $\beta_W = \{v_1, \ldots, v_r\} \subseteq W$ azpiespazioaren oinarria, eta luza dezagun V-ren $\beta = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ oinarriaraino. Badakigu, 1.3.12. teoremari esker, $W = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_r \rangle$ dela eta

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_r \rangle \oplus \langle v_{r+1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$$

dugula. Beraz, $U = \langle v_{r+1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$ definituz gero, $V = W \oplus U$ dugu, eta U sortu nahi genuen V-ren barruko W-ren azpiespazio osagarri bat da. □

1.3.27. Teorema (Grassmann-en formula). *Izan bitez V bektore-espazioa eta dimentsio finituko V-ren U, W azpiespazioak. Orduan*

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

betetzen da.

Frogapena. Izan bedi $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ multzoa $U \cap W$ azpiespazioaren oinarri bat. Oinarri hori U-ren nahiz W-ren oinarrietaraino luzatuko dugu:

$$\beta_U = \{v_1, \ldots, v_n, u_{n+1}, \ldots, u_r\}, \qquad \beta_W = \{v_1, \ldots, v_n, w_{n+1}, \ldots, w_s\}.$$

Beraz, $\beta_U \cup \beta_W = \{v_1, \ldots, v_n, u_{n+1}, \ldots, u_r, w_{n+1}, \ldots, w_s\}$ multzoa $U + W$ azpiespazioaren oinarria izango da. Izan ere, alde batetik, argi dago $U + W$-ren sistema sortzailea dela. Beste alde batetik, ikus dezagun linealki independenteak direla. Horretarako, hartu $\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s} \in K$ eskalarrak, non

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \ldots + \lambda_r u_r + \lambda_{r+1} w_{n+1} + \ldots + \lambda_{r+s} w_s = 0$$

betetzen den. Hortik,

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \ldots + \lambda_r u_r = -\lambda_{r+1} w_{n+1} - \ldots - \lambda_{r+s} w_s$$

berdintza lortzen dugu. Orain, ohartu $\lambda_{r+1} w_{n+1} + \ldots + \lambda_{r+s} w_s$ bektorea $(W \backslash U) \cup \{0\}$ multzoaren barnean dagoela, eta $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \ldots + \lambda_r u_r \in U$ dagoela. Beraz, $\big((W \backslash U) \cup \{0\}\big) \cap U = \{0\}$ denez, honako berdintza hauek eman behar dira:

$$\begin{cases} \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} u_{n+1} + \ldots + \lambda_r u_r = 0, \\ -\lambda_{r+1} w_{n+1} - \ldots - \lambda_{r+s} w_s = 0. \end{cases}$$

Gainera, $\{v_1, \ldots, v_n, u_{n+1}, \ldots, u_r\}$ eta $\{w_{n+1}, \ldots, w_s\}$ multzo askeak direnez, $\lambda_i = 0$ beteko da $i \in \{1, \ldots, r+s\}$ guztietarako. Beraz,

$$\dim(U \cap W) = n, \qquad \dim(U) = r, \qquad \dim(W) = s, \qquad \dim(U + W) = r + s - n$$

betetzen direla egiaztatu dugu, eta, hortaz, Grassmann-en formula ondorioztatu:

$$\dim(U + W) = r + s - n = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

□

Ikusi dugun frogapenak $U + W$-ren oinarri bat lortzeko honako algoritmo hau ematen digu: hasi gara $U \cap W$-ren oinarri batekin, oinarri hori luzatu dugu U-ren eta W-ren oinarrietaraino, eta lortutako U-ren eta W-ren oinarrien bildura $U + W$-ren oinarria da.

1.3.28. Korolarioa. *Izan bitez V bektore-espazioa eta U, W dimentsio finituko V-ren bi azpiespazio. Baldin eta $U + W$ batura zuzena bada, orduan*

$$\dim(U + W) = \dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$$

dugu, eta, $U \oplus W$-ren oinarri bat lortzeko, nahikoa da U-ren edozein oinarri W-ren edozein oinarrirekin biltzea.

1.4 Oinarri- eta koordenatu-aldaketak

Arestian aipatu bezala, bektore-espazio batean oinarri bat finkatuz gero, emandako bektore baten koordenatuak (finkaturiko oinarriarekiko) bakarrak dira. Hala ere, bektore-espazio baten oinarria ez da bakarra. Are gehiago, bektore-espazio batek infinitu oinarri desberdin ditu. Hortaz, honako galdera hau luzatzen dugu: bektore-espazio baten bi oinarri desberdin emanda, bektore baten oinarri horiekiko koordenatuen artean ba al dago erlaziorik? Baiezkoan, zein?

1.4.1. Definizioa (Oinarri-aldaketaren matrizeak). Izan bitez K-ren gaineko eta dimentsio finituko V bektore-espazioa eta V-ren $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eta γ bi oinarri. Esango dugu honako n tamainako matrize karratua

$$M_\gamma^\beta := \begin{pmatrix} [v_1]_\gamma & \ldots & [v_n]_\gamma \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(K)$$

β-tik γ-rako oinarri aldaketaren matrizea dela.

Hau da, M_γ^β matrizearen i. zutabean $[v_i]_\gamma \in K^n$ bektorea idatzi dugu. Gogora ezazue 1.3.14. oharra. Inplizituki, beraz, β-ko bektoreen ordena finkatzen da.

1.4.2. Adibidea. Izan bitez $\kappa = \{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ oinarri kanonikoa eta $\beta = \{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\}$ oinarria. Azken β oinarriko bektore horiei v_1 eta v_2 izenak emango dizkiegu, hurrenez hurren. Orain, $e_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$ eta $e_2 = -v_1 + v_2$ berdintzak betetzen direnez, definizioz

$$[e_1]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{eta} \qquad [e_2]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ditugu. Oinarri kanonikoarekiko bektoreen osagaiak eta koordenatuak bat datozenez (ikusi 1.3.16. adibidea), zuzenean

$$[v_1]_\kappa = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{eta} \quad [v_2]_\kappa = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ditugu. Hortik

$$M_\beta^\kappa = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_\kappa^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrizeak ditugu. Ohartu lortutako bi matrize horiek bata bestearen alderanzizkoak direla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Segidan datorren teorema irakasgai honetako emaitzarik garrantzitsuenetakoa da, eta atal honen hasieran egindako galdera erantzuten du.

1.4.3. Teorema (Oinarri-aldaketaren formula). *Izan bitez K-ren gaineko dimentsio finituko V bektore-espazioa, eta $\beta, \gamma \subseteq V$ bi oinarri. Orduan, $v \in V$ bektore guztietarako, $M_\gamma^\beta \cdot [v]_\beta = [v]_\gamma$ betetzen da.*

Frogapena. Finka ditzagun V-ren $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eta $\gamma = \{w_1, \ldots, w_n\}$ oinarriak, eta idatzi $M_\gamma^\beta = (a_{ij})$. Definizioz,

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad v = p_1 v_1 + \ldots + p_n v_n \tag{1.9}$$

eta

$$[v]_\gamma = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad v = q_1 w_1 + \ldots + q_n w_n.$$

Alde batetik,

$$M_\gamma^\beta \cdot [v]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}p_1 + \ldots + a_{1n}p_n \\ \ddots \\ a_{n1}p_1 + \ldots + a_{nn}p_n \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

kalkula dezakegu. Beste alde batetik, M_γ^β matrizearen definizioaren arabera,

$$v_i = a_{1i}w_1 + \ldots + a_{ni}w_n, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

betetzen da. Beraz, azken berdintza horiek (1.9). ekuazioan ordezkatzean,

$$\begin{aligned} v &= p_1 v_1 + \ldots + p_n v_n \\ &= p_1\big(a_{11}w_1 + \ldots + a_{n1}w_n\big) + \ldots + p_n\big(a_{1n}w_1 + \ldots + a_{nn}w_n\big) \\ &= \big(p_1 a_{11} + \ldots + p_n a_{1n}\big)w_1 + \ldots + \big(p_n a_{1n} + \ldots + p_n a_{nn}\big)w_n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Hau da, (1.11). ekuazioak dio, frogatu nahi genuen bezala, (1.10). ekuazioko koordenatuak v bektorearen γ oinarriarekiko koordenatuak direla. □

Kapitulu hau amaitzeko, 1.4.3. teoremaren hainbat ondorio frogatuko ditugu.

1.4.4. Teorema. *Izan bedi K-ren gaineko V dimentsio finituko bektore-espazioa, eta demagun $\beta, \gamma, \delta \subseteq V$ hiru oinarri direla. Orduan, $M_\delta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta = M_\delta^\beta$ betetzen da.*

Frogapena. Idatzi $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$. Frogatuko dugu, $i = 1, \dots, n$ indize guztietarako, $M_\delta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta$ eta M_δ^β matrizeen $i.$ zutabeak berberak direla. Alde batetik, badakigu

$$[v_1]_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

dela, v_1 bektorea β-ko lehenengo bektorea delako. Beraz, $M_\delta^\beta \cdot [v_1]_\beta$ biderkadura M_δ^β matrizearen lehenengo zutabea da, hau da, $[v_1]_\delta$ bektorea.

Beste alde batetik, 1.4.3. teoremagatik

$$\left(M_\delta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta\right)[v_1]_\beta = M_\delta^\gamma\left(M_\gamma^\beta \cdot [v_1]_\beta\right) = M_\delta^\gamma \cdot [v_1]_\gamma = [v_1]_\delta$$

da; hau da, $M_\delta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta$ matrizearen lehenengo zutabea $[v_1]_\delta$ bektorea da. Bi matrizeetako lehenengo zutabea zutabe bera dela ondorioztatu dugu.

Orain, $i \in \{2, \dots, n\}$ guztietarako, $[v_i]_\beta$ bektorea hartu eta kalkulu berberak eginez gero, $M_\delta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta$ eta M_δ^β matrizeen $i.$ zutabea berbera dela lortuko dugu. □

1.4.5. Oharra. 1.4.4. teoreman frogatu dugun bezala, $\beta, \gamma, \delta \subseteq V$ bektore-espazioaren hiru oinarri finitu hartuz gero, $M_\delta^\beta = M_\delta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta$ matrizeen arteko berdintza betetzen da. Berdintza hori gogoan izateko, matrizeen adierazpenean agertzen diren hizki grekoak frakzioak balira lez sinplifika daitezke:

$$M_\delta^\beta = M_{\not\delta}^{\not\gamma} \cdot M_{\not\gamma}^\beta$$

1.4.4. teorema $\beta = \delta$ kasuan aplikatuz gero, $M_\gamma^\beta \cdot M_\beta^\gamma = M_\gamma^\gamma$ eta $M_\beta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta = M_\beta^\beta$ berdintzetara ailegatzen gara. Baina, definizioz, $M_\beta^\beta = M_\gamma^\gamma$ identitate-matrizea da. Beraz, 0.6.19. Definizioari erreparatuz, M_β^γ eta M_γ^β matrizeak elkarren alderantzizkoak direla ondorioztatu dugu; segidan datorren emaitzan azaldu bezala.

1.4.6. Korolarioa. *Izan bedi K-ren gaineko $n \in \mathbb{N}$ dimentsio finituko V bektore-espazioa, eta demagun $\beta, \gamma \subseteq V$ bi oinarri direla. Orduan, $M_\gamma^\beta \in \mathrm{GL}_n(K)$ matrize alderanzgarria da, eta $\left(M_\gamma^\beta\right)^{-1} = M_\beta^\gamma$ dugu.*

Frogapena. 1.4.4. teoremak dio $M_\gamma^\beta \cdot M_\beta^\gamma = M_\gamma^\gamma$ eta $M_\beta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta = M_\beta^\beta$ berdintzak betetzen direla. Baina, definizioz, $M_\beta^\beta = I_n = M_\gamma^\gamma$ dugu. Horregatik

$$M_\gamma^\beta \cdot M_\beta^\gamma = I_n = M_\beta^\gamma \cdot M_\gamma^\beta$$

betetzen da. Horrek esan nahi du M_β^γ eta M_γ^β matrizeak bata bestearen alderanzizkoak direla. Bereziki, $M_\beta^\gamma, M_\gamma^\beta \in \mathrm{GL}_n(K)$. □

Hau da, 1.4.2. adibidean ikusitako gertaera (hor ere M_κ^β eta M_β^κ bata bestearen alderanzizkoak ziren) orokorra dela egiaztatu dugu.

1.5 Ariketak

1.5.1. Ariketa. Froga ezazu 1.1.6. Proposizioa.

1.5.2. Ariketa. Froga ezazu 1.1.7. Adibideko $K[x]$ multzoan definituriko $+$ eta $\cdot$ eragiketek 1.1.1. Definizioko baldintzak betetzen dituztela.

1.5.3. Ariketa. Izan bitez V bektore-espazioa eta $U, W \leqslant V$ edozein bi azpiespazio. Froga ezazu $\{u - w \mid u \in U,\ w \in W\}$ multzoa $U + W$ azpiespazioa dela.

1.5.4. Ariketa. Froga ezazu 1.3.26. Teoremako U azpiespazio osagarria bakarra dela.

1.5.5. Ariketa. Izan bedi $\{\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ multzoa. Froga ezazu multzoa linealki independentea eta $\mathbb{R}^2$-ko sistema sortzailea dela.

1.5.6. Ariketa. Zehaztu ezazu honako kasu hauetan V multzoak K-ren gaineko bektore-espazioak diren ala ez, batura eta eskalar bidezko biderketa modu arruntean definitzen baldin badira:

i. $V = \mathbb{C}$ eta $K = \mathbb{R}$.

ii. $V = \mathbb{R}$ eta $K = \mathbb{C}$.

iii. $V = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ funtzioa}\}$ eta $K = \mathbb{R}$.

iv. $V = \{f \colon \mathbb{R} \to [0,1] \mid f \text{ funtzioa}\}$ eta $K = \mathbb{R}$.

1.5.7. Ariketa. Azter ezazu zein kasutan den W multzoa V-ren K-gaineko bektore-azpiespazioa:

i. $W = \{\binom{2x}{-3x} \mid x \in \mathbb{R}\}$, non $V = \mathbb{R}^2$ eta $K = \mathbb{R}$ diren.

ii. $W = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$, non $V = \mathbb{R}^2$ eta $K = \mathbb{R}$ diren.

iii. $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\}$, non $V = \mathbb{R}^3$ eta $K = \mathbb{R}$ diren.

iv. $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\}$, non $V = \mathbb{R}^3$ eta $K = \mathbb{R}$ diren.

1.5.8. Ariketa. Azter ezazu zein kasuetan den W multzoa $\mathbb{R}$-gaineko $\{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funtzioa}\}$ bektore-espazioaren azpiespazioa:

i. $W = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

ii. $W = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(n) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

iii. $W = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$.

iv. $W = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ jarraitua}\}$.

v. $W = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ deribagarria}\}$.

1.5.9. Ariketa. Froga ezazu bektore-espazio bateko bi bektore linealki dependenteak direla, baldin eta soilik baldin proportzionalak badira.

1.5.10. Ariketa. Honako kasu bakoitzean, froga ezazu $\beta = \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq K^3$ oinarria dela, eta, aurkitu itzazu $[v]_\beta$ koordenatuak.

i. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, eta $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, non $K = \mathbb{R}$ den.

ii. $u_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}$, eta $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, non $K = \mathbb{C}$ den.

1.5.11. Ariketa. Zein dira bat dimentsioko bektore-espazioen oinarriak?

1.5.12. Ariketa. Froga ezazu n dimentsioko V bektore-espazio batek $0 \leqslant j \leqslant n$ balioetarako j dimentsioko bektore-azpiespazioak dituela. Zeintzuk dira $\{0\}$ eta V bektore-azpiespazio bakarrak dituzten bektore-espazioak?

1.5.13. Ariketa. Izan bedi V bektore-espazioa, n dimentsiokoa. Baldin eta $h \subseteq V$ bektore-azpiespazioa bada, *hiperplanoa* dela esaten da, $\dim(h) = n - 1$ denean. Baldin eta $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ guztiak nuluak ez baldin badira, froga ezazu

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \right\}$$

$\mathbb{R}^n$-ren hiperplanoa dela.

1.5.14. Ariketa. Izan bitez V dimentsio finituko bektore-espazioa eta $v \in V$ ez-nulua.

i. Froga ezazu v bektorea barne duen V-ren oinarria existitzen dela.

ii. Ondoriozta ezazu v barne ez duen V-ren hiperplanoa existitzen dela.

1.5.15. Ariketa. Esan ezazu $\mathbb{R}^4$-ko

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bektoreek sortutako azpiespazioaren dimentsioa zein den, eta aurki ezazu horren oinarriren bat.

1.5.16. Ariketa. Esan ezazu zein diren honako ekuazio hauek zehaztzen dituzten V espazioaren azpiespazioen dimentsioak eta aurkitu bakoitzarentzat oinarri bat:

i. $2x - 6y + 3z = 0,\ 3x + y + z = 0,\ V = \mathbb{R}^3,\ K = \mathbb{R}$.

ii. $x + y + z + t = 0,\ V = \mathbb{R}^4,\ K = \mathbb{R}$.

iii. $x + 2z - t = 0,\ -x + 4y + 3t = 0,\ -3x - 4y - 8z + t = 0,\ V = \mathbb{R}^4,\ K = \mathbb{R}$.

1.5.17. Ariketa. Aurkitu itzazu honako azpiespazio hauentzako ekuazioak:

i. $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^3$, non $K = \mathbb{R}$ den.

ii. $\left\langle \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{C}^3$, non $K = \mathbb{C}$ den.

iii. $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^4$, non $K = \mathbb{R}$ den.

1.5.18. Ariketa. Froga ezazu $\mathbb{R}^2$-ko bektore-azpiespazio guztiak, $\{0\}$ eta $\mathbb{R}^2$ izan ezik, $(0,0)$ jatorritik pasatzen diren zuzenak direla. Zein dira $\mathbb{R}^3$-ren bektore-azpiespazioak?

1.5.19. Ariketa. **i.** Izan bitez $\mathbb{R}^3$-ko

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

azpiespazioak. Aurkitu itzazu U, W, $U \cap W$ eta $U + W$ azpiespazioen dimentsioak, eta bakoitzarentzat oinarri bat.

ii. Egin gauza bera

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y,\ y + 3z = 0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \right\}$$

azpiespazioetarako.

1.5.20. Ariketa. Froga ezazu $U = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \}$ eta $W = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \}$ azpiespazioak osagarriak direla $\mathbb{R}^3$-n. Deskonposatu $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ bektorea U-ko eta W-ko bektore biren batura bezala.

1.5.21. Ariketa. Aurkitu $U = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \}$ azpiespazioaren azpiespazio osagarriren bat $\mathbb{R}^3$-n. Egia al da U-k infinitu azpiespazio osagarri dituela $\mathbb{R}^3$-n?

1.5.22. Ariketa. Frogatu $W = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 \mid x + y + z = 0,\ 2x + iy - z = 0 \}$ multzoa $\mathbb{C}^3$-ren azpiespazioa dela. Aurkitu W-ren oinarria eta W-ren osagarri bat $\mathbb{C}^3$-n.

1.5.23. Ariketa. **i.** Froga ezazu edozein $\mathbb{C}$-gaineko V bektore-espazio $\mathbb{R}$-gaineko bektore-espazioa ere badela. Baldin eta $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ multzoa $\mathbb{C}$-gaineko oinarria bada, froga ezazu

$$\{v_1, \ldots, v_n, \mathrm{i}v_1, \ldots, \mathrm{i}v_n\}$$

V-ren $\mathbb{R}$-gaineko oinarria dela. Ondorioztatu ezazu $\dim_{\mathbb{C}}(V)$ eta $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ artean zein erlazio dagoen.

ii. Hartu dezagun $\mathbb{R}$-gaineko $\mathbb{C}^3$ bektore-espazioa. Aurkitu ezazu $W = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 \mid x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}z = 0 \}$ azpiespazioaren oinarri bat.

1.5.24. Ariketa. Egiazta ezazu aurreko baieztapenak egiazkoak edo gezurrezkoak diren, eta erantzun itzazu egindako galderak. Demagun V dimentsio finituko bektore-espazioa dela, eta U eta W espazioaren bi azpiespazio direla.

i. V-ko edozein oinarrik U-ko oinarri bat du barne.

ii. Baldin eta β_U, β_W multzoak U-ko eta W-ko oinarriak badira, hurrenez hurren, $\beta_U \cup \beta_W$ multzoa $U + W$-ko oinarria da.

iii. Baldin eta β_U, β_W multzoak U-ko eta W-ko oinarriak badira, hurrenez hurren, $\beta_U \cap \beta_W$ multzoa $U \cap W$-ko oinarria da.

iv. Baldin eta $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$ bada, $U + W$ batura zuzena da.

v. Demagun $U \neq W$ dela. Baldin eta $\dim(V) = n$ eta $\dim(U) = \dim(W) = n - 1$ badira, zein da $U \cap W$ azpiespazioaren dimentsioa?

1.5.25. Ariketa. Izan bedi $\beta = \{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ multzoa.

i. Froga ezazu β oinarria dela;

ii. Eman itzazu oinarri kanonikoaren bektoreen koordenatuak β-rekiko; hau da, $[e_1]_\beta$, $[e_2]_\beta$ eta $[e_3]_\beta$. Zein dira $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ bektorearen β-rekiko koordenatuak?

1.5.26. Ariketa. $\mathbb{R}^3$-n oinarri-aldaketa bat egin dugu, κ oinarri kanonikotik β beste oinarri batera pasatuz. Horren ondorioz, honela aldatu dira bektoreen koordenatuak:

$$\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]_\beta = \begin{pmatrix}x+y-z\\y-z\\x+z\end{pmatrix}.$$

i. Eman itzazu β-ko bektoreak.

ii. Eman ezazu $W = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}$ planoaren β oinarriarekiko ekuazioa.

1.5.27. Ariketa. Izan bitez V dimentsio finituko K-gaineko bektore-espazioa eta β bere oinarri bat. Demagun $\dim(V) = n$ dela. Egiazta ezazu 1.3.13. Definizioko (1.8). ekuazioan definitutako $[-]_\beta \colon V \to K^n$ funtzioak honako bi baldintza hauek betetzen dituela:

i. Edozein $v, w \in V$ bektoretarako $[v+w]_\beta = [v]_\beta + [w]_\beta$ betetzen da.

ii. Edozein $v \in V$ bektoretarako eta edozein $\lambda \in K$ eskalarretarako, $[\lambda v]_\beta = \lambda[v]_\beta$ betetzen da.

2. kapitulua

Aplikazio linealak

Gai honetan zehar, K gorputza finkatuko dugu. Horrela, *bektore-espazio* esatean K-ren gaineko (askotan dimentsio finituko) bektore-espazio esan nahiko dugu.

Aurreko kapituluan aztertu ditugun objektu aljebraikoak bektore-espazioak izan dira. Hurrengo pausua objektu horiek elkarren artean «konparatu»edo erlazionatzea izango da, eta, horretarako, aplikazio «egoki»batzuk definituko ditugu: *aplikazio lineal* deritzenak. Horiek dira, hain zuzen ere, bektore-(azpi)espazio egitura «gordetzen»duten funtzioak. Zehazkiago, azpiespazio bektorial baten aplikazio lineal bidezko irudi edo aurreirudiak berriro ere azpiespazio bektorialak izango dira.

Kapitulu honetan zehar ikusiko dugun bezala, funtzio horiek duten abantaila nagusietako bat da, matrizeen bidez adieraz daitezkeela. Hau da, behin funtzio baten eremu eta koeremuko oinarriak finkatuz gero, funtzio hori matrize bakar baten bidez definituta dago. Orduan, funtzioaren propietateak aztertzeko, nahikoa izango da matrizeekin lan egiten jakitea.

Atal honetan, aplikazio linealen adibide batzuk ikusiko ditugu; aurrez aipaturiko matrizeen bidezko adierazpena azaldu, eta, behin eremu eta koeremuko oinarriak finkatuta, matrize horien bakartasuna frogatuko dugu. Gainera, aplikazio lineal mota desberdinak definituko ditugu; horien artean, aplikazio lineal bijektiboak, *isomorfismoak* deiturikoak.

2.1 Aplikazio linealak eta oinarrizko propietateak

2.1.1. Definizioa. Izan bitez K-gaineko V eta W bi bektore-espazio eta $f\colon V \to W$ funtzioa. Baldin eta honako bi baldintza hauek betetzen badira,

i. $v_1, v_2 \in V$ bektore guztietarako $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ dugu;

ii. $v \in V$ bektore guztietarako eta $\lambda \in K$ eskalar guztietarako, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ dugu,

orduan, $f\colon V \to W$ *aplikazio lineala* dela esaten da. Espazio batetik beste espazio baterako aplikazio lineal guztien multzoa $\mathcal{L}(V, W)$ bidez adierazten da, hau da,

$$\mathcal{L}(V, W) := \{f\colon V \to W \mid f \text{ aplikazio lineala}\}.$$

Adibide batzuk ikusten hasiko gara.

2.1.2. Adibidea (**Aplikazio nulua eta identitatea).** Adibidez,

$$\begin{array}{rccll} 0\colon & V & \to & W, & \\ & v & \mapsto & 0_W & \forall\, v \in V \end{array}$$

aplikazio lineala da, V eta W bektore-espazio guztietarako. Batzuetan, aplikazio honek *aplikazio nulua* izena du.

Demagun $V = W$ dela. Kasu horretan,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_V\colon & V & \to & V, \\ & v & \mapsto & v \end{array} \qquad \forall\, v \in V$$

defini dezakegu. Aplikazio horri *identitate* deritzo, eta erraz egiazta dezakezue $\mathrm{id}_V \in \mathcal{L}(V,V)$ dela, hau da, id_V aplikazio lineala dela. Bektore-espazioa argi badago, id_V idatzi ordez, sarritan id ikurra erabiltzen da.

2.1.3. Adibidea (**Matrize batek definitutako aplikazio lineala).** Adibide honetan, matrize batek aplikazio lineal bat nola definitzen duen ikusiko dugu. Izan bedi $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ edozein matrize, n errenkada eta m zutabe dauzkana. Defini dezakegu

$$\begin{array}{rccc} l_A\colon & K^m & \to & K^n, \\ & v & \mapsto & A \cdot v \end{array} \qquad \forall\, v \in K^m \tag{2.1}$$

aplikazioa, eta 0.7.5. ariketan ikusi dugu aplikazio lineala dela.

Adibide konkretu bat emateko, kontsidera dezagun $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ matrizeak definitutako

$$\begin{array}{rccc} l_A = f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2, \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} \end{array} \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

aplikazioa. Orain, $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\right)$ eta $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$ hartuz gero,

$$\begin{aligned} f(v_1+v_2) = f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ 2(x_1+x_2)-(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (2x_1-y_1)+(2x_2-y_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 2x_1-y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ 2x_2-y_2 \end{pmatrix} = f(v_1)+f(v_2). \end{aligned}$$

Bestalde, $\lambda \in \mathbb{R}$ bada,

$$f(\lambda v_1) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ 2\lambda x_1 - \lambda y_1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 2x_1-y_1 \end{pmatrix} = \lambda f(v_1).$$

Beraz, 2.1.1. definizioko baldintzak betetzen direla egiaztatu dugunez, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ dugu.

Honako bi funtzio hauek ez dira aplikazio linealak:

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2, \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y+1 \\ x \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2. \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Aplikazio linealen adibide garrantzitsuetariko bat da oinarri batekiko koordenatuak hartzea.

2.1.4. Adibidea. Izan bitez V dimentsio finituko bektore-espazioa eta β bere oinarri bat. Demagun $\dim(V) = n$ dela. Orduan, 1.3.13. definizioko (1.8). ekuazioan definitutako $[-]_\beta\colon V \to K^n$ funtzioa aplikazio lineala da. Hori 1.5.27. ariketan egiaztatuko dugu.

Aplikazio lineal bakoitzarekin estuki erlazionatuta dauden bi azpiespazio aztertuko ditugu: *nukleoa* eta *irudia*. Funtzio baten irudia zer den jada 0.1.8. definizioan zehaztu dugu.

2.1.5. Definizioa. Izan bedi $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Definizioz, V-ren ondoko azpimultzoari f aplikazioaren *nukleo* deritzo:

$$\ker(f) = \ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} = f^{-1}(0_W).$$

Hau da, aplikazio lineal baten nukleoa 0_W bektorearen aurreirudia da. Notazioari begira, $\ker(f)$ bai $\ker f$ ikurrak erabiltzen dira; $\ker$ notazioa ingelesetik dator, *kernel* hitzetik. Horrez gain, $f(V)$ multzoari f aplikazioaren *irudi* deritzo, eta $\mathrm{Im}(f)$ nahiz $\mathrm{Im}\, f$ adierazten da.

2.1.6. Lema. *Izan bedi $f \in \mathcal{L}(V,W)$ aplikazio lineala. Orduan, $f(0_V) = 0_W$ dugu, eta, bereziki, $0_V \in \ker(f)$.*

Frogapena. Definizioa erabiliz,

$$f(0_V) = f(0_V + 0_V) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{f lineala}}}{=} f(0_V) + f(0_V)$$

ondorioztatzen da. Beraz, $f(0_V)$ elementua kenduz bi alboetan, $f(0_V) = 0_W$ berdintzara ailegatzen gara. Horregatik $0_V \in \ker(f)$. □

Lema horrek dio $\ker(f)$ ez dela hutsa f aplikazio lineal guztietarako.

2.1.7. Adibidea. 2.1.2. adibidean definitutako $0\colon V \to W$ aplikazio nulurako, $\ker(0) = V$ da, eta $\mathrm{Im}(0) = \{0_W\}$ dugu.

Baldin eta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ 2x-y \end{smallmatrix}\right)$ eran definituta badago, bere nukleoa tribiala da; hau da, $\ker(f) = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ da eta $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Baldin eta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eran definituta badago, $\ker(f) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ eta $\mathrm{Im}(f) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ betetzen dira.

Honako proposizio honek erakusten du $\ker(f)$ eta $\mathrm{Im}(f)$ multzoek azpiespazio-egitura dutela.

2.1.8. Proposizioa. *Izan bedi $f \in \mathcal{L}(V,W)$ aplikazio lineala.*

i. *Baldin eta $U \leqslant V$ bada, orduan $f(U) \leqslant W$. Bereziki,* $\mathrm{Im}(f) \leqslant W$.

ii. *Baldin eta $\widetilde{U} \leqslant W$ bada, orduan $f^{-1}(\widetilde{U}) \leqslant V$. Bereziki,* $\ker(f) \leqslant V$.

Frogapena. Lehenengo atalarekin hasiko gara. Badakigu $f(U)$ ez dela multzo hutsa, $0_V \in U$ dugulako. Orain, $w_1, w_2 \in f(U)$ edozein bi bektore hartuz gero, definizioagatik $u_1, u_2 \in U$ existituko dira non $f(u_1) = w_1$ eta $f(u_2) = w_2$ diren. Hortik,

$$w_1 + w_2 = f(u_1) + f(u_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{f lineala}}}{=} f(\underbrace{u_1 + u_2}_{\in U})$$

ondorioztatzen dugu; hau da, $w_1 + w_2$ elementua $f(U)$-ren barnean dago, $u_1 + u_2 \in U$ izatearren (U azpiespazioa da eta).

Bestetik, $\lambda \in K$ eskalarra bada,

$$\lambda f(u_1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{f lineala}}}{=} f(\lambda u_1) \in f(U)$$

betetzen da, $\lambda u_1 \in U$ dugulako. Beraz, 1.2.4. teoremako baldintzak egiaztatu ditugu, eta $f(U) \leqslant W$ dugu. Orain, $U = V$ hartuz gero, $\mathrm{Im}(f) \leqslant W$ ondorioztatzen da.

Bigarren atala era berean frogatzen da. □

Lehen gaiko 0.1.11. definizioan ikusi dugu $\mathrm{Im}(f)$ azpiespazioak f funtzioa supraiektiboa den ala ez zehazten duela. Aplikazio lineal baten nukleoak aplikazio hori injektiboa noiz den ulertzen laguntzen digu.

2.1.9. Proposizioa. *Izan bedi $f \in \mathcal{L}(V,W)$ aplikazio lineala. Orduan, f injektiboa da, baldin eta soilik baldin* $\ker(f) = \{0_V\}$ *bada.*

Frogapena. Demagun f aplikazioa injektiboa dela, eta hartu edozein $v \in \ker(f)$. Orduan, $f(v) = 0_W$ dugu. Horrez gain, $f(0_V) = 0_W$ denez, $v = 0_V$ dela ondorioztatzen da, f aplikazioa injektiboa dela suposatu dugu eta.

Demagun orain $\ker(f) = \{0_V\}$ dela, eta $v_1, v_2 \in V$ hartuko ditugu non $f(v_1) = f(v_2)$ den. Orduan,

$$0_W = f(v_1) - f(v_2) = f(v_1) + f(-v_2) = f(v_1 - v_2)$$

dugu, eta, ondorioz, $v_1 - v_2 \in \ker(f) = \{0_V\}$. Beraz, $v_1 - v_2 = 0_V$ dugu; hau da, $v_1 = v_2$ betetzen da. □

Honako propietate honen ondorioz, erraz kalkula daitezke aplikazio linealen irudiak.

2.1.10. Proposizioa. *Izan bedi $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Baldin eta $\{v_i\}_{i\in I}$ multzoak $U \leqslant V$ azpiespazioa sortzen badu, orduan $f(U) = \langle f(v_i) \mid i \in I\rangle$ dugu. Bereziki, $V = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ finituki sortua bada,* $\mathrm{Im}(f) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_n)\rangle$ *dugu.*

Baldin eta f injektiboa bada eta $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ sistema askea bada, orduan $\{f(v_i)\}_{i\in I} \subseteq W$ ere sistema askea izango da.

Frogapena. Badakigu, 1.2.21. teoremari esker,

$$U = \langle v_i \mid i \in I\rangle = \{k_1v_1 + \ldots + k_sv_s \mid s \in \mathbb{N},\, k_1, \ldots, k_s \in K\}$$

betetzen dela. Beraz,

$$\begin{aligned} f(U) &= \{f(k_1v_1 + \ldots + k_sv_s) \mid s \in \mathbb{N},\, k_1, \ldots, k_s \in K\} \\ &= \{k_1f(v_1) + \ldots + k_sf(v_s) \mid s \in \mathbb{N},\, k_1, \ldots, k_s \in K\} = \langle f(v_i) \mid i \in I\rangle \end{aligned}$$

dugu.

Aplikazio lineala injektiboa dela suposatuko dugu orain, eta, $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ multzoa askea dela egiaztatzeko asmoz, demagun $\lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_r f(v_r) = 0_W$ betetzen dela, $r \in \mathbb{N}$ eta $\lambda_i \in K$ izanik. Orduan,

$$0_W = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_r f(v_r) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{f lineala}}}{=} f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r),$$

hau da, $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r \in \ker(f) = \{0_V\}$. Beraz, $\{v_i\}_{i\in I}$ askea dela gogoratuz, indize guztietarako $\lambda_i = 0$ dela ondorioztatzen dugu. Hots, $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ multzoa askea dela frogatu dugu. □

2.1.11. Teorema. *Izan bitez V, W bektore-espazioak, $f \in \mathcal{L}(V,W)$ eta $\beta \subseteq V$ oinarria.*

i. *f supraiektiboa da, baldin eta soilik baldin $f(\beta) \subseteq W$ sistema sortzailea bada.*

ii. *f injektiboa da, baldin eta soilik baldin $f(\beta)$ sistema askea bada eta $f\restriction_\beta$ funtzio injektiboa bada.*

iii. *f bijektiboa da, baldin eta soilik baldin $f(\beta)$ oinarria bada eta $f\restriction_\beta$ funtzio injektiboa bada.*

Frogapena. Lehenengo atala frogatuko dugu. Bigarrena era berean froga daiteke (froga ezazue), eta hirugarrena lehenengo bien konbinazioa baino ez da.

i $\Rightarrow$ Inplikazio hori 2.1.10. proposizioan egiaztatu dugu.

i $\Leftarrow$ Izan bedi $w \in W$ edozein elementu. Aplikazioa supraiektiboa dela egiaztatzeko, $v \in V$ elementua aurkitu behar dugu, non $f(v) = w$ den. Badakigu $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ eskalarrak existitzen direla, non

$$w = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_s f(v_s)$$

den, $f(\beta) \subseteq W$ sistema sortzailea da eta. Beraz, $w = f\big(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_s v_s\big)$ ondorioztatzen da, eta f aplikazioa supraiektiboa da. □

ii Bigarren atalean, lehenengo atalean ez zegoen beste baldintza bat agertzen da. Hori ulertzeko, jo 2.1.13. adibidera.

2.1.12. Korolarioa. *Baldin eta $f \in \mathcal{L}(V,W)$ supraiektiboa bada, orduan,* $\dim(V) \geqslant \dim\big(f(V)\big) = \dim(W)$. *Era berean, $f \in \mathcal{L}(V,W)$ injektiboa bada, orduan,* $\dim(V) = \dim\big(f(V)\big) \leqslant \dim(W)$. *Azkenik, $f \in \mathcal{L}(V,W)$ bijektiboa bada, orduan,* $\dim(V) = \dim(W)$.

2.1.13. Adibidea. Har ditzagun $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ matrizeak definitzen duen f aplikazio lineala eta $\kappa = \{e_1, e_2\}$ oinarri kanonikoa. Kalkula ditzakegu

$$f(e_1) = A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad f(e_2) = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Beraz, $f(\kappa) = \{f(e_1), f(e_2)\} = \{e_1, e_1\} = \{e_1\}$ dugu, eta multzo hori linealki independentea da, multzoan nulua ez den bektore bakar bat dago eta. Nahiz eta hori bete, f aplikazioa ez da injektiboa, $f(e_1) = f(e_2)$ dugulako.

Jarraian datorrena aplikazio linealek betetzen duten propietate garrantzitsuenetako bat da. Enuntziatua orokorra den arren, dimentsio finituko kasua soilik egiaztatuko dugu, oinarriak existitzen direla kasu horretan soilik frogatu dugulako.

2.1.14. Teorema (Aplikazio linealen oinarrizko teorema). *Izan bedi $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Orduan,*

$$\dim(V) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big).$$

Frogapena. Demagun $\dim(V) = n$ finitua dela. 2.1.8. proposizioan ikusi dugunez, $\ker(f) \leqslant V$ azpiespazioa da, eta existitzen da horren $\{v_1, \ldots, v_s\}$ oinarria. Luza dezagun V-ren oinarri bateraino:

$$\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_{s+(n-s)} = v_n\}$$

Froga dezagun $\{f(v_{s+1}), \ldots, f(v_n)\}$ multzoa $\mathrm{Im}(f)$ azpiespazioaren oinarria dela. Dakigunez, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ multzoa V-ren sistema sortzailea da, eta, 2.1.10. proposizioari esker,

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(v_1), \ldots, f(v_s), f(v_{s+1}), \ldots, f(v_n)\rangle = \langle f(v_{s+1}), \ldots, f(v_n)\rangle$$

izango da (ohartu $v_1, \ldots, v_s \in \ker(f)$ direla). Bereziki, $\{f(v_{s+1}), \ldots, f(v_n)\}$ multzoa f-ren irudiaren sistema sortzailea da.

Bestalde, demagun

$$\lambda_1 f(v_{s+1}) + \cdots + \lambda_{n-s} f(v_n) = 0_W \tag{2.2}$$

dela, $\lambda_i \in K$ izanik. Orduan, $f(\lambda_1 v_{s+1} + \ldots + \lambda_{n-s} v_n) = 0_W$ da. Ondorioz, $\lambda_1 v_{s+1} + \ldots + \lambda_{n-s} v_n \in \ker(f)$ dugu, eta $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in K$ existitzen dira, non

$$\lambda_1 v_{s+1} + \ldots + \lambda_{n-s} v_n = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_s v_s$$

den; hau da,

$$-\gamma_1 v_1 - \ldots - \gamma_s v_s + \lambda_1 v_{s+1} + \ldots + \lambda_{n-s} v_n = 0_V.$$

Baina $\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ sistema askea da; beraz,

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_s = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-s} = 0_K$$

direla ondorioztatzen da. Horrek eta (2.2). ekuazioak esan nahi dute $\{f(v_{s+1}), \ldots, f(v_n)\}$ sistema askea dela, eta, ondorioz, $\mathrm{Im}(f)$ azpiespazioaren oinarria da. Hortaz, $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = n - s$ da, eta, ondorioz, enuntziatuko formula betetzen da. □

2.1.15. Korolarioa. *Izan bitez V, W dimentsio finitu bereko bi bektore-espazio eta $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Orduan, f injektiboa da, baldin eta soilik baldin f supraiektiboa bada, baldin eta soilik baldin f bijektiboa bada.*

Frogapena. Nahikoa da lehenengo bi baldintzak baliokideak direla frogatzearekin. Hasteko, 2.1.14. teoreman ikusi dugun bezala,

$$\dim(V) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) \tag{2.3}$$

berdintza dugu. Gainera, hipotesiz $\dim(V) = \dim(W) \in \mathbb{N}$ dugu.

Orduan, aplikazioa injektiboa bada; hau da, $\ker(f) = \{0\}$ bada, $\dim \ker(f) = 0$ balioa (2.3). ekuazioan ordezkatuz,

$$\dim(W) = \dim(V) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = 0 + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$$

lortzen dugu; hau da, $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim(W)$. Beraz, $\mathrm{Im}(f) \leqslant W$ denez, $\mathrm{Im}(f) = W$ berdintzara ailegatzen gara. Ondorioz, f supraiektiboa da.

Orain, f supraiektiboa dela suposatuko dugu, hau da, $\mathrm{Im}(f) = W$. Berriro, (2.3). ekuaziora joz,

$$\dim(V) = \dim\big(\ker(f)\big) + \dim(V)$$

ondorioztatzen dugu. Beraz, $\dim(V) \in \mathbb{N}$ zenbaki arrunta denez, $\dim\big(\ker(f)\big) = 0$ dela lortzen dugu; hau da, $\ker(f)$ azpiespazio tribiala da. Hortaz, 2.1.9. lema erabiliz f injektiboa dela ondorioztatzen dugu. □

Kontuz: baldintza beharrezkoa da 2.1.15. korolarioan espazioen dimentsioa finitua izatea.

2.1.16. Adibidea. Kontsidera dezagun

$$\ell_\infty := \big\{(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists\, M \in \mathbb{R} \text{ non } |x_i| \leqslant M \text{ den } i \in \mathbb{N} \text{ guztietarako}\big\}$$

espazioa. Ikus daiteke (egiazta ezazue) ℓ_∞ espazioa $\mathbb{R}$-gaineko bektore-espazioa dela. Gainera, bere dimentsioa ez da finitua, honako bektore hauek ℓ_∞-n baitaude,

$$e_1 = (1, 0, \ldots), \qquad e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \qquad e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots), \qquad \forall\, i \geqslant 3,$$

eta linealki independenteak dira. Honako aplikazio lineal hau,

$$\begin{array}{rccc} \sigma\colon & \ell_\infty & \longrightarrow & \ell_\infty \\ & (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) & \longmapsto & (0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots) \end{array}$$

eran definiturikoa, injektiboa den arren, ez da supraiektiboa, e_1 bektorea irudian ez dagoelako.

2.1.17. Adibidea. Beste adibide bat emateko, har ditzagun

$$C^\infty(\mathbb{R}) := \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funtzioa infinituki deribagarria}\}$$

eta $D\colon C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ aplikazio lineala, $D(f) := f'$ eran definitua (berriro, zuen esku dago emaitza horiek egiaztatzea).

Kalkuluko oinarrizko teoremak dio D aplikazioa suprijektiboa dela. Bestalde, badakigu $D(c) = 0$ non $c \in \mathbb{R}$ edozein konstante den. Beraz, D aplikazio lineala ez da injektiboa izango, edozein funtzio konstanteren irudia 0 funtzioa da eta.

Aplikazio linealen definizioa eman eta aplikazio lineal mota desberdin batzuk ere ikusi ditugu. Ohartu finkatutako K gorputza infinitua bada, K-ren gaineko bektore-espazio ez-tribial guztiak multzo infinituak izango direla. Naturala da, beraz, galdetzea bektore-espazio baten gainean definitutako aplikazio lineala zehazteko zenbat bektoreren irudia ezagutu behar den: infinitu? Segidan datorren emaitzak erantzungo dio galdera horri.

2.1.18. Proposizioa. *Izan bitez $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ eta $\beta \subseteq V$ oinarria. Baldin eta $v_i \in \beta$ bektore guztietarako $f(v_i) = g(v_i)$ bada, orduan $f(v) = g(v)$ da $v \in V$ guztietarako.*

Frogapena. Izan bedi $v \in V$ edozein bektore. Orduan, existitzen dira $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ eskalarrak eta $v_1, \dots, v_n \in \beta$ oinarriko bektoreak, non $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ den. Ondorioz,

$$f(v) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ lineala}}}{=} \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 g(v_1) + \cdots + \lambda_n g(v_n) = g(v)$$

berdintzara ailegatzen da. □

2.1.19. Teorema. *Izan bitez V eta W bi bektore-espazio, $\beta = \{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ oinarria eta $\{w_i\}_{i\in I} \subseteq W$ oinarriaren kardinalitate bera daukan edozein W-ren azpimultzo. Orduan, $f\colon V \to W$ aplikazio lineal bakarra existitzen da, non $i \in I$ guztietarako $f(v_i) = w_i$ betetzen diren.*

Frogapena. Aurkitu behar dugun aplikazioaren bakartasuna aurreko 2.1.18. proposiziotik ondorioztatzen da. Honako $f\colon V \to W$ aplikazio hau definituko dugu: $i \in I$ guztietarako $f(v_i) := w_i$ baldintza ezarriko dugu, eta balio horiek linealki hedatuko ditugu:

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \qquad \Rightarrow \qquad f(v) := \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n. \tag{2.4}$$

Edozein $v \in V$ bektoreren f bidezko irudia ondo definituta dago, β multzoa V-ren oinarria da eta. Beraz, $f\colon V \to W$ aplikazioa definitu dugu.

Orain, eraikitako f aplikazioa lineala dela ikusteko asmoz, edozein $v, \tilde{v} \in V$ bi bektore hartuko ditugu. Badakigu $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ eskalarrak eta binaka desberdinak diren $v_1, \dots, v_r \in \beta$ bektoreak existituko direla, non $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ den. Antzeko eran, $\mu_1, \dots, \mu_s \in K$ eskalarrak eta binaka desberdinak diren $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_s \in \beta$ bektoreak existituko dira, non $w = \mu_1 \tilde{v}_1 + \ldots + \mu_s \tilde{v}_s$ den.

Orokortasunik galdu gabe, pentsa dezakegu $r = s$ eta, $i = 1, \dots, r$ guztietarako, $v_i = \tilde{v}_i$ betetzen direla. Beraz,

$$\begin{aligned} f(v + \tilde{v}) &= f\big((\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_r + \mu_r)v_r\big) = (\lambda_1 + \mu_1)w_1 + \ldots + (\lambda_r + \mu_r)w_r \\ &= \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_r w_r = f(v) + f(\tilde{v}). \end{aligned}$$

Gainera, edozein eskalar $\lambda \in K$ emanda,

$$f(\lambda v) = f(\lambda\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda\lambda_r v_r) = \lambda\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda\lambda_r w_r = \lambda(\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r) = \lambda f(v)$$

betetzen da. Ondorioz, definitutako f aplikazio lineala da. □

Praktikan, 2.1.19. teorema dimentsio finituko bektore-espazioetan erabiliko dugu. Adibideak ikusi baino lehen, (2.4). ekuazioan erabilitako tresnaren garrantzia azpimarratu nahi dugu. Hor, V-ren oinarri baten bektore bakoitzaren irudia finkatuta, aplikazio lineala sortu dugu, aplikazio linealek bete behar dituzten baldintzak ezarriz. Prozedura horrek *linealki hedatzea* izena du.

2.1.20. Adibidea. Adibide honen helburua izango da $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ itxurako aplikazio lineala zehaztea, $f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ eta $f\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$ baldintzak betetzen dituela jakinik. Ohartu $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ aplikazioaren izate-eremuaren oinarria dela.

Izan bedi $v \in \mathbb{R}^2$ edozein bektore. Orduan, $v = \lambda_1\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) + \lambda_2\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ eran adieraz daiteke. Baldin eta $[v]_\kappa = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ bada (gogoratu, $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ eta $\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ bektoreen koordenatuak oinarri kanonikoareko idatzita daude), orduan $\lambda_1 = \frac{x+y}{2}$ eta $\lambda_2 = \frac{x-y}{2}$ betetzen dira. Beraz, 2.1.19. teoremako (2.4). ekuazioan oinarrituz,

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{x+y}{2}\\\frac{x+y}{2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{x-y}{2}\\\frac{y-x}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x-y}{2}\\y\\\frac{x+y}{2}\end{pmatrix}.$$

Orain, 2.1.11. teorema erabiliz, f injektiboa dela ondoriozta daiteke, baina ez supraiektiboa.

2.2 Aplikazio linealen adierazpen matriziala

2.1.3. adibidean ikusi dugu nola matrize batek aplikazio lineala definitzen duen. Atal honetan, alderantzizko bidea egingo dugu; aplikazio lineal guztiak matrizeen bidez adieraz daitezkeela ikusi, alegia.

2.2.1. Definizioa. Izan bitez V eta W dimentsio finituko K-ren gaineko bi bektore-espazio, $\dim_K(V) = m$ eta $\dim_K(W) = n$ izanik, $f \in \mathcal{L}(V,W)$ aplikazio lineala, $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ eta γ bektore-espazio horien oinarriak, hurrenez hurren. Esango dugu f *aplikazio linealari β eta γ oinarriekiko elkartutako matrizea*

$$M_\gamma^\beta(f) := \begin{pmatrix}\big[f(v_1)\big]_\gamma & \dots & \big[f(v_m)\big]_\gamma\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,m}(K) \tag{2.5}$$

matrizea dela.

(2.5). ekuazioko matrizeko i. zutabean $f(v_i) \in W$ bektorearen γ oinarriarekiko koordenatuak aurkitzen ditugu, $i = 1, \dots, m$ zutabe guztietarako.

2.2.2. Adibidea. Izan bitez V dimentsio finituko K-ren gaineko bektore-espazioa eta $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ eta γ horren bi oinarri. Aipatu dugun bezala, $\mathrm{id}\colon V \to V$ identitatea aplikazio lineala da, eta

$$M_\gamma^\beta(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix}\big[\mathrm{id}(v_1)\big]_\gamma & \dots & \big[\mathrm{id}(v_n)\big]_\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\big[v_1\big]_\gamma & \dots & \big[v_n\big]_\gamma\end{pmatrix} = M_\gamma^\beta$$

dugu. Hau da, identitateari β eta γ oinarriekiko elkartutako matrizea β-tik γ-rako oinarri-aldaketaren matrizea baino ez da. Adibide honek aplikazio lineal bati elkartutako matrize eta oinarrien aldaketaren matrizeen notazioen arteko parekotasuna azaltzen du, $f = \mathrm{id}$ kasuan matrize bera dira eta.

2.2.3. Adibidea. Izan bitez $\kappa = \{e_1, e_2\}$ eta $\beta = \left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ multzoak $\mathbb{R}^2$-ko bi oinarri eta

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2, \\ & \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}2x-y\\x+y\end{pmatrix} \end{array} \qquad \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

aplikazio lineala. Orduan,

$$M_\kappa^\beta(f) = \left(\left[f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]_\kappa \quad \left[f\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]_\kappa\right) = \left(\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]_\kappa \quad \left[\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right]_\kappa\right) = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

eta

$$M_\beta^\kappa(f) = \left([f(e_1)]_\beta \quad [f(e_2)]_\beta\right) = \left(\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_\beta \quad \left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]_\beta\right) \tag{2.6}$$

ditugu. Orain, argi dago azken matrizeko bigarren zutabea zer den,

$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

da eta. Beraz, $[\left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)]_\beta = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\end{smallmatrix}\right)$. Lehenengo zutabea aurkitzeko,

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}2 = \lambda + \mu,\\ 1 = \lambda - \mu\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda = 3/2,\\ \mu = 1/2.\end{cases}$$

(2.6). ekuazioa jarraituz,

$$M_\beta^\kappa(f) = \left(\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]_\beta \quad \left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]_\beta\right) = \begin{pmatrix}3/2 & 0\\ 1/2 & -1\end{pmatrix}$$

dugu. Amaitzeko,

$$M_\kappa^\kappa(f) = \left([f(e_1)]_\kappa \quad [f(e_2)]_\kappa\right) = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},$$

eta

$$M_\beta^\beta(f) = \left([f\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)]_\beta \quad [f\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)]_\beta\right) = \left([\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)]_\beta \quad [\left(\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right)]_\beta\right) = \begin{pmatrix}3/2 & 3/2\\ -1/2 & 3/2\end{pmatrix}$$

ditugu,

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

ditugulako.

2.2.4. Adibidea. Izan bitez $\kappa_4 \subseteq \mathbb{R}^4$ eta $\kappa_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ bektore-espazio horien oinarri kanonikoak, hurrenez hurren, eta kontsidera dezagun

$$\begin{aligned} f\colon \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^2,\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix}x+z+t\\ x+y\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.7}$$

aplikazio lineala. Orduan, $M_{\kappa_2}^{\kappa_4}(f) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ da, eta, bereziki, $v \in \mathbb{R}^4$ guztietarako, $f(v) = M_{\kappa_2}^{\kappa_4}(f)\cdot v$ dugu ((2.7). ekuazioan f aplikazio lineal hori oinarri kanonikoekiko emanda dagoelako).

Hurrengo teorema oinarrizkoa da. Frogapena hasi baino lehen, bere enuntziatua 1.4.3. teoremako enuntziatuarekin konparatu beharko genuke (2.2.2. adibidean oinarrituz).

2.2.5. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko eta dimentsio finituko V eta W bi bektore-espazio, $\beta \subseteq V$ eta $\gamma \subseteq W$ horien bi oinarri, hurrenez hurren, eta $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Orduan, $v \in V$ bektore guztietarako $[f(v)]_\gamma = M_\gamma^\beta(f) \cdot [v]_\beta$ betetzen da.*

Frogapena. Demagun $\dim_K(V) = n$ eta $\dim_K(W) = m$ direla, eta har dezagun $v \in V$ edozein bektore. Finkatu V-ren eta W-ren oinarri bana, $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eta $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\}$, hurrenez hurren. Jo dezagun $[v]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ dela, hau da, $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ betetzen dela, eta $M_\gamma^\beta(f) = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ dugula. Hortaz,

$$\begin{aligned} f(v) &= f\big(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n\big) \overset{\text{f lineala}}{\downarrow} a_1f(v_1) + \ldots + a_nf(v_n) \\ &= a_1\big(b_{11}w_1 + \ldots + b_{m1}w_m\big) + \ldots + a_n\big(b_{1n}w_1 + \ldots + b_{mn}w_m\big) \\ &= \big(a_1b_{11} + \ldots + a_nb_{1n}\big)w_1 + \ldots + \big(a_nb_{mn} + \ldots + a_nb_{mn}\big)w_m \end{aligned}$$

ondorioztatzen da, hau da,

$$[f(v)]_\gamma = \begin{pmatrix} a_1b_{11} + \ldots + a_nb_{1n} \\ \ddots \\ a_nb_{mn} + \ldots + a_nb_{mn} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Baina (2.8). ekuazioan agertzen den K^m-ko bektorea $M_\gamma^\beta(f) \cdot [v]_\beta$ dela erraz egiaztatzen da. Beraz, nahi genuena frogatu dugu. □

Ikus dezagun, ondoren, zein den aplikazio lineal berari elkartutako matrize ezberdinen arteko erlazioa.

2.2.6. Teorema. *Izan bitez V eta W dimentsio finituko bi bektore-espazio, $\beta, \widetilde{\beta} \subseteq V$ bi oinarri, $\gamma, \widetilde{\gamma} \subseteq W$ beste bi oinarri, eta $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Orduan $M_\gamma^\beta(f) = M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\gamma}} \cdot M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\beta}}(f) \cdot M_{\widetilde{\beta}}^{\beta}$ betetzen da.*

Frogapena. Teorema frogatzeko, $M_\gamma^\beta(f)$ eta $M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\gamma}} \cdot M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\beta}}(f) \cdot M_{\widetilde{\beta}}^{\beta}$ matrizeen lehenengo zutabeak zutabe bera direla egiaztatuko dugu. Jarri $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Alde batetik,

$$M_\gamma^\beta(f) \cdot [v_1]_\beta = M_\gamma^\beta(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

biderketa eginez, $M_\gamma^\beta(f)$ matrizearen lehenengo zutabea lortzen da, hau da $M_\gamma^\beta(f) \cdot [v_1]_\beta = [f(v_1)]_\gamma$ dugu. Bestetik,

$$\begin{aligned} \Big(M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\gamma}} \cdot M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\beta}}(f) \cdot M_{\widetilde{\beta}}^{\beta}\Big)[v_1]_\beta &= M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\gamma}} \cdot M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\beta}}(f)\big(M_{\widetilde{\beta}}^{\beta}[v_1]_\beta\big) \\ &\underset{\text{1.4.3. teorema}}{=} M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\gamma}} \cdot M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\beta}}(f) \cdot [v_1]_{\widetilde{\beta}} \underset{\text{2.2.5. teorema}}{=} M_{\widetilde{\gamma}}^{\widetilde{\gamma}} \cdot [f(v_1)]_{\widetilde{\gamma}} \underset{\text{1.4.3. teorema}}{=} [f(v_1)]_\gamma \end{aligned}$$

dugu. Beraz, lehenengo zutabeak zutabe bera dira. Orain, frogapena amaitzeko, v_1 ordez v_i bektoreak erabil ditzakegu, $i = 2, \ldots, n$ guztietarako. □

2.2.7. Oharra. Demagun $f \in \mathcal{L}(V,V)$ eta $\beta, \gamma \subseteq V$ bektore -espazioaren bi oinarri direla. 2.2.6. teoremak dio $M_\beta^\beta(f) = M_\beta^\gamma \cdot M_\gamma^\gamma(f) \cdot M_\gamma^\beta$ berdintza betetzen dela. Gainera, 1.4.6. korolarioan $\left(M_\beta^\gamma\right)^{-1} = M_\gamma^\beta$ berdintza ikusi dugu. Beraz,

$$M_\beta^\beta(f) = \left(M_\gamma^\beta\right)^{-1} \cdot M_\gamma^\gamma(f) \cdot M_\gamma^\beta, \qquad \text{non } M_\gamma^\beta \text{ matrizea alderanzgarria den.} \tag{2.9}$$

2.3.8. teorema frogatzeko, V-tik W-rako aplikazio linealen multzoak bektore-espazio egitura duela egiaztatu behar dugu: oraindik ez baduzue 2.4.1. ariketa egin, egin ezazue.

Honako proposizio honetan, aplikazio lineal bati elkartutako matrizeek betetzen dituzten propietate batzuk batuko ditugu.

2.2.8. Teorema. *Izan bitez V, W, U dimentsio finituko hiru bektore-espazio eta $\beta \subseteq V, \gamma \subseteq W$ eta $\delta \subseteq U$ hiru oinarri. Baldin eta $f, g \in \mathcal{L}(V,W)$ eta $\lambda \in K$ badira, orduan*

$$M_\gamma^\beta(f+g) = M_\gamma^\beta(f) + M_\gamma^\beta(g), \qquad M_\gamma^\beta(\lambda f) = \lambda M_\gamma^\beta(f) \tag{2.10}$$

betetzen dira. Baldin eta $h \in \mathcal{L}(W,U)$ bada, orduan $M_\delta^\beta(h \circ f) = M_\delta^\gamma(h) \cdot M_\gamma^\beta(f)$ betetzen da.

Frogapena. Frogatu ezazue emaitza honetako (2.10). ekuazioko baldintza, ariketa gisa. Orain, $M_\delta^\beta(h \circ f) = M_\delta^\gamma(h) \cdot M_\gamma^\beta(f)$ emaitza egiaztatzeko, $v \in V$ edozein bektore emanda,

$$M_\delta^\beta(h \circ f) \cdot [v]_\beta = M_\delta^\gamma(h) \cdot M_\gamma^\beta(f) \cdot [v]_\beta$$

betetzen dela frogatuko dugu. Hasteko, 2.2.5. teoremak $M_\delta^\beta(h \circ f) \cdot [v]_\beta = [(h \circ f)(v)]_\delta$ dela ziurtatzen du. Era berean,

$$M_\delta^\gamma(h) \cdot M_\gamma^\beta(f) \cdot [v]_\beta = M_\delta^\gamma(h) \cdot [f(v)]_\gamma = [h(f(v))]_\delta = [(h \circ f)(v)]_\delta$$

dugu. □

2.3 Isomorfismo linealak

Dagoeneko, hainbat aplikazio lineal mota ezagutzen ditugu: injektiboak, supraiektiboak eta bijektiboak, adibidez. Atal honetan, aplikazio lineal bijektibo horiei izen berezi bat emango diegu; *isomorfismo*, alegia. Ikusiko dugun bezala, interesgarriak zaizkigun aplikazio mota horiek garrantzi handia dute, espazio bektorialen propietate oro gordetzen baitituzte. Herri-hizkeran, isomorfismoek bektore-espazioak «identifikatzen»dituztela ulertuko dugu.

Segidan datorren emaitzarik garrantzitsuenetako bat aplikazio linealen $\mathcal{L}(V,W)$ bektore-espazioa eta (tamaina egokiko) matrizeen bektore-espazioak isomorfoak direla ikustea izango da. Horrela, $f \in \mathcal{L}(V,W)$ aplikazio lineal bat zehaztea edo, V-ren eta W-ren oinarri bana finkatuz, matrize bat zehaztea baliokideak direla ulertuko dugu.

2.3.1. Definizioa. Bi bektore-espazioren arteko aplikazio lineal bijektibo bati *isomorfismo (lineal)* deritzo. Baldin eta $f\colon V \to W$ isomorfismo lineala existitzen bada, V eta W bektore-espazioak *isomorfoak* direla esaten da, $V \cong W$ ikurraren bidez adierazita.

2.3.2. Proposizioa. *Isomorfoak izatea baliokidetasun-erlazioa da. Izan ere, honako hiru baldintza hauek betetzen dira:*

i. *Edozein V bektore-espaziotarako $V \cong V$.*

ii. *Baldin eta $V \cong W$ bada, orduan $W \cong V$ ere betetzen da.*

iii. *Baldin eta $V \cong W$ eta $W \cong U$ badira, orduan $V \cong U$ ere betetzen da.*

Baldin eta V eta W bi bektore-espazio isomorfoak badira, jadanik ikusi dugu $\dim(V) = \dim(W)$ dela. Alderantzizkoa ere egia da.

2.3.3. Teorema. *Izan bitez V eta W bi bektore-espazio. Orduan, V eta W isomorfoak dira, baldin eta soilik baldin $\dim(V) = \dim(W)$ bada.*

Frogapena. $\boxed{\Rightarrow}$ Izan bitez $f\colon V \to W$ isomorfismo lineala eta $\beta \subseteq V$ oinarri bat. 2.1.11. teoremagatik $f(\beta)$ multzoa W bektore-espazioaren oinarria da. Beraz,

$$\dim(V) = |\beta| = |f(\beta)| = \dim(W)$$

ondorioztatzen dugu.
$\boxed{\Leftarrow}$ Demagun orain $\dim(V) = \dim(W)$ dela, eta har ditzagun V eta W bektore-espazioen $\{v_i\}_{i\in I} \subseteq V$ eta $\{w_i\}_{i\in I} \subseteq W$ oinarri bana. Bi oinarriek kardinalitate bera daukate, hipotesiz. Aurreko 2.1.19. teoremak $f\colon V \to W$ aplikazio lineal baten existentzia ziurtatzen du, non $f(v_i) = w_i$ betetzen den $i \in I$ guztietarako. Baldintza horrek f isomorfismoa izatera behartzen du. Beraz, V eta W bektore-espazioak isomorfoak dira. □

2.3.4. Korolarioa. *Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta n dimentsioko V bektore-espazioa. Orduan, $V \cong K^n$ dugu. Are gehiago, $\beta \subseteq V$ edozein oinarri izanik, $[-]_\beta\colon V \to K^n$ isomorfismoa da.*

Frogapena. 2.3.3. teoremagatik bi bektore-espazioak isomorfoak dira. Badakigu $[-]_\beta\colon V \to K^n$ aplikazio lineala dela. Isomorfismoa dela egiaztatzeko, ohartu supraiektiboa dela: baldin eta $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bada,

$$[v_1]_\beta = e_1, \qquad \ldots \qquad [v_n]_\beta = e_n$$

dugu. Injektiboa dela ikusteko, baldin eta $[v]_\beta = [w]_\beta$ bada (hau da, bi bektoreek β-rekiko koordenatu berak badauzkate), orduan

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = w$$

dugu. Beraz, $[-]_\beta$ aplikazioa isomorfismoa da. □

2.3.5. Adibidea. Adibide honetan, $\mathrm{M}_2(K)$ eta K^4 bektore-espazioak kontsideratuko ditugu, K gorputza izanik. Erraz ikus dezakezue

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bektoreek $\mathrm{M}_2(K)$ bektore-espazioaren oinarri bat sortzen dutela. Beraz, $\dim \mathrm{M}_2(K) = 4 = \dim(K^4)$ berdintza dugu, eta 2.3.3. teoremak iradokitzen digu $\mathrm{M}_2(K)$ eta K^4 espazioak isomorfoak direla. Isomorfismo esplizitu bat eraikitzeko, 2.1.19. teorema erabiliko dugu. Hortaz,

$$f(E_i) := e_i, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, 4$$

baldintzak betetzen dituen aplikazio lineal bakar bat existitzen da, eta 2.1.11. teoremak ziurtatzen digu eraikitako aplikazio lineala isomorfismo lineala dela.

2.3.6. Oharra. Kontuz, V eta W isomorfoak izateak ez du inplikatzen $f\colon V \to W$ aplikazio lineal guztiak isomorfismoak izan behar dutenik. Nabaria da $V \cong V$ dela eta $\mathbf{0}\colon V \to V$ ez dela isomorfismoa.

2.3.7. Oharra. 2.3.3. korolarioak zentzua ematen dio 0.6.24. Oharrean aipatu genuenari: V dimentsio finituko edozein bektore-espaziotan, $[-]_\beta\colon V \to K^n$ isomorfismoa erabili eta gero, bektoreek

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

itxura dute, V eta K^n isomorfoak direlako. Horrek ez du esan nahi, adibidez azken adibidean,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elementua $M_2(K)$-ren bektorea denik. Hau da, E_1 bektorea $M_2(K)$ espazioarena da, eta $f(E_1) = e_1$ bektorea K^4-rena.

2.3.8. Teorema. *Izan bitez V, W bi bektore-espazio,* $\dim(V) = n$ *eta* $\dim(V) = m$ *izanik, eta $\beta \subseteq V$ eta $\gamma \subseteq W$ oinarri bana. Orduan,*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathcal{L}(V,W) & \longrightarrow & M_{m,n}(K) \\ & f & \longmapsto & M_\gamma^\beta(f) \end{array}$$

aplikazioa isomorfismo lineala da.

Frogapena. Hasteko, β eta γ multzoko bektoreei izena emango diegu: $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eta $\gamma = \{w_1, \ldots, w_m\}$. 2.2.8. proposizioan $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$ eta $\varphi(\lambda f) = \lambda\varphi(f)$ betetzen direla frogatu dugu. Beraz, φ aplikazio lineala da. Injektibotasuna ikusteko, ohartu

$$f \in \ker(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad M_\gamma^\beta(f) = 0 \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \quad \Leftrightarrow \quad [f(v_i)]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

dugula. Beraz, $f(v_i)$ bektorearen γ oinarriarekiko koordenatuak zero dira, β oinarriaren bektore guztietarako:

$$f(v_i) = 0w_1 + \ldots + 0w_m = 0, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Hortaz, f aplikazio nulua da; hau da, $\ker(\varphi)$ azpiespazio tribiala da, eta φ injektiboa da.

Aplikazioa supraiektiboa dela ikusteko asmoz, $A \in M_{m,n}(K)$ matrizea emanda, $f \in \mathcal{L}(V,W)$ aplikazioa sortuko dugu, non $\varphi(f) = A$ den. Baldin eta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

bada, nahikoa da

$$f(v_1) := a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m, \qquad \ldots \qquad f(v_n) := a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m$$

finkatzea eta baldintza horiek linealki luzatzea. □

Kasu berezi bat aztertuko dugu jarraian: $\mathcal{L}(V,V)$ aplikazio linealena.

2.3.9. Definizioa. Izan bedi V bektore-espazioa. Esango dugu V-tik V-rako aplikazio lineal bat V-ren *endomorfismo (lineala)* dela, eta V-ren endomorfismo lineal guztien bektore-espazioa $\mathrm{End}_K(V)$ edo $\mathrm{End}\,V$ bidez adieraziko dugu.

Baldin eta $f\colon V \to V$ endomorfismoa isomorfismo lineal bada, orduan *automorfismo (lineal)* deritzo. Automorfismoen multzoa

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}(V) &= \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f \text{ aplikazio lineal bijektiboa}\}\\ &= \{f \in \mathrm{End}(V) \mid \exists g \in \mathrm{End}(V) \text{ non } g\circ f = f\circ g = \mathrm{id} \text{ den}\}.\end{aligned}$$

da. Azken ekuazioan agertzen den $g \in \mathrm{End}(V)$ elementua f-ren alderanzizkoa da. Beraz, f^{-1} ere erabiliko dugu g adierazteko.

2.3.10. Proposizioa. *Izan bitez V dimentsio finituko bektore-espazioa, $\beta \subseteq V$ edozein oinarri eta $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa. Orduan, $f \in \mathrm{GL}(V)$ dago, baldin eta soilik baldin $M_\beta^\beta(f) \in \mathrm{GL}_n(K)$ matrize alderanzgarria bada. Kasu horretan, $M_\beta^\beta(f^{-1}) = \left(M_\beta^\beta(f)\right)^{-1}$ betetzen da.*

Frogapena. Baldin eta f automorfismo lineala bada, orduan f^{-1} existitzen da, eta bereziki $f\circ f^{-1} = \mathrm{id}$ dugu. Beraz,

$$I_n = M_\beta^\beta(\mathrm{id}) = M_\beta^\beta(f\circ f^{-1}) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2.2.8. teorema}}}{=} M_\beta^\beta(f)\cdot M_\beta^\beta(f^{-1}) \quad \text{eta} \quad I_n = M_\beta^\beta(\mathrm{id}) = M_\beta^\beta(f^{-1}\circ f) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2.2.8. teorema}}}{=} M_\beta^\beta(f^{-1})\cdot M_\beta^\beta(f)$$

direnez, argi ikusten da $M_\beta^\beta(f)$ eta $M_\beta^\beta(f^{-1})$ matrizeak bata bestearen alderantzizkoak direla. Hortaz, $M_\beta^\beta(f) \in \mathrm{GL}_n(K)$ dugu, eta bereziki $M_\beta^\beta(f^{-1}) = \left(M_\beta^\beta(f)\right)^{-1}$ betetzen da.

Orain, demagun $M_\beta^\beta(f) \in \mathrm{GL}_n(K)$ matrizea alderanzgarria dela, hau da, $B \in \mathrm{GL}_n(K)$ beste matrize bat existitzen dela non

$$BM_\beta^\beta(f) = I_n = M_\beta^\beta(f)B \tag{2.11}$$

den. Izan bedi $g\colon V \to V$ aplikazio lineala, β-rekiko g-ri elkartutako matrizea B duena. Matrize hori alderanzgarria denez, g automorfismo lineala da. Orain, (2.11). ekuazioarekin jarraituko dugu:

$$I_n = BM_\beta^\beta(f) = M_\beta^\beta(g)M_\beta^\beta(f) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2.2.8. teorema}}}{=} M_\beta^\beta(g\circ f)$$

berdintzara ailegatzen gara, hau da, $M_\beta^\beta(g\circ f) = I_n$ ondorioztatu dugu. Hortaz, $g\circ f$ endomorfismoa identitatea baino ez da; hau da, automorfismo lineala da. Baldintza horrek f supraiektiboa izatera behartzen du. Orain, gauza bera errepikatu dezakegu (2.11). ekuazioko $M_\beta^\beta(f)B = I_n$ baldintzatik, f injektiboa dela ondoriztatzeko, eta amaitu dugu. □

2.4 Ariketak

2.4.1. Ariketa. Izan bitez V eta W bi K-gaineko bektore-espazio. Orduan, $\mathcal{L}(V,W)$ multzoa ere K-gaineko bektore-espazioa da, non batuketa eta eskalar bidezko biderketa honako modu honetan definituta dauden:

$$\begin{array}{rccc} f+g\colon & V & \longrightarrow & W, \\ & v & \longmapsto & f(v)+g(v) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \lambda f\colon & V & \longrightarrow & W, \\ & v & \longmapsto & \lambda\cdot f(v) \end{array} \qquad \forall\, f,g\in\mathcal{L}(V,W),\ \forall\,\lambda\in K.$$

2.4.2. Ariketa. Egiazta ezazu honako aplikazio hauek linealak direla:

i. Traza-funtzioa: $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}_n(K)\to K$, non $\mathrm{tr}(A)=\sum_{i=1}^n a_{ii}$ den.

ii. 0.6.15. Definizioan zehaztutako irauli-funtzioa: $f\colon \mathrm{M}_{n,m}(K)\to \mathrm{M}_{m,n}(K)$, non $f(A)=A^t$ den.

iii. $D\colon \mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ funtzio deribatua, $D(f):=f'$ definiturikoa.

2.4.3. Ariketa. Esan honako aplikazio hauetatik zein diren linealak:

i. $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, non $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x\\x+y\\x-y\end{smallmatrix}\right)$ den.

ii. $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, non $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x^2\\x+y\\x-y\end{smallmatrix}\right)$ den.

iii. $f\colon \mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$, non $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\x-\mathrm{i}z\\\mathrm{i}y\end{smallmatrix}\right)$ den.

iv. $f\colon \mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$, non $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\bar{x}\\y\end{smallmatrix}\right)$ den ($\bar{x}$ zenbakia x-ren konplexu konjugatua izanik; hau da, $\overline{a+\mathrm{i}b}=a-\mathrm{i}b$).

v. $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, non $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x+y+5z\\x-5\end{smallmatrix}\right)$ den.

vi. $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, non $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x+y+5z\\x-5z\end{smallmatrix}\right)$ den.

vii. $\varphi\colon \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, non $\varphi(f)=f\circ g$ den, $g\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ funtzio finkoa eta $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})=\{f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f \text{ funtzioa}\}$ izanik.

2.4.4. Ariketa. Aurkitu honako f aplikazio hauetarako $\ker f$ eta $\mathrm{Im}\, f$ azpiespazioen oinarri bana, eta frogatu espazio hauen arteko dimentsioari buruzko erlazioa:

i. $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, non $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x-y\\x-z\\y-z\end{smallmatrix}\right)$ den.

ii. $f\colon \mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$, non $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x+\mathrm{i}y+(1-\mathrm{i})z\\x+\mathrm{i}z\\x+y-2z\end{smallmatrix}\right)$ den.

2.4.5. Ariketa. Izan bedi $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x+2y+z\\-x-y+z\\x+3y+3z\end{smallmatrix}\right)$ bidez definitutako $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ aplikazio lineala. Aurkitu

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle,\qquad \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mid x-y+2z=0\right\},\qquad \left\langle\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

espazioei dagozkien irudi- eta aurreirudi-espazioak.

2.4.6. Ariketa. Aurkitu, kasu bakoitzean, ezarritako baldintzak betetzen dituen f aplikazio lineal baten formula esplizitua, eta zehaztu f injektiboa, suprajektiboa edo bijektiboa den.

i. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

ii. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\ker f = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x = y = z\}$.

iii. $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, $\ker f = \langle\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\1\end{pmatrix}\rangle$, $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

iv. $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\operatorname{Im} f = \langle\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$.

2.4.7. Ariketa. Existitzen al da $f \in \operatorname{End}\mathbb{R}^3$, non

$$\ker f = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x+y+z=0\} \text{ eta } \operatorname{Im} f = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x-y+z=0\}$$

diren?

2.4.8. Ariketa. Izan bitez V eta V' dimentsio finituko bi K-espazio bektorial eta $W \leqslant V$, $W' \leqslant V'$. Frogatu $f \in L(V,V')$ existitzen dela, non $\ker f = W$ eta $\operatorname{Im} f = W'$ diren, baldin eta soilik baldin $\dim W + \dim W' = \dim V$ bada.

2.4.9. Ariketa. **i.** Izan bitez V eta V' dimentsio finituko bi K-espazio bektorial eta $W \leqslant V$. Frogatu edozein $f \in L(W,V')$ aplikazio lineala V guztitik V'-ra definituta dagoen aplikazio lineal batetara heda daitekeela; hau da, existitzen dela $h \in L(V,V')$, non $h\restriction_W = f$ den. Orokorrean, esan dezakegu h bakarra dela?

ii. Izan bedi $W = \langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle \leqslant \mathbb{R}^3$-ko azpiespazioa eta $f\colon W \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala $f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ eta $f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ bidez definitua. Aurkitu explizituki desberdinak diren $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$-ko bi aplikazio lineal, non horien murrizketa W-ra, f den.

2.4.10. Ariketa. **i.** Izan bitez V espazio bektoriala eta $f \in \operatorname{End} V$. Frogatu $f^2 = 0$ dela, baldin eta soilik baldin $\operatorname{Im} f \leqslant \ker f$ bada.

ii. Aurkitu $f \in \operatorname{End}\mathbb{R}^3$, non $f^2 = 0$ eta $\ker f = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x+y+z=0\}$ diren. Existitzen al da $f \in \operatorname{End}\mathbb{R}^3$, non $f^2 = 0$ eta $\ker f = \langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$ diren?

2.4.11. Ariketa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineala $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x+2y-z\\-x+y\\x-y+z\end{pmatrix}$ bidez definitua. Baldin eta $\kappa \subseteq \mathbb{R}^3$-ko oinarri kanonikoa eta $\beta = \{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3$-ko bektoreez osatutako oinarriak badira, kalkulatu $M_\kappa^\kappa(f)$ eta $M_\beta^\kappa(f)$ matrizeak.

2.4.12. Ariketa. Izan bedi V dimentsio finituko espazio bektoriala eta $f \in \operatorname{End} V$.

i. Baldin eta $\beta \subseteq V$-ren edozein oinarri eta $A = M_\beta^\beta(f)$ badira, zein da, $k \geqslant 1$ guztietarako, f^k aplikazioari elkartutako matrizea β oinarriarekiko? Ondorioztatu $f^k = 0$ dela, baldin eta soilik baldin $A^k = 0$ bada. Noiz lortzen dugu $f^k = 1_V$?

ii. Izan bedi $f \in \operatorname{End}\mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\-x-y\end{pmatrix}$ bidez definitutako aplikazioa. Izan bitez $\kappa \subseteq \mathbb{R}^2$-ko oinarri kanonikoa, $\beta = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$ eta $A = M_\beta^\kappa(f)$. Nahiz eta $f^2 = 0$ den, frogatu $A^2 \neq 0$ dela. Zein azalpen du gertaera horrek, **i.** atalean frogatutakoaren arabera?

2.4.13. Ariketa. Izan bitez $\kappa_4 \subseteq \mathbb{R}^4$ eta $\kappa_3 \subseteq \mathbb{R}^3$-ko oinarri kanonikoak, hurrenez hurren, eta

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{eta} \quad f(e_4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bidez definituta dagoen $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio lineal bat.

i. Kalkulatu $A = M_{\kappa_3}^{\kappa_4}(f)$ matrizea, eta zehaztu $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ esplizituki.

ii. Jarri $\beta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^4$ eta $\gamma = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, eta zehaztu $M_\gamma^\beta(f)$ matrizea.

iii. Aurkitu $\delta \subseteq \mathbb{R}^4$ eta $\eta \subseteq \mathbb{R}^3$ oinarriak, zeinentzat $M_\eta^\delta(f) = QAP$ den,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

izanik.

2.4.14. Ariketa. Izan bitez $\kappa \subseteq \mathbb{R}^3$-ko oinarri kanonikoa eta $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ endomorfismoa, non

$$M_\kappa^\kappa(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

den. Egin honako bi atal hauetan eskatzen dena, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ esplizituki kalkulatu gabe.

i. Kalkulatu $\ker f$-ren eta $\operatorname{Im} f$-ren oinarri bana.

ii. Kalkulatu $\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$ azpiespazioaren f bidezko irudia.

iii. Kalkulatu $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bektorearen f bidezko aurreirudia.

2.4.15. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^3$-ren

$$\beta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad \text{eta} \quad \gamma = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

bi oinarri. Har dezagun honako baldintza hau betetzen duen $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ endomorfismoa:

$$M_\gamma^\beta(f) = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & 3 \\ -9 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Erantzun honako bi galdera hauek, $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ esplizituki kalkulatu gabe.

i. Kalkulatu $\ker f$-ren eta $\operatorname{Im} f$-ren oinarri bana.

ii. Kalkulatu, $\kappa \subseteq \mathbb{R}^3$-ko oinarri kanonikoa izanik, $M_\kappa^\kappa(f)$ matrizea.

iii. Kalkulatu $\ker(f^2 - 1_{\mathbb{R}^3})$-ren eta $\operatorname{Im}(f^2 - 1_{\mathbb{R}^3})$-ren oinarri bana.

2.4.16. Ariketa. 2.3.2. Proposizioa frogatu.

2.4.17. Ariketa. Izan bitez $f\colon V \to W$ aplikazio lineal injektiboa eta $U \leqslant V$ azpiespazioa. Egiazta ezazu $\dim(U) = \dim\big(f(U)\big)$ betetzen dela.

3. kapitulua

Matrizeen propietate nagusiak eta horien aplikazioak

Bigarren kapituluan, V eta$W$ bektore-espazioak emanda eta horien $\beta \subseteq V$ eta $\gamma \subseteq W$ oinarriak finkatuta, $f\colon V \to W$ aplikazio lineal bati $M_\gamma^\beta(f)$ matrizea elkartu diogu. Are gehiago, baldin eta V-ren eta W-ren β eta γ oinarri horiek aldatzen baditugu, oinarri berriekiko elkartutako matrizearekin zer gertatzen den ulertu dugu (ikusi 2.2.6. teorema): $M_\gamma^\beta(f) = M_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\gamma}} \cdot M_{\tilde{\beta}}^{\tilde{\beta}}(f) \cdot M_{\tilde{\beta}}^{\beta}$ berdintza beteko da. Ohartu $M_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\gamma}}$ eta $M_{\tilde{\beta}}^{\beta}$ matrize karratuak alderanzgarriak direla, oinarrien aldaketaren matrizeak dira eta. Beraz, aipatutako baldintza honako era honetan birformula liteke:

$$M_\gamma^\beta(f) = P \cdot M_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\beta}}(f) \cdot Q, \qquad P \in \mathrm{GL}_n(K), \quad Q \in \mathrm{GL}_m(K).$$

Kapitulu honetan, erlazio hori sakonduko dugu, eta, $A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ bi matrize emanda, A eta B matrizeek horrelako baldintza bat noiz betetzen duten karakterizatuko dugu. Hori egiteko, matrizeen *heina*ren nozioa definituko dugu. Horrez gain, matrizeak ekuazio linealetako sistemak ebazteko erabiliko ditugu, eta, azkenik, matrize karratu baten determinantea definituko.

3.1 Matrize baliokideak eta matrizeen heina

3.1.1. Definizioa. Izan bitez $A, B \in M_{n,m}(K)$. Esango dugu A eta B matrizeak *baliokideak* direla, baldin eta $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ eta $Q \in \mathrm{GL}_m(K)$ matrizeak existitzen badira, non $B = P \cdot A \cdot Q$ den. Kasu horretan, $A \sim B$ idatziko dugu.

Aipatu dugun bezala, 2.2.6. teoreman frogatu dugu $M_\gamma^\beta(f)$ eta $M_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{\beta}}(f)$ edozein bi matrize baliokideak direla.

3.1.2. Lema. *Baliokideak izatea $M_{n,m}(K)$-ko matrizeen arteko baliokidetasun-erlazioa da.*

Frogapena. 0.1.7. definizioko baldintzak betetzen direla egiaztatuko dugu. Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$. Erraz ikus dezakegu $A \sim A$ betetzen dela, $A = I_n \cdot A \cdot I_m$ delako.

Horrez gain, $A \sim B$ bada, $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ eta $Q \in \mathrm{GL}_m(K)$ existitzen dira, $B = P \cdot A \cdot Q$ izanik. Horrek esan nahi du, $P^{-1} \in \mathrm{GL}_n(K)$ eta $Q^{-1} \in \mathrm{GL}_m(K)$ direnez, $A = P^{-1} \cdot B \cdot Q^{-1}$ dela; hau da, $B \sim A$ ere betetzen da.

Azkenik, $A \sim B$ eta $B \sim D$ baditugu, orduan $P_a, P_b \in \mathrm{GL}_n(K)$ eta $Q_a, Q_b \in \mathrm{GL}_m(K)$ existitzen dira, non $B = P_a A Q_a$ eta $D = P_b B Q_b$ diren. Orduan, beharrezko ordezkapenak eginez, $D = (P_b P_a) A (Q_a Q_b)$ ondorioztatzen dugu. Hau da, $A \sim D$ dugu, $P_b P_a \in \mathrm{GL}_n(K)$ eta $Q_a Q_b \in \mathrm{GL}_m(K)$ daudelako. □

3.1.3. Definizioa (Matrize baten heina). Izan bedi $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ edozein matrize. Orduan K^m bektore-espazioan A matrizearen n errenkadek sortutako azpiespazioaren dimentsioa A-ren *errenkaden heina* da. Antzeko eran, K^n bektore-espazioan A matrizearen m zutabeek sortutako azpiespazioaren dimentsioa A-ren *zutabeen heina* da.

Errenkaden eta zutabeen heina adierazteko, $\mathrm{rg}_e(A)$ eta $\mathrm{rg}_z(A)$ ikurrak erabiliko ditugu, hurrenez hurren. Honako teorema honetan frogatuko dugun bezala, definitutako bi heinak bat datoz beti.

3.1.4. Teorema. *Izan bedi $A \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ matrizea. Orduan, $\mathrm{rg}_e(A) = \mathrm{rg}_z(A)$ dugu.*

Frogapena. Izan bitez $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ matrizea eta

$$A_i := \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \qquad \forall i = 1, \dots, m \tag{3.1}$$

matrizearen m zutabeak. Era berean, izan bitez

$$B_i := \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{im} \end{pmatrix}, \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

A matrizearen n errenkadak, edo, baliokidea dena, A^t matrizearen n zutabeak.

Demagun $\mathrm{rg}_e(A) = r$ dela. Beraz, $\langle B_1, \dots, B_n \rangle$ azpiespazioaren $\{v_1, \dots, v_r\}$ oinarria existituko da, eta honako osagai hauek izango ditu:

$$v_i = \begin{pmatrix} k_{i1} \\ k_{i2} \\ \vdots \\ k_{im} \end{pmatrix} \in K^m, \qquad \forall i = 1, \dots, r.$$

Hortaz, $i = 1, \dots, n$ eta $j = 1, \dots, r$ indize guztietarako $\lambda_{ij} \in K$ eskalarrak existitzen dira, non

$$B_1 = \lambda_{11} v_1 + \cdots + \lambda_{1r} v_r, \qquad \dots \qquad B_n = \lambda_{n1} v_1 + \cdots + \lambda_{nr} v_r \tag{3.2}$$

betetzen diren. Esplizituagoki, (3.2). ekuazioan

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix} = \lambda_{11} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{1m} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{1r} \begin{pmatrix} k_{r1} \\ k_{r2} \\ \vdots \\ k_{rm} \end{pmatrix},$$

$$\vdots \tag{3.3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \lambda_{n1} \begin{pmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \vdots \\ k_{1m} \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{nr} \begin{pmatrix} k_{r1} \\ k_{r2} \\ \vdots \\ k_{rm} \end{pmatrix}$$

berdintzak ditugu. (3.3). ekuazioko berdintzetatik, honako ekuazio hauek lortzen ditugu:

$$\begin{cases} a_{11} = \lambda_{11}k_{11} + \cdots + \lambda_{1r}k_{r1}, \\ \quad \ddots \\ a_{n1} = \lambda_{n1}k_{11} + \cdots + \lambda_{nr}k_{r1}, \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} a_{1m} = \lambda_{11}k_{1m} + \cdots + \lambda_{1r}k_{rm}, \\ \quad \ddots \\ a_{nm} = \lambda_{n1}k_{1m} + \cdots + \lambda_{nr}k_{rm}, \end{cases}$$

edo, (3.1). ekuazioko adierazpena erabiliz:

$$A_1 = k_{11}\begin{pmatrix}\lambda_{11}\\ \vdots \\ \lambda_{n1}\end{pmatrix} + \cdots + k_{r1}\begin{pmatrix}\lambda_{1r}\\ \vdots \\ \lambda_{nr}\end{pmatrix}, \quad \ldots \quad A_n = k_{1n}\begin{pmatrix}\lambda_{11}\\ \vdots \\ \lambda_{n1}\end{pmatrix} + \cdots + k_{rn}\begin{pmatrix}\lambda_{1r}\\ \vdots \\ \lambda_{nr}\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Hau da, A matrizearen errenkadak

$$w_1 := \begin{pmatrix}\lambda_{11}\\ \vdots \\ \lambda_{n1}\end{pmatrix}, \quad \ldots \quad w_r := \begin{pmatrix}\lambda_{1r}\\ \vdots \\ \lambda_{nr}\end{pmatrix}$$

bektoreen konbinazio linealak dira. Beraz, $\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \leqslant \langle w_1, \ldots, w_r\rangle$ eta, ondorioz,

$$\operatorname{rg}_e(A) = \dim_K\langle A_1, \ldots, A_n\rangle \leqslant \dim_K\langle w_1, \ldots, w_r\rangle \leqslant r = \operatorname{rg}_z(A). \tag{3.5}$$

Orain, argudio bera A^t matrizearekin aplikatuko dugu. Hori egin ondoren, $\operatorname{rg}_e(A^t) \leqslant \operatorname{rg}_z(A^t)$ ondorioztatzen da. Baina, definizioz, A^t matrizearen errenkadak A matrizearen zutabeak dira, eta A^t-ren zutabeak A-ren errenkadak dira. Beraz,

$$\operatorname{rg}_z(A) = \operatorname{rg}_e(A^t) \leqslant \operatorname{rg}_z(A^t) = \operatorname{rg}_e(A)$$

dugu. Hori dela eta, (3.5). ekuazioa gogoratuz, $\operatorname{rg}_z(A) = \operatorname{rg}_e(A)$ betetzen dela ondorioztatu dugu. □

3.1.4. teoremari esker, matrize baten *heina* defini daiteke, $\operatorname{rg}(A)$ zein $\operatorname{rg} A$ adierazita:

$$\operatorname{rg}(A) := \operatorname{rg}_e(A) = \operatorname{rg}_z(A).$$

3.1.5. Proposizioa. *Izan bitez n dimentsioko V bektore-espazioa, β bere oinarria eta $\{u_1, \ldots, u_r\} \subseteq V$ bektoreak. Izan bedi $A = \begin{pmatrix}[u_1]_\beta & \ldots & [u_r]_\beta\end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n,r}(K)$ matrizea, bere i. zutabean u_i bektorearen β oinarriarekiko koordenatuak dituena. Orduan,*

$$\operatorname{rg}(A) = \dim\langle u_1, u_2, \ldots, u_r\rangle.$$

Frogapena. Definizioz, matrize baten heina bere zutabeek sortutako azpiespazioaren heina da (edo, 3.1.4. teoremari esker baliokidea dena, bere errenkadek sortutako azpiespazioaren heina); hau da,

$$\operatorname{rg}(A) = \dim\langle [u_1]_\beta, \ldots, [u_r]_\beta\rangle. \tag{3.6}$$

Gainera, badakigu $[\cdot]_\beta\colon V \to K^n$ isomorfismoa dela (ikusi 2.3.4. korolarioa). Beraz,

$$\dim\langle u_1, \ldots, u_r\rangle = \dim\langle [u_1]_\beta, \ldots, [u_r]_\beta\rangle \tag{3.7}$$

dugu, eta, (3.6). eta (3.7). ekuazioak konparatuz,

$$\operatorname{rg}(A) = \dim\langle [u_1]_\beta, \ldots, [u_r]_\beta\rangle = \dim\langle u_1, \ldots, u_r\rangle$$

ondorioztatuko dugu. □

3.1.6. Definizioa. Izan bitez K-ren gaineko V eta W bektore-espazioak eta $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Esango dugu f *aplikazioaren heina* $\mathrm{Im}(f)$ azpiespazioaren dimentsioa dela, $\mathrm{rg}(f)$ bidez adieraziko duguna. Baliokidea dena, $\mathrm{rg}(f) = \dim_K\big(\mathrm{Im}(f)\big)$ dugu.

Orain, galdera naturala hau da: zein erlazio dago aplikazio lineal baten herinaren eta aplikazio horri elkartutako matrize baten heinaren artean? Espero bezala, balio horiek bat datoz.

3.1.7. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko dimentsio finituko V eta W bektore-espazioak eta $f \in \mathcal{L}(V,W)$ aplikazio lineala. Orduan, $\beta \subseteq V$ eta $\gamma \subseteq W$ edozein oinarri hartuta,* $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(M_\gamma^\beta(f)\big)$ *betetzen da.*

Frogapena.

$$\mathrm{rg}(f) = \dim_K\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \dim_K\langle f(v_1),\dots,f(v_n)\rangle \underset{\text{3.1.5. proposizioa}}{=} \mathrm{rg}\big(M_\gamma^\beta(f)\big).$$

□

Ondorio garrantzitsua da, beraz, aplikazio lineal bati elkartutako matrize guztiek hein bera dutela.

3.1.8. Adibidea. Izan bitez $\beta,\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ espazioaren bi oinarri eta $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, non

$$A = M_\gamma^\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

den. Nabaria denez, $\mathrm{rg}(A) = 2$ da, hirugarren errenkada lehenengo bien batura baita. Beraz, $\mathrm{rg}(f) = 2$. Bestalde,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrizearen heina bat denez (hau da, $\mathrm{rg}(B) = 1 \neq \mathrm{rg}(f)$ denez), B matrizea ez da f-ri elkartutako matrize bat izango, hots, ez dira existitzen $\beta',\gamma' \subseteq \mathbb{R}^3$ espazioaren oinarriak, non $B = M_{\gamma'}^{\beta'}(f)$ den.

3.1.9. Proposizioa. *Izan bitez K-ren gaineko V eta W bektore-espazioak, n eta m dimentsiokoak, hurrenez hurren, eta $f \in \mathcal{L}(V,W)$. Demagun f-ren heina $r = \mathrm{rg}(f)$ dela. Orduan, $\beta \subseteq V$ eta $\gamma \subseteq W$ espazioen oinarriak existitzen dira, non $M_\gamma^\beta(f) = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{m,n}(K)$ betetzen den.*

Frogapena. Kontsidera dezagun $\beta_0 = \{v_1,\dots,v_s\} \subseteq \ker(f)$ nukleoaren oinarri bat, eta luza dezagun $\beta = \{w_1,\dots,w_r,v_1,\dots,v_s\} \subset V$ bektore-espazioaren oinarri bateraino. Badakigu, $i = 1,\dots,s$ guztietarako, $f(v_i) = 0$ betetzen dela. Hortaz, $\mathrm{Im}(f) = \langle f(w_1),\dots,f(w_r),f(v_1),\dots,f(v_s)\rangle = \langle f(w_1),\dots,f(w_r)\rangle$ dugu. Gainera, $r = \mathrm{rg}(f) = \dim\langle f(w_1),\dots,f(w_r)\rangle$ denez, $f(w_1),\dots,f(w_r)$ bektoreak linealki independenteak dira, eta W-ren oinarri batera luza dezakegu $\gamma = \{f(w_1),\dots,f(w_r),u_{r+1},\dots,u_m\}$ (ikusi 1.3.11. teorema). Ez da zaila ikustea $M_\gamma^\beta(f) = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{m,n}(K)$ betetzen dela. □

3.1.2. lema eta 3.1.6. definizioa kontuan izanik, honako hau ondoriozta daiteke: aplikazio lineal bati elkartutako matrize guztiak elkarrekin baliokideak dira. Hurrengo helburua 3.1.11. teorema frogatzea izango da, eta, horretarako honako emaitza hau erabiliko dugu: A matrize bat matrize alderanzgarri batez biderkatzeak ez dio A-ren heinari eragiten.

3.1.10. Lema. *Izan bitez $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, $Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ eta $P \in \mathrm{GL}_m(K)$. Orduan,* $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AQ)$ *berdintzak ditugu.*

Frogapena. Hasteko, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(PA)$ frogatuko dugu. Horretarako, idatzi PA eta A matrizeek definitzen duten $K^n \to K^m$ aplikazio lineala f_{PA} eta f_A bidez, hurrenez hurren. Izan bedi $v \in \ker(f_{PA})$, hau da,

$$f_{PA}(v) = PAv = 0 \in K^m.$$

Badakigunez, P alderanzgarria da, eta, horregatik,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1}PAv = Av,$$

hau da, $v \in \ker(f_A)$. Beraz, $\ker(f_{PA}) \subseteq \ker(f_A)$. Gainera, argi dago $\ker(f_A) \subseteq \ker(f_{PA})$ dela; izan ere, $v \in \ker(f_A)$ bada,

$$f_{PA}(v) = PAv = P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

da. Orduan,

$$\operatorname{rg}(A) + \dim_K\big(\ker(f_A)\big) = n = \operatorname{rg}(PA) + \dim_K\big(\ker(f_{PA})\big),$$

eta $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(PA)$ ondorioztatzen dugu. Amaitzeko, $\operatorname{rg}(AQ) = \operatorname{rg}(A)$ frogatu behar dugu:

$$\operatorname{rg}(AQ) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3.1.4. teorema}}}{=} \operatorname{rg}\big((AQ)^t\big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{0.6.17. lema}}}{=} \operatorname{rg}(Q^tA^t) \overset{\substack{\text{aurreko kasua} \\ \downarrow}}{=} \operatorname{rg}(A^t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3.1.4. teorema}}}{=} \operatorname{rg}(A)$$

eta frogapena amaitu da. □

3.1.11. Teorema. *Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$. Honako propietate hauek betetzen dira:*

- **i.** *Baldin eta $\operatorname{rg}(A) = r$ bada, orduan $A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$;*
- **ii.** *$A \sim B$, baldin eta soilik baldin $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$ bada;*
- **iii.** *baldin eta $m = n$, orduan $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, baldin eta soilik baldin $\operatorname{rg}(A) = n$ bada;*
- **iv.** *izan bedi $f \in \mathcal{L}(V, W)$, $\dim(V) = n$ eta $\dim(W) = m$ izanik. Orduan, B matrizea f-ri elkartutakoa da, baldin eta soilik baldin $\operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(f)$ bada, baldin eta soilik baldin $B \sim D$ bada, non D matrizea f-ri elkatutako beste edozein matrize den.*

Frogapena. Izan bedi

$$\begin{array}{rccll} l_A\colon & K^n & \longrightarrow & K^m, & \\ & v & \longmapsto & Av, & \forall\, v \in K^n \end{array}$$

eran definitutako aplikazio lineala; hau da, $l_A \in \mathcal{L}(K^n, K^m)$. Orduan $A = M_{\kappa_n}^{\kappa_m}(l_A)$ dugu, non κ_i oinarria K^i espazioaren oinarri kanonikoa den, $i = n, m$ indize guztietarako. Ikusitako 3.1.9. proposizioak $\beta \subseteq V$ eta $\gamma \subseteq W$ bi oinarri ematen dizkigu,

$$M_\gamma^\beta(l_A) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m,n}(K) \tag{3.8}$$

baldintza betetzen dutenak. Beste alde batetik, 2.2.6. teoremari esker,

$$M_\gamma^\beta(l_A) = M_\gamma^{\kappa_m} M_{\kappa_m}^{\kappa_n}(l_A) M_{\kappa_n}^\beta = M_\gamma^{\kappa_m} A M_{\kappa_n}^\beta \tag{3.9}$$

betetzen da, $M_\gamma^{\kappa_m}$ eta $M_{\kappa_n}^\beta$ matrize alderanzgarriak izanik. Azken bi (3.8). eta (3.9). ekuazioak batuz gero, 3.1.1. definizioa ikusita, $A \sim \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ lortzen dugu. Beraz, **i.** atala frogatu dugu.

Bigarrenera pasatuko gara orain. Izan bitez $r := \operatorname{rg}(A)$ eta $s := \operatorname{rg}(B)$. Hasteko, $r = s$ bada, frogatu berri dugun **i**. atalagatik

$$A \sim \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim B,$$

hau da, $A \sim B$ dira, baliokide izatea baliokidetasun-erlazioa delako. Demagun orain $A \sim B$. Orduan, lehenengo atala berriro erabiliz,

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim A \sim B \sim \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ondorioztatzen dugu, hau da, $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Orain, 3.1.10. lema erabiliz, $r = s$ dela lortzen dugu.

Hirugarren atala egiaztatzeko asmoz, demagun $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ dela. Baliokidea dena, $l_A \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$ bijektiboa da. Horrek esan nahi du $\operatorname{rg}(A) = \dim_K \operatorname{Im}(l_A) = n$ dela. Beste alde batetik, $\operatorname{rg}(A) = n$ bada, orduan $P, Q \in \mathrm{GL}_n(K)$ bi matrize existitzen dira, non $A = Q \cdot I_n \cdot P$ den. Ondorioz, $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ izango da, Q, I_n eta P matrizeak alderanzgarriak baitira.

Emaitzako azken atala 3.1.7. teoremagatik eta orain frogatu berri ditugun **i.**, **ii.** eta **iii.** puntuengatik betetzen da. □

3.2 Oinarrizko aldaketak eta ekuazio linealetako sistemak matrizeen bidez

Orain matrizeen arteko edo bektore-espazioen sistema sortzaileen arteko oinarrizko aldaketak definituko ditugu. Irakurleek 0.5.3. definizioko sistemen arteko aldaketez gogoratu beharko lukete, bi nozioak alderatzeko.

3.2.1. Proposizioa. *Izan bedi $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ bektore-espazio baten sistema sortzailea. Honako propietate hauek betetzen dira:*

- **i.** *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ bektore-sisteman v_i eta v_j bektoreak elkarrekin trukatzen badira, lortutato bektore multzoa ere V-ren sistema sortzailea da.*
- **ii.** *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ bektore-sisteman v_i bektorearen ordez horren multiplo λv_i ez-nulua jartzen badugu, $\lambda \neq 0$ izanik, lortutako bektore multzoa ere V-ren sistema sortzailea da.*
- **iii.** *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ bektore-sisteman v_i bektorearen ordez bektore hori gehi beste ezberdin baten multiploa jartzen badugu, $v_i + \lambda v_j$, $i \neq j$ izanik, lortutako bektore multzoa ere V-ren sistema sortzailea da.*

Frogapena. Propietate horiek argi dauden arren, formalki egiaztatuko ditugu. Hasteko, $v \in V$ edozein bektore bada eta $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ badugu, bi bektore v_i eta v_j trukatuz gero, $v = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n w_n$ idatz dezakegu, non

$$\mu_k = \begin{cases} \lambda_k, & \text{baldin eta } k \neq i, j \text{ bada,} \\ \lambda_j, & \text{baldin eta } k = i \text{ bada,} \\ \lambda_i, & \text{baldin eta } k = j \text{ bada,} \end{cases} \qquad w_k = \begin{cases} v_k, & \text{baldin eta } k \neq i, j \text{ bada,} \\ v_j, & \text{baldin eta } k = i \text{ bada,} \\ v_i, & \text{baldin eta } k = j \text{ bada} \end{cases}$$

diren. Beraz, lehenengo atala egiaztatu dugu. Orain, bigarren atala frogatzeko asmoz,

$$w_k = \begin{cases} v_k, & \text{baldin eta } k \neq i \text{ bada,} \\ \lambda \cdot v_i, & \text{baldin eta } k = i \text{ bada} \end{cases}$$

bektoreak izatea suposatuko dugu. Baldin eta $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ badugu, orduan $v = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n w_n$ berdintza ere beteko da, non

$$\mu_k = \begin{cases} \lambda_k, & \text{baldin eta } k \neq i \text{ bada,} \\ \lambda^{-1} \cdot \lambda_i, & \text{baldin eta } k = i \text{ bada} \end{cases}$$

diren. Ohartu μ_i ondo definituta dagoela, λ^{-1} eskalarra existitzen baita.

Azken atala egiaztatzeko, demagun $i \neq j$ bi indize desberdin eta $\lambda \neq 0$ eskalarra ditugula, eta jarri

$$w_k = \begin{cases} v_k, & \text{baldin eta } k \neq i \text{ bada,} \\ v_i + \lambda v_j, & \text{baldin eta } k = i \text{ bada.} \end{cases}$$

Baldin eta $v \in V$ edozein bektore bada, $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ izanik, orduan

$$\mu_k = \begin{cases} \lambda_k, & \text{baldin eta } k \neq j \text{ bada,} \\ \lambda_j - \lambda \cdot \lambda_i, & \text{baldin eta } k = j \text{ bada} \end{cases}$$

finkatuz gero,

$$\begin{aligned} &\mu_1 w_1 + \ldots + \mu_n v_n \\ =&\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_i v_i + \ldots + (\mu_j + \lambda \cdot \mu_i) v_j + \ldots + \mu_n v_n \\ =&\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + (\lambda_j - \lambda \cdot \lambda_i + \lambda \cdot \lambda_i) v_j + \ldots + \lambda_n v_n \\ =&\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_j v_j + \ldots + \lambda_n v_n = v \end{aligned}$$

beteko da. Hau da, hirugarren atala ere egiaztatu berri dugu. □

Aurreko hiru propietateak A matrizearen heinarekin aplikatuko ditugu.

3.2.2. Proposizioa. *Izan bedi $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$ matrizea.*

i. *A matrizean bi errenkada (edo zutabe) elkarrekin trukatzen badira, matrizearen heina ez da aldatzen.*

ii. *A matrizean errenkada (edo zutabe) baten ordez horren multiplo ez-nulu bat jartzen badugu, matrizearen heina ez da aldatzen.*

iii. *A matrizean errenkada (edo zutabe) baten ordez errenkada (edo zutabe) hori gehi beste ezberdin bat jartzen badugu, matrizearen heina ez da aldatzen.*

Frogapena. 3.1.4. teorematik eta 3.2.1. proposiziotik ondoriozta daiteke. □

Notazioa. Aurreko sei motatako aldaketei *oinarrizko aldaketa* deritze. Bereziki, honako notazio hauek erabiliko ditugu.

E_I) $A \overset{E_I}{\sim} B$ baldin eta A-ren bi errenkada trukatuz gero, B matrizea lortzen bada.

E_{II}) $A \overset{E_{II}}{\sim} B$ baldin eta A-ren errenkada baten ordez horren multiplo ez-nulu bat jarriz gero, B matrizea lortzen bada.

E_{III}) $A \overset{E_{III}}{\sim} B$ baldin eta A-ren errenkada baten ordez errenkada hori gehi beste errenkada ezberdin baten multiplo ez-nulua jarriz gero, B matrizea lortzen bada.

eta, simetrikoki:

Z_I) $A \overset{Z_I}{\sim} B$ baldin eta A-ren bi zutabe trukatuz gero, B matrizea lortzen bada.

Z_{II}) $A \overset{Z_{II}}{\sim} B$ baldin eta A-ren zutabe baten ordez horren multiplo ez-nulu bat jarriz gero, B matrizea lortzen bada.

Z_{III}) $A \overset{Z_{III}}{\sim} B$ baldin eta A-ren zutabe baten ordez zutabe hori gehi beste zutabe ezberdin baten multiplo ez-nulua jarriz gero, B matrizea lortzen bada.

3.2.3. Adibidea. Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

matrizea. Bere heina kalkulatzeko, oinarrizko aldaketa batzuk aplika ditzakegu, zein heina daukan argi dagoen beste matrize batera ailegatzeko. Honako hau egin dezakegu:

$$A \overset{Z_I}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \overset{E_{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} \overset{Z_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \overset{E_{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beraz, 3.2.2. proposizioaren bidez $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(I_3) = 3$ berdintzara heldu gara.

Honako adibide honetan ikusiko dugun moduan, bat datoz oinarrizko aldaketak A matrize bati aplikatzea eta matrize hori matrize alderanzgarri batzuez biderkatzea. Are gehiago, baliokideak dira matrize bati zutabeetako aldaketak egitea eta matrize hori alderanzgarria den beste matrize batekin eskuinetik biderkatzea. Antzeko eran, baliokideak dira matrize bati errenkadetako aldaketak egitea eta matrize hori alderanzgarria den beste matrize batekin ezkerretik biderkatzea.

Notazioa. Honako enuntziatu hau errazteko asmoz, $\mathrm{GL}_n(K)$-ko hiru matrize mota definituko ditugu orain. Izan bitez $\lambda \in K$ eskalar ez-nulua eta $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ bi indize ezberdin, hau da, $i \neq j$.

i. $E_{i,j}$ matrizea da I_n identitate-matrizean i. eta j. errenkadak trukatuz gero lortzen den matrizea.

ii. $D_i(\lambda)$ matrizea da I_n identitate-matrizean i. errenkada λ eskalarraz biderkatuz gero lortzen den matrizea.

iii. $L_{i,j}(\lambda)$ matrizea da I_n identitate-matrizean j. errenkada idatzi ordez, j. errenkada gehi λ bider i. errenkada idatziz lortzen den matrizea.

3.2.4. Lema. *Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_{n,m}(K)$ bi matrize. Aurreko notazioa jarraituz, honako baieztapenak betetzen dira.*

i. *Baldin eta $A \overset{E_I}{\sim} B$ bada i. eta j. errenkadak trukatuz, orduan $A = E_{i,j} \cdot B$ dugu.*

ii. *Baldin eta $A \overset{Z_I}{\sim} B$ bada i. eta j. zutabeak trukatuz, orduan $A = B \cdot E_{i,j}$ dugu.*

iii. *Baldin eta $A \overset{E_{II}}{\sim} B$ bada, non B-ren i. errenkada A-ren i. errenkada bider λ den, orduan $A = D_i(\lambda)B$ dugu.*

iv. *Baldin eta $A \overset{Z_{II}}{\sim} B$ bada, non B-ren i. zutabea A-ren i. zutabea bider λ den, orduan $A = BD_i(\lambda)$ dugu.*

v. *Baldin eta* $A \overset{E_{III}}{\sim} B$ *bada, non* B*-ren* j*. errenkada* A*-ren* j*. errenkada gehi* λ *bider* i*. errenkada den, orduan* $A = L_{i,j}(\lambda)B$ *dugu.*

vi. *Baldin eta* $A \overset{Z_{III}}{\sim} B$ *bada, non* B*-ren* j*. zutabea* A*-ren* j*. zutabea gehi* λ *bider* i*. errenkada den, orduan* $A = BL_{i,j}(\lambda)$ *dugu.*

Bereziki, $A \overset{\heartsuit}{\sim} B$ *bada, non* $\heartsuit \in \{E_I, E_{II}, E_{III}, Z_I, Z_{II}, Z_{III}\}$ *den, orduan* $A \sim B$ *dugu; hau da,* A *eta* B *matrize baliokideak dira.*

Frogapena. Ikasleek erraz egiazta ditzakete kasu guztiak. □

3.2.5. Adibidea. Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

matrizea. Bere heina kalkulatzeko, oinarrizko aldaketa batzuk aplikatuko ditugu. Aurreko emaitza erabiliz, A matrizearen lehenengo eta hirugarren zutabeak trukatzeko, I_3 identitate-matrizea hartuko dugu eta bere lehenengo eta hirugarren zutabeak trukatuko ditugu (ohartu lortutako matrize hori alderanzgarria dela, bere heina hiru delako). Gero, A matrizea eskuinetik biderkatuko dugu lortutako matrizeaz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \cdot E_{1,3}.$$

Hau da, $A \sim \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ dugu. Orain, lehenengo errenkada $1/2$-z biderkatu nahi dugu. Berriro ere, aurreko emaitza erabiliz, identitate-matrizearen lehenengo zutabea $1/2$ zenbakiaz biderkatu eta ezkerretik aurreko matrizeari biderkatuko diogu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = D_1(1/2) \cdot \big(A \cdot E_{1,3}\big).$$

Lortutako matrizearen bigarren errenkadaren ordez, bigarren errenkada gehi bost bider lehenengo errenkada idatzi nahiko genuke orain. Beraz, aurreko argudio berberak jarraituz, honako eragiketa hau egin behar dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = L_{1,2}(5) \cdot D_1(1/2) \cdot A \cdot E_{1,3}.$$

Gauza bera egingo dugu hirugarren errenkadarekin:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 7 \end{pmatrix} = L_{1,3}(-3) \cdot L_{1,2}(5) \cdot D_1(1/2) \cdot A \cdot E_{1,3},$$

eta hirugarren eta bigarren errenkaden artean:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix} = L_{2,3}(-8) \cdot L_{1,3}(-3) \cdot L_{1,2}(5) \cdot D_1(1/2) \cdot A \cdot E_{1,3}.$$

Amaitzeko,

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{9}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&-9\end{pmatrix}$$

betetzen da, eta

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Horregatik,

$$A=\begin{pmatrix}0&0&2\\2&1&-5\\7&8&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&0&0\\-5&1&2\\3&8&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\-5&1&2\\3&8&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&8&7\end{pmatrix}\sim$$
$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&-9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\sim I_3,$$

eta, bereziki,

$$I_3=\underbrace{L_{3,2}(2)\cdot D_3(-1/9)\cdot L_{2,3}(-8)\cdot L_{1,3}(-3)\cdot L_{1,2}(5)\cdot D_1(1/2)}_{=:P\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}\cdot A\cdot E_{1,3}$$

dugu. Argi dago I_3 matrizearen heina 3 dela, heinaren definizioa erabilita (I_3 identitate-matrizea izatearren). Beraz, $\mathrm{rg}(A)=3$.

Matrizeen heina eta oinarrizko propietateak definitu ostean, ekuazio linealetako sistemak aztertzen jarraituko dugu. Berehala ikusiko dugun moduan, ekuazio linealetako sistema batek matrizeen bidezko adierazpen bat onartzen du. Gainera, sistema horrek soluzioa duen ala ez erabakitzeko, nahikoa izango da aurreko matrize bidezko adierazpenean agertzen diren matrize pare baten heina ezagutzearekin. Azkenik, matrizeen oinarrizko aldaketak ekuazio linealetako sistemari aplikatzean, soluzioen multzoa ez dela aldatzen ere ikusiko dugu.

Dagoeneko 0.3 atalean ikusi dugu ekuazio lineal bat zer den, eta, orain, horiek matrizeen bidez adieraz daitezkeela ohartuko gara. Izan bedi

$$\mathcal{L}\colon\quad\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\quad\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

ekuazio linealetako sistema, zeina $A\cdot X=B$ eran idatzi daitekeen, non

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{m,n}(K),\qquad B=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{m,1}(K),\qquad X:=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{n,1}(K)$$

diren. A matrizeari *sistemaren koefiziente-matrize* deritzo, B matrizeari *gai askeen matrize* deritzo, X matrizeari *ezezagunen matrize* deritzo, eta

$$(A|B):=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}&b_1\\\vdots&\ddots&\vdots\!\vdots&\\a_{m1}&\dots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{m,n+1}(K)$$

matrizeari *sistemaren matrize hedatu/zabaldu* deritzo.

Baldin eta $Av = B$ betetzen bada, non $v \in \mathrm{M}_{n,1}(K)$ bektorea den, orduan v bektorea $\mathcal{L}$-ren *soluzioa* da.

Sistemak soluziorik ez badu, *sistema bateraezina* dela esaten da. Kontrako kasuan, *bateragarria* dela esaten da. Sistema bateragarria bada eta soluzio bakarra badu, sistema *bateragarri determinatua* deitzen da. Bateragarria bada eta soluzio bat baino gehiago badu, sistema *bateragarri indeterminatua* dela esaten da.

Bereziki, B bektorea nulua denean, $\mathcal{L}$ sistema *homogeneoa* deitzen da. Sistema horiek bateragarriak dira, behintzat bektore nulua soluzioa delako.

Rouché Frobenius-en Teorema. *Izan bedi m ekuazio eta n ezezagunetako $AX = B$ ekuazio linealetako sistema. Sistema bateragarria da, baldin eta soilik baldin* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ *betetzen bada.*

Frogapena. Baldin eta sistema bateragarria bada, gutxienez soluzio bat existituko da. Demagun v bektorea sistemaren soluzioa dela. Kasu horretan

$$B = Av = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \ldots + v_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

dugu. Beraz, B bektorea A-ren zutabeek sortutako azpiespazioan dago, eta $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ ondorioztatzen dugu.

Alderantzizko inplikazioa antzekoa da: baldin eta $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ betetzen bada, orduan B bektorea A-ren zutabeek sortutako azpiespazioan dago. Beraz, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ eskalarrak existituko dira, non

$$B = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

den. Hortaz, $v = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ bektorea sistemaren soluzioa izango da; hau da, sistema bateragarria da. □

3.2.6. Teorema. *Izan bedi m ekuazio eta n ezezagunetako $AX = B$ ekuazio linealetako sistema bateragarria. Orduan, $AX = 0$ sistema homogeneoaren soluzioen multzoa* $\ker(l_A)$ *da; beraz, sistema homogeneoaren soluzioen multzoak azpiespazio bektorialaren egitura du. Baldin eta v_0 bektorea $AX = B$ sistemaren soluzioa bada, orduan $AX = B$ sistemaren soluzioen multzoa* $v_0 + \ker(l_A)$ *da.*

Frogapena. Lehenengo propietatea argi dago. Bigarrena egiaztatzeko asmoz, izan bedi v bektorea sistemaren beste soluzio bat. Beraz, $Av = B = Av_0$ dugu, hau da,

$$A(v - v_0) = Av - Av_0 = B - B = 0,$$

eta $v - v_0 \in \ker(l_A)$ dago. Baldintza horrek esan nahi du $v \in v_0 + \ker(l_A)$ dugula. □

3.2.7. Korolarioa. *Izan bitez $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eta $B \in \mathrm{M}_{n,1}(K)$. Honako baieztapen hauek baliokideak dira:*

i. *$AX = B$ ekuazio linealetako sistema bateragarri determinatua da.*

ii. *$AX = 0$ sistema homogeneoak soluzio bakarra du.*

iii. $\mathrm{rg}(A) = n$.

iv. $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Frogapena. i.⇒ ii. Baldin eta sistema bateragarri determinatua bada, orduan, 3.2.6. teoreman oinarrituz, $\ker(l_A) = \{0\}$ dela ondorioztatu dezakegu. Beraz, sistema homogeneoaren soluzio bakarra bektore nulua da.
ii.⇒ iii. 2.1.14. teorema aplikatuz, badakigu

$$n = \dim \ker(l_A) + \dim \mathrm{Im}(l_A) = 0 + \dim \mathrm{Im}(l_A)$$

betetzen dela. Beraz, $n = \dim \mathrm{Im}(l_A) = \mathrm{rg}(l_A) = \mathrm{rg}(A)$ dugu (gogoratu, 3.1.6. definizioan aplikazio baten heina definitu dugu; bere irudiaren dimentsioa da).
iii.⇒ iv. Berehalakoa da.
iv.⇒ i. Matrizea alderanzgarria bada, orduan $A^{-1}AX = A^{-1}B$ berdintzara ailegatzen gara A^{-1} matrizeaz ezkerrean biderkatuz; hau da, $X = A^{-1}B$ dugu, eta hori da soluzio bakarra. □

3.2.8. Oharra. Baldin eta $\mathcal{L}$ ekuazio linealetako sistema bada, honako aldaketa hauek eginez gero, sistemaren soluzioak ez dira aldatuko:

1. Bi ekuazio elkarrekin trukatzea.

2. Ekuazio baten ordez, bere multiplo ez-nulua jartzea.

3. Ekuazio baten ordez, ekuazio hori gehi beste ezberdin bat(en multiploa) jartzea.

Hortaz, $(A|B)$ matrize hedatuan oinarrizko aldaketak errenkadetan soilik eginez gero, matrize hedatu berriari lotutako sistemak eta hasierako sistemak soluzio berdinak dituzte.

3.2.9. Adibidea. Izan bedi honako ekuazio linealetako sistema hau:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Sistemaren matrize hedatua $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ da. Aldaketak errenkadetan soilik eginez,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

matrizera iristen gara. Beraz, argi ikusten da $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 3$ dela; sistema bateragarri determinatua da, eta matrize hedatu horri lotutako sistema honako hau da:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ -3x_3 = -2. \end{cases}$$

Horregatik, soluzioa $x_3 = 2/3$, $x_2 = 1/3$ eta $x_1 = -1/3$ da.

Datozen lerroetan, ekuazio linealetako sistema bat ebazteko metodo bat ikusiko dugu: *Gauss-en ezabapen-metodoa*, alegia.

Gauss-en ezabapen-metodoa:

Izan bedi n ekuazio eta m ezezagun dituen $\mathcal{L}$ ekuazio linealetako sistema. Demagun horren adierazpen matriziala $AX = B$ erakoa dela, eta har dezagun $(A|B) \in \mathrm{M}_{n,m+1}(\mathbb{R})$ matrize hedatua. Orduan, eragiketak aplikatu beharko dizkiogu $(A|B)$ matrizeari, sistemaren soluzioa aurkitzeko:

- $\mathbf{g_1}$) Hartu matrizearen ezker aldean dagoen zutabea, eta osagai guztiak zero badira, jo hurrengora. Mugitu eskuinerantz, zutabeko osagai guztiak zero ez dituen zutabe bat aurkitu arte, eta demagun j. zutabea dela.

- $\mathbf{g_2}$) Zutabe horretako lehen osagaia zero bada, aplikatu matrizeari E_I eragiketa lehen osagaian zero ez den balio bat lortzeko.

- $\mathbf{g_3}$) Erabili matrizean E_{II} eragiketa, j. zutabeko lehen osagaian bat balioa ager dadin, eta deitu osagai horri *pibote*.

- $\mathbf{g_4}$) Erabili matrizean E_{III} eragiketa (behar beste aldiz) j. zutabeko osagai guztiak zero izan daitezen, lehen osagaia, hau da, pibotea izan ezik.

- $\mathbf{g_5}$) Orain, hartu pibote horren behean eta eskuin aldean geratzen den azpimatrizea. Aplikatu azpimatrize horri $\mathbf{g_1}$ eta horren ondorengo pausoak.

Prozesu horretan, ez badago aztertu beharreko zutabe gehiagorik edo ezin badugu nulua ez den osagairik aurkitu, algoritmoa geratuko da. Azkena hartu dugun pibotea azken zutabean badago, orduan $\mathcal{L}$ ekuazio linealetako sistemak ez du soluziorik izango. Bestela, ekuazio linealetako sistemak soluzioa izango du. Gainera, sortu ditugun pibote kopurua ezezagun kopuruarekin bat badator, orduan sistema bateragarri determinatua da, eta pibote kopurua ezezagun kopurua baino txikiagoa bada, berriz, bateragarri indeterminatua.

3.2.10. Adibidea. Har dezagun honako ekuazio lineal hauetako sistema

$$\begin{cases} x - 3z = 1, \\ 2x + 3y + 4z = 17, \\ x + y + 2z = 0, \end{cases}$$

eta deskriba dezagun matrizialki:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 17 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekuazio linealetako sistema horren soluzioak aurkitzeko, aurrez azaldutako Gaussen ebazpen-metodoa erabiliko dugu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 17 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lehen pibotea aurkitu ostean, honako azpimatrize hau hartuko dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ohartu azpimatrize hori ez dela nulua eta gure helburua bigarren lerroko bigarren zutabean dagoen balioa zero bihurtzea izango dela. Orduan, pauso hori burutu eta algoritmoarekin aurrera jarraituko dugu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{E_{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Algoritmoa hemen geratzen da, matrizeak ez baitauka aztertzeko zutabe gehiagorik. Hau da, azken pibotea matrizearen azken errenkadan sortu dugu. Gainera, azken pibotea ez dagoenez matrizearen azken zutabean, sistema bateragarria da. Are gehiago, sortutako pibote kopurua (hiru) eta ezezagun kopurua (hiru) bat datozenez, sistemak soluzio bakarra du. Orduan, kalkula dezagun soluzio hori:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

3.2.11. Adibidea. Har dezagun honako ekuazio lineal hauetako sistema

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Aplika diezaiogun Gaussen ebazpen-metodoa sistema horri:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{E_{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ohartu, sortu dugun azken pibotea matrizearen azken zutabean dagoenez, ekuazio linealetako sistemak ez daukala soluziorik. Izan ere,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

lortzen da, eta, beraz, kontraesan batera iritsi gara.

Azkenik, ikus dezagun infinitu soluzio dituen ekuazio linealetako sistema baten adibidea.

3.2.12. Adibidea. Har dezagun honako ekuazio lineal hauetako sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y + 2z = 5, \\ 3x + 3y + 7z = 19. \end{cases}$$

Orduan

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 7 & 19 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} \overset{E_{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bi pibote sortu ditugu guztira, eta horietan azkena hirugarren zutabean dago (matrizeak, aldiz, lau zutabe ditu). Hortaz, sistema bateragarria da. Gainera, ezezagun kopurua (hiru) pibote kopurua (bi) baino handiagoa denez, sistemak infinitu soluzio izango ditu. Kalkula dezagun bada, sistemaren soluzioaren multzoa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

hau da,

$$\begin{cases} x = -3 - y, \\ z = 4, \\ y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

3.3 Talde simetrikoa

Dagoeneko, 0.3 Atalean talde baten definizioa eman dugu. Atal honetan, talde berezi bat aurkeztuko dugu: *talde simetrikoa*. Horren propietate nagusiak eman eta frogatuko ditugu, eta, horrela, datorren atalean matrize karratu baten determinantea definitu.

3.3.1. Definizioa. Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta $X = \{1, \dots, n\}$ multzoa. Idatz dezagun X multzotik X multzorako aplikazio bijektiboen multzoa S_n bidez. Konbentzioz, $S_0 = \varnothing$ dugu, baina $n \geqslant 1$ bada, S_n multzo hori ez da hutsa, $\mathrm{id}_n \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ aplikazioa non, i elementu guztietarako, $\mathrm{id}_n(i) = i$ den, aplikazio bijektiboa delako.

Bi aplikazio bijektibo $\sigma, \tau \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ baditugu, $\sigma \circ \tau \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ honako era honetan defini dezakegu[1]:

$$\sigma \circ \tau(i) := \sigma\big(\tau(i)\big), \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Berriro, $\sigma \circ \tau$ bijektiboa izango da, hau da, $\sigma \circ \tau \in S_n$. Aplikazio berri hori σ eta τ elementuen *biderkadura* (edo, *konposaketa*) da.

Beste alde batetik, $\sigma \in S_n$ bada (hau da, bijektiboa bada), orduan $\sigma^{-1} \colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ aplikazioa defini dezakegu, σ-ren *alderantzizkoa* deritzona, honako modu honetan:

$$\sigma^{-1}(i) := j \quad \text{baldin eta soilik baldin} \quad \sigma(j) = i.$$

Erraz ikusten da

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{id}_n = \sigma^{-1} \circ \sigma, \qquad \forall\, \sigma \in S_n$$

betetzen dela. Horrela bada, $(S_n, \circ)$ bikoteak talde-egitura du, *n mailako talde simetriko* deritzo, eta S_n taldeko elementuei *permutazio* deritze.

3.3.2. Adibidea. Baldin eta $n = 1$ bada, orduan $S_1 = \{\mathrm{id}\}$ da. Baldin eta $n = 2$ bada, orduan $S_2 = \{\mathrm{id}, \sigma\}$ da, non $\sigma(1) = 2$ eta $\sigma(2) = 1$ diren. Ohartu σ-ren alderantzizko elementua σ bera dela; hau da, $\sigma^{-1} = \sigma$ dugu, $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$ betetzen delako.

Baldin eta $n = 3$ bada, orduan S_3 kardinalitatea sei da. Orokorrean, $|S_n| = n!$ (n faktoriala) da.

[1] Kontuz! $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funtzioen kasuan bezala, $\sigma \circ \tau$ funtzioarekin lehen $\circ$ ikurraren eskuinean agertzen den τ funtzioa aplikatu behar dugu, eta gero σ.

3.3.3. Definizioa. Izan bedi $\tau \in S_n$. Definizioz, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ bi elementu desberdin existitzen badira, non

$$\tau(k) = \begin{cases} j, & k = i \text{ denean,} \\ i, & k = j \text{ denean,} \\ k, & k \notin \{i, j\} \text{ denean} \end{cases}$$

den, orduan τ *transposizioa* edo 2-*zikloa* dela esaten da, eta $\tau = (i\ j)$ idazten da. Orokorrean, binaka desberdinak diren r elementu $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ existitzen badira, non

$$\tau(k) = \begin{cases} i_{j+1} & k = i_j \text{ bada, } \forall\ j = 1 \dots, j-1, \\ i_1 & k = i_r \text{ bada,} \\ k & \forall\ k \notin \{i_1, \dots, i_r\} \end{cases}$$

den, orduan τ aplikazio bijektiboa r-*zikloa* dela esaten da, $\tau = (i_1\ i_2\ \dots\ i_r)$ idatziz. Orokorrean, $\sigma \in S_n$ *zikloa* dela esaten da, existitzen bada r non σ aplikazioa r-zikloa den. Definizioz, $r = 0$ bada, ziklo hori identitatea da.

3.3.4. Adibidea. Har dezagun $(S_3, \circ)$ taldea berriro. Esan dugun bezala, multzoan $3! = 6$ permutazio daude, eta, bereziki, $S_3 = \{\mathrm{id}_3, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ dugu. Hau da, S_3-ko elementu guztiak zikloak dira.

Hasteko, idatzi $X = \{1, 2, 3\}$ eta ohartu $\mathrm{id} = \mathrm{id}_3 \colon X \to X$ identitatea, hau da,

$$\mathrm{id}(1) = 1, \qquad \mathrm{id}(2) = 2, \qquad \mathrm{id}(3) = 3$$

betetzen duen aplikazio bijektiboa S_3 multzoan dagoela. Beste era batean idatzita:

$$1 \overset{\mathrm{id}}{\longmapsto} 1, \qquad 2 \overset{\mathrm{id}}{\longmapsto} 2, \qquad 3 \overset{\mathrm{id}}{\longmapsto} 3.$$

Beste aukera bat da aplikazio bijektiboa izateko 1 elementua finkatzea eta 2 eta 3 elementuak trukatzea. Aplikazio hori τ_1 izendatuko dugu:

$$1 \overset{\tau_1}{\longmapsto} 1, \qquad 2 \overset{\tau_1}{\longmapsto} 3, \qquad 3 \overset{\tau_1}{\longmapsto} 2.$$

Ohartu, aurreko bi aplikazio bijektiboez gain, S_3 taldean ez dagoela beste aplikaziorik 1 elementua finkatzen duenik. Hala ere, X multzoko elementu bat eta bakar bat finkatzen duten beste bi aplikazio bijektibo $X \to X$ daude: batak 2 elementua finkatzen du,

$$1 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 3, \qquad 2 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 2, \qquad 3 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 1,$$

eta besteak 3 elementua finkatzen du:

$$1 \overset{\tau_3}{\longmapsto} 2, \qquad 2 \overset{\tau_3}{\longmapsto} 1, \qquad 3 \overset{\tau_3}{\longmapsto} 3.$$

Amaitzeko, bi aplikazio bijektibo daude, elementurik finkatzen ez dutenak:

$$1 \overset{\rho}{\longmapsto} 2, \quad 2 \overset{\rho}{\longmapsto} 3, \quad 3 \overset{\rho}{\longmapsto} 1; \qquad \text{eta} \qquad 1 \overset{\sigma}{\longmapsto} 3, \quad 2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 1, \quad 3 \overset{\sigma}{\longmapsto} 2.$$

Orduan, $S_3 = \{\mathrm{id}, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \rho, \sigma\}$ dugu, eta, 3.3.3. definizioari begiratuta, S_3-ko elementu guztiak zikloak dira. Kalkulu batzuk egingo ditugu orain. Adibidez, ikus dezagun $\rho = \tau_2 \circ \tau_3$ betetzen dela (gogoratu: lehengo eta behin τ_3 aplikatu/erabili, eta gero τ_2):

$$\begin{array}{l} 1 \overset{\tau_3}{\longmapsto} 2 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 2, \\ 2 \overset{\tau_3}{\longmapsto} 1 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 3, \\ 3 \overset{\tau_3}{\longmapsto} 3 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 1, \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} 1 \overset{\rho}{\longmapsto} 2, \\ 2 \overset{\rho}{\longmapsto} 3, \\ 3 \overset{\rho}{\longmapsto} 1. \end{array} \tag{3.10}$$

Orduan, (3.10). ekuazioan frogatu dugu, edozein $i \in \{1,2,3\}$ zenbakitarako, $\rho(i) = \big(\tau_2 \circ \tau_3\big)(i)$ betetzen dela, hau da, bi funtzioak berberak direla. Era berean, $\sigma = \tau_1 \circ \tau_3$ dela ikus daiteke.

Ikus dezagun, orain, $\rho \circ \sigma$ identitatea dela:

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\rho}{\longmapsto} 2 \overset{\sigma}{\longmapsto} 1, \\ 2 &\overset{\rho}{\longmapsto} 3 \overset{\sigma}{\longmapsto} 2, \\ 3 &\overset{\rho}{\longmapsto} 1 \overset{\sigma}{\longmapsto} 3, \end{aligned}$$

eta $\rho \circ \tau_2 \neq \tau_2 \circ \rho$ dela:

$$\begin{aligned} 1 &\overset{\tau_2}{\longmapsto} 3 \overset{\rho}{\longmapsto} 1, \\ 2 &\overset{\tau_2}{\longmapsto} 2 \overset{\rho}{\longmapsto} 3, \\ 3 &\overset{\tau_2}{\longmapsto} 1 \overset{\rho}{\longmapsto} 2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 &\overset{\rho}{\longmapsto} 2 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 2, \\ 2 &\overset{\rho}{\longmapsto} 3 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 1, \\ 3 &\overset{\rho}{\longmapsto} 1 \overset{\tau_2}{\longmapsto} 3. \end{aligned}$$

Hau da,

$$\rho \circ \tau_2 = \tau_1 \qquad \text{eta} \qquad \tau_2 \circ \rho = \tau_3.$$

Zer gertatzen da $(2\ 1)$ transposizioarekin, orduan? Ba, definizioz, $\tau = (2\ 1)$ honako aplikazio hau da:

$$\tau(1) = 2, \qquad \tau(2) = 1, \qquad \tau(3) = 3,$$

eta, bereziki, $(2\ 1) = (1\ 2)$ betetzen da. Propietate hori orokorragoa da, hau da, $(i_1\ i_2\ \dots\ i_r)$ zikloa bada eta $j \in \{1, \dots, r\}$ bada, orduan

$$(i_1\ i_2\ \dots\ i_r) = (i_j\ i_{j+1}\ \dots\ i_r\ i_1\ \dots\ i_{j-1}).$$

Egiaztatu dugunez, S_3 taldean elementu guztiak zikloak dira.

Oro har, ordea, S_n-ko elementu guztiak ez dira zikloak izango. Adibidez, S_4 taldean $(1\ 2) \circ (3\ 4)$ elementua ez da zikloa. Hala ere, kontuz ibili behar dugu: nahiz eta $(1\ 3) \circ (1\ 2)$ permutazioak ziklo baten itxura ez izan, benetan zikloa da, $\sigma := (1\ 3) \circ (1\ 2)$ permutazioa datorren aplikazioa baita:

$$\sigma(1) = 2, \qquad \sigma(2) = 3, \qquad \sigma(3) = 1.$$

Hau da, $\sigma = (1\ 2\ 3)$ da. Zein da $(1\ 3) \circ (1\ 2)$ eta $(1\ 2) \circ (3\ 4)$ elementuen arteko desberdintasuna?

Notazioa. Hemen, talde simetrikoko elementuak adierazteko beste notazio bat azalduko dugu, komenigarria izan baitaiteke n zenbakia txikia denean, eta baita bi permutazioren konposaketa egiteko garaian ere. Notazio berri horretan, S_n-ko permutazioak *matrizialki* adieraziko ditugu, $2 \times n$ taula baten bidez, eta, hobeto ulertzeko, 3.3.4. adibideko S_3 taldeko elementuak modu horretan adieraziko ditugu. Talde simetriko horren sei elementuak honako modu honetan idatz ditzakegu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beraz, $\tau \in S_n$ permutazioa matrizialki adierazi nahi baldin badugu,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \tau(1) & \tau(2) & \cdots & \tau(n-1) & \tau(n) \end{pmatrix}$$

idatziko dugu.

Adibidez, $(1\ 3\ 2)$ eta $(1\ 3)$ elementuak biderkatu nahi baldin baditugu, era honetan erraz kalkulatu dezakegu emaitza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hau da, $(1\,3\,2)\circ(1\,3)=(1\,2)$. Bereziki, elementu baten irudia ulertzeko, ezkerretik irakurri beharko dugu:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

3.3.5. Lema. *Izan bitez $n\in\mathbb{N}$ eta $\sigma\in S_n$ edozein permutazio. Orduan, σ zikloen biderkadura gisa idatz daiteke.*

Frogapena. Emaitza hori n zenbaki arruntaren gaineko indukzioa erabiliz frogatuko dugu. Hasteko, $n=1$ edo $n=2$ bada, enuntziatua egia da.

Demagun emaitza egia dela $m<n$ guztietarako, eta izan bedi $\sigma\in S_n$ edozein permutazio. Identitatea bada, ez dago ezer frogatzeko, identitatea ziklo hutsa $(\ )$ baita. Orduan, demagun $\sigma\neq \mathrm{id}_n$ dela; hau da, $i\in\{1,\dots,n\}$ existitzen da non $\sigma(i)\neq i$ den, eta hartu

$$\{i,\sigma(i),\underbrace{\sigma\circ\sigma}_{=\sigma^2}(i),\dots,\sigma^s(i),\dots\}_{s\in\mathbb{N}}\subseteq\{1,\dots,n\}.$$

Multzo hori finitua da, $\{1,\dots,n\}$-ren azpimultzoa da eta. Hori dela eta, $\overline{s}\in\mathbb{N}$ existitzen da, non

$$\sigma^s(i)\in S:=\{i,\sigma(i),\dots,\sigma^{\overline{s}}(i)\},\qquad\forall\, s>\overline{s} \tag{3.11}$$

den, eta baldintza hori betetzen duen $\overline{s}$ zenbakirik txikiena hartuko dugu. Horrek ere esan nahi du $\sigma^{\overline{s}+1}(i)=i$ dela. Izan bedi

$$\rho:=\left(i\;\sigma(i)\;\sigma^2(i)\;\dots\;\sigma^{\overline{s}}(i)\right)$$

zikloa, eta hartu $\sigma\circ\rho^{-1}$ permutazioa. Orduan, $j\in S$ bada, $\left(\sigma\circ\rho^{-1}\right)(j)=j$ dugu. Izan ere, $0\leqslant n\leqslant\overline{s}$ guztietarako, $j=\sigma^n(i)$ bada, orduan

$$\rho^{-1}(j)=\begin{cases}\sigma^{n-1}(i), & n\neq 0\text{ denean},\\ \sigma^{\overline{s}}(i), & n=0\text{ denean}.\end{cases}$$

Ondorioz,

$$\sigma\left(\rho^{-1}(j)\right)=\begin{cases}\sigma\left(\sigma^{n-1}(i)\right)=\sigma^{n-1+1}(i)=j, & n\neq 0\text{ denean},\\ \sigma\left(\sigma^{\overline{s}}(i)\right)=\sigma^{\overline{s}+1}(i)=i=j, & n=0\text{ denean}.\end{cases}$$

Hau da, $\sigma\circ\rho^{-1}$ aplikazioa $\{1,\dots,n\}\backslash S$ multzoaren permutazioa da (S-ko elementuetan identitate-aplikazioa baita). Gainera, $S\neq\varnothing$ da, i eta $\sigma(i)\neq i$ elementuak S barruan daudelako. Bereziki, $|\{1,\dots,n\}\backslash S|=\tilde{n}<n$ dugu, eta horrek esan nahi du $\sigma\circ\rho^{-1}$ aplikazioa $S_{\tilde{n}}$-ren elementua dela. Indukzio-hipotesia aplikatuz, $\sigma_1,\dots,\sigma_s$ zikloak existitzen dira, non $\sigma\circ\rho^{-1}=\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_s$ den. Beraz, $\sigma=\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_s\circ\rho$ da, hau da, σ permutazioa zikloen biderkadura gisa idatzi dugu. □

3.3.6. Lema. *Izan bedi $n\in\mathbb{N}$ edozein. Orduan, S_n multzoko edozein ziklo transposizioen biderkadura gisa idatz daiteke.*

Frogapena. Erraz froga daiteke $(i_1\;i_2\;\dots\;i_r)$ edozein ziklo bada, orduan

$$(i_1\;i_2\;\dots\;i_r)=(i_1\;i_r)\circ(i_1\;i_{r-1})\circ\cdots\circ(i_1\;i_3)\circ(i_1\;i_2)$$

dela. □

3.3.7. Teorema. *Izan bedi $n \in \mathbb{N}$ edozein. Orduan, S_n multzoko edozein permutazio transposizioen biderkadura gisa idatz daiteke.*

Frogapena. Erabili 3.3.5. eta 3.3.6. lemak emaitza lortzeko. □

Orain, datorren 3.3.8. teoremaren frogapena liburu honetan ez ematea erabaki dugu. Izan ere, Matematika ikasten ari bazarete, emaitza horren frogapena «Egitura aljebraikoak»izeneko irakasgaian ikusiko duzue. Are gehiago, frogapen hori teknikoa izateaz gain, kalkulu hutsa da; horregatik, une honetan ez liguke jakintza edo ulermen handiagorik emango.

3.3.8. Teorema. *Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta $\sigma \in S_n$. Orduan, σ-ren transposizioetako deskonposizio guztietan transposizioen kopurua beti bakoitia edo beti bikoitia da.*

3.3.9. Definizioa. Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta $\sigma \in S_n$ edozein. Idatzi $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_r$ transposizioen konposaketa bezala (ikusi 3.3.7. teoremari). Esango dugu σ-ren *signatura*, $\operatorname{sig}(\sigma)$ ikurraz idatzita, honako balio hau dela:

$$\operatorname{sig}(\sigma) := (-1)^r$$

Funtzio hori ondo definituta dago, 3.3.8. teoremari esker.

Adibidez, $\operatorname{sig}(\mathrm{id}_n) = (-1)^0 = 1$ da, eta $\tau \in S_n$ edozein transposizio bada, orduan $\operatorname{sig}(\tau) = (-1)^1 = -1$ da.

3.3.10. Adibidea. Jarrai dezagun 3.3.4. adibideko notazioa eta kalkula ditzagun S_3 talde simetrikoan $\operatorname{sig}\colon S_3 \to \{-1, 1\}$ signatura funtzioak har ditzakeen balioa guztiak:

$$\operatorname{sig}(\mathrm{id}) = (-1)^0 = 1, \qquad \operatorname{sig}(\sigma) = \operatorname{sig}(\rho) = (-1)^2 = 1,$$

eta

$$\operatorname{sig}(\tau_1) = \operatorname{sig}(\tau_2) = \operatorname{sig}(\tau_3) = (-1)^1 = -1.$$

3.3.11. Lema. *Signatura-funtzioa biderkakorra da, hau da, $\tau, \sigma \in S_n$ permutazio guztietarako $\operatorname{sig}(\sigma\circ\tau) = \operatorname{sig}(\sigma) \cdot \operatorname{sig}(\tau)$ betetzen da.*

Frogapena. Izan bitz $\sigma, \tau \in S_n$ edozein permutazio eta idatzi ditzagun transposizioen konposaketa modura

$$\sigma = \sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_s, \qquad \tau = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_t$$

Orduan,

$$\begin{aligned} \operatorname{sig}(\sigma \circ \tau) &= \operatorname{sig}\big((\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_s) \circ (\tau_1 \circ \ldots \circ \tau_t)\big) = \operatorname{sig}(\sigma_1 \circ \ldots \circ \sigma_s \circ \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_t) \\ &= (-1)^{s+t} = (-1)^s(-1)^t = \operatorname{sig}(\sigma)\operatorname{sig}(\tau) \end{aligned}$$

betetzen da. □

3.4 Determinantea

Aurreko atalean landutako talde simetriko eta signatura funtzioari esker, matrize karratu baten determinantearen nozioa definituko dugu.

3.4.1. Definizioa. Izan bedi $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ edozein matrize karratu. Esango dugu A-ren *determinantea*, $|A|$, $\det A$ edo $\det(A)$ bidez adieraziko duguna, honako balio hau dela:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sig}(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)} \in K.$$

Hau da, A-ren determinantea K gorputzeko zenbaki batzuk biderkatuz lortzen den K-ko zenbakien konbinazio lineal bat baino ez da, eta batugai bakoitzean agertzen den koefizienteak bat edo minus bat dira.

3.4.2. Oharra. Ohartu $a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} \cdots a_{n\,\sigma(n)}$ batugai bakoitzean A matrizeko errenkada zein zutabe bakoitzeko elementu bat eta bakar bat agertzen dela, σ funtzio bijektiboa delako.

3.4.3. Adibidea. Baldin eta $n = 2$ eta $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ bada, orduan $S_2 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ dugu. Horregatik, $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Hau da, 3.4.1. definizioan zehaztu dugun determinantea jadanik ezaguntzen dugun 2×2 determinantea da.

Baldin eta $n = 3$ eta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

badira, orduan

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

dugu. Berriro, 3×3 matrizetarako ezaguna dugun formula litzateke.

Demagun

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

matrize diagonala dela; orduan, $\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n$ dugu. Bereziki, I_n matrize-identitatea hartuz gero, $\det(I_n) = 1$ dugu.

Determinantearen oinarrizko propietateak honako teorema honetan bilduko ditugu:

3.4.4. Teorema. *Izan bitez $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ edozein matrize karratu; idatzi $A^1, \ldots, A^n$ bidez matrizearen zutabeak, eta $A_1, \ldots, A_n$ bidez matrizearen errenkadak. Orduan:*

i. *A-ren irauliaren determinantea eta A-ren determinantea bat datoz, hau da,* $\det(A^t) = \det(A)$.

ii. *(Determinantea errenkadetan eta zutabeetan aplikazio lineala da) A matrizearen i. errenkada $k \cdot v + k' \cdot v'$ bada, non $k, k' \in K$ eta $v, v' \in \mathrm{M}_{1,n}(K)$ diren, orduan*

$$\det(A) = k \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + k' \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ v' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix},$$

A_i errenkadaren ordez v eta v' bektoreak idatzi ditugu.

Gauza bera gertatzen da A-ren zutabe bat konbinazio lineala bada.

iii. *Demagun $i \neq j$ direla eta A_i eta A_j errenkadak trukatuz lortzen den matrizea B dela; orduan,* $\det(B) = -\det(A)$ *da. Bi zutabe trukatuz gero, gauza bera gertatzen da;*

iv. *A-ren bi errenkada (edo bi zutabe) berdinak badira, orduan* $\det(A) = 0$.

Frogapena. Lau propietateak frogatuko ditugu. Hasteko, $\sigma \in S_n$ bada, orduan $\sigma(i) = j$, baldin eta soilik baldin $i = \sigma^{-1}(j)$. Propietate hori erabiliz,

$$\begin{aligned}\det(A^t) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} a_{\sigma(2)\,2} \dots a_{\sigma(n)\,n} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) a_{1\,\sigma^{-1}(1)} a_{2\,\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma^{-1}) a_{1\,\sigma^{-1}(1)} a_{2\,\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\,\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma^{-1}) a_{1\,\sigma^{-1}(1)} a_{2\,\sigma^{-1}(2)} \dots a_{n\,\sigma^{-1}(n)} \\ &= \det(A).\end{aligned}$$

Demagun orain A-ren i. errenkada

$$\begin{pmatrix} a_{1\,i} & \dots & a_{n\,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kv_1 + k'v'_1 & \dots & kv_n + k'v'_n \end{pmatrix}$$

dela, eta idatzi $v = (v_1, \dots, v_n)$ eta $v' = (v'_1, \dots, v'_n)$ bidez. Orain, 3.4.2. Oharragatik,

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} \dots a_{n\,\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) \big(a_{1\,\sigma(1)} \dots (kv_{\sigma(i)} + k'v'_{\sigma(i)}) \dots a_{n\,\sigma(n)}\big) \\ &= k \cdot \sum_{\sigma\in S_n} \big(\operatorname{sig}(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} \dots v_{\sigma(i)} \dots a_{n\,\sigma(n)}\big) + k' \cdot \sum_{\sigma\in S_n} \big(\operatorname{sig}(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} \dots v'_{\sigma(i)} \dots a_{n\,\sigma(n)}\big) \\ &= k \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ v \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + k' \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ v' \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

A-ren zutabeak A^t-ren errenkadak direnez eta $\det(A) = \det(A^t)$ denez, zutabeekin gauza bera betetzen da.

Izan bedi $B = (b_{i\,j}) \in \mathrm{M}_n(K)$ matrizea, non $B_i = A_j$, $B_j = A_i$ eta $B_k = A_k$ den $k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i, j\}$ zenbaki guztietarako (hau da, B matrizea lortzeko A_i eta A_j errenkadak trukatu ditugu). Izan bedi $\tau \in S_n$ transposizioa, i eta j zenbakiak trukatzen dituena; hau da, $\tau = (i\ j)$. Orduan,

$$b_{i\,\sigma(i)} = a_{i\,\sigma\circ\tau(i)}, \qquad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Gainera, $\sigma \in S_n$ edozein permutazio bada, orduan $\operatorname{sig}(\sigma \circ \tau) = -\operatorname{sig}(\sigma)$. Hori dela eta,

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) b_{1\,\sigma(1)} \dots b_{n\,\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) a_{1\,\sigma\circ\tau(1)} \dots a_{n\,\sigma\circ\tau(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \big(-\operatorname{sig}(\sigma\circ\tau)\big) a_{1\,\sigma\circ\tau(1)} \dots a_{n\,\sigma\circ\tau(n)} = \sum_{\sigma\circ\tau\in S_n} \big(-\operatorname{sig}(\sigma\circ\tau)\big) a_{1\,\sigma\circ\tau(1)} \dots a_{n\,\sigma\circ\tau(n)} \\ &= \sum_{\rho\in S_n} \big(-\operatorname{sig}(\rho)\big) a_{1\,\rho(1)} \dots a_{n\,\rho(n)} = -\sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sig}(\rho) a_{1\,\rho(1)} \dots a_{n\,\rho(n)} = -\det(A).\end{aligned}$$

Zutabeetako emaitza frogatzeko, erabili A-ren zutabeak A^t-ren errenkadak direla.

Bukatzeko, demagun $i \neq j$ balioetarako, A_i eta A_j errenkadak berdinak direla. Azken puntuari esker, $\det(A) = -\det(A)$ bete behar da, hau da, $\det(A) = 0$ da nahitaez. □

Azken teorematik, honako emaitza garrantzitsu hau lortzen da.

3.4.5. Korolarioa. *Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ edozein bi matrize karratu. Orduan,*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Bereziki, $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ bada, orduan $\det(A) \neq 0$ eta $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Frogapena. Izan bedi $A = (a_{ij})$ matrizea eta idatzi $B \in \mathrm{M}_n(K)$ matrizea horren $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$ errenkaden bidez,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}B_1 + \cdots + a_{1n}B_n \\ \ddots \\ a_{n1}B_1 + \cdots + a_{nn}B_n \end{pmatrix}$$

adierazpena lortzeko. Determinantearen linealtasuna azken errenkadari aplikatuz, honako berdintza betetzen da:

$$\det(A \cdot B) = \det \begin{pmatrix} a_{11}B_1 + & \dots & +a_{1n}B_n \\ & \vdots & \\ a_{n-1\,1}B_1 + & \dots & +a_{n-1\,n}B_n \\ & a_{n1}B_1 & \end{pmatrix} + \ldots + \det \begin{pmatrix} a_{11}B_1 + & \dots & +a_{1n}B_n \\ & \vdots & \\ a_{n-1\,1}B_1 + & \dots & +a_{n-1\,n}B_n \\ & a_{nn}B_n & \end{pmatrix}.$$

Determinantearen linealtasuna, beste $n-1$ errenkadetan aplikatuz jarraituko dugu, eta gogoratu 3.4.4. teoremak bi errenkada berdinak dauzkan matrize baten determinantea zero dela dioskula. Hau da,

$$\det(A \cdot B) = \sum_{\sigma \in S_n} \det \begin{pmatrix} a_{1\sigma(1)}B_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{n\sigma(n)}B_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Koefizienteak ateraz gero,

$$\det(A \cdot B) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \det \begin{pmatrix} B_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ B_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

Orain, $\mathrm{sig}(\sigma)^2 = 1$ beti betetzen denez, azken ekuazioa era honetan idatz genezake:

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}\right) \cdot \underbrace{\mathrm{sig}(\sigma) \det \begin{pmatrix} B_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ B_{\sigma(n)} \end{pmatrix}}_{=\det(B)} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \right) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B). \end{aligned}$$

Bereziki, $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ bada, orduan A-ren alderantzizko matrizea existitzen da, A^{-1} idazten duguna. Orain,

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

denez, $\det(A) \neq 0$ eta $\det(A^{-1}) \neq 0$ direla ondorioztatzen dugu. Gainera,

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})}$$

beteko da, edo, beste era batean idatzita, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ izango dugu beti. □

Are gehiago, determinantea matrize karratu alderanzgarriak karakterizatzeko erabil daiteke.

3.4.6. Teorema. *Izan bedi $A \in \mathrm{M}_n(K)$ edozein matrize karratu. Orduan, $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ da, baldin eta soilik baldin $\det(A) \neq 0$ bada.*

Frogapena. Alde batetik, baldin eta $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ bada, 3.4.5. korolarioan $\det(A) \neq 0$ dela egiaztatu dugu. Beste alde batetik, $A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ suposatuz gero, A-ren errenkada bat badago, gainerako A-ren errenkaden konbinazio lineala dena. Hau da, $i \in \{1, \ldots, n\}$ existitzen da, non

$$A_i \in \langle A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n \rangle$$

den. Ondorioz, $\lambda_1, \ldots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots \lambda_n \in K$ eskalarrak existitzen dira, non

$$A_i = \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_{i-1} A_{i-1} + \lambda_{i+1} A_{i+1} + \ldots + \lambda_n A_n$$

den, eta

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_{i-1} \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \lambda_{i+1} \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \cdot \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0,$$

da, aurreko adireazpenean agertzen diren determinante guztiak zero baitira (ikusi 3.4.4. teorema). □

3.4.7. Definizioa. Baldin eta $A \in \mathrm{M}_{m,n}(K)$, $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots, m\}$ eta $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}$ badira, esango dugu honako matrize hau A-ren *azpimatrize* bat dela:

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \ldots & a_{i_r j_s} \end{pmatrix}.$$

Hau da, A matrizearen *azpimatrizea* A-tik sortutako matrize bat da, A-ren errenkada edota zutabe batzuk ezabatuz lortzen dena. Gainera, A matrizearen azpimatrize karratu baten determinanteari *minore* deritzogu. Baldin eta $A \in \mathrm{M}_n(K)$ bada, M_{ij} bidez A matrizetik i. errenkada eta j. zutabea kenduz lortzen den $(n-1) \times (n-1)$ ordenako azpimatrizea idatziko dugu.

Adibidez,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad M_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix},$$

eta

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad M_{22} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Baldin eta $A \in \mathrm{M}_n(K)$ matrizea badugu, A-ren *matrize adjuntua*

$$A_{ij} := \left((-1)^{i+j} \det M_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det M_{11} & (-1)^{1+2} \det M_{12} & \cdots & (-1)^{1+n} \det M_{1n} \\ (-1)^{2+1} \det M_{21} & (-1)^{2+2} \det M_{22} & \cdots & (-1)^{2+n} \det M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det M_{n1} & (-1)^{n+2} \det M_{n2} & \cdots & (-1)^{n+n} \det M_{nn} \end{pmatrix}$$

matrizea da. Aurreko matrizean, $(-1)^{i+j} \det M_{ij}$ bakoitzari a_{ij} elementuaren *adjuntu* deritzo. Amaitzeko, A matrizearen *adjuntu iraulia* $\operatorname{adj}(A) := A^t_{ij}$ da, hau da, matrize adjuntuaren iraulia.

3.4.8. Teorema. *Matrize baten heina bere azpimatrize karratu alderanzgarrien arteko dimentsio maximoa da. Hau da,* $\operatorname{rg}(A) = r$ *da, baldin eta soilik baldin* r *dimentsioko azpimatrize alderanzgarri bat existitzen bada eta* $r+1$ *dimentsioko azpimatrize guztiak ez badira alderanzgarriak.*

Frogapena. Frogapena 3.1.4. teoreman oinarrituta dago, eta bi desberdintzak egiaztatuko ditugu.

Izan bedi r enuntziatuan agertzen den azpimatrize alderanzgarri maximalaren tamaina. Argi dago $r \leqslant \operatorname{rg}(A)$ betetzen dela, azpimatrize horren zutabeak linealki independenteak baitira, eta, beraz, azpimatrizeko zutabe horiek A matrizearen r zutabe linealki independente ematen dizkigute.

Orain, demagun $\operatorname{rg}(A) \gneqq r$ dela. Horrela bada, A-ren $r+1$ zutabe linealki independente existituko dira. Bereziki, zutabe horiek $r+1$ dimentsioko A-ren azpimatrize alderanzgarri bat emango digute, eta kontraesan batera ailegatu gara. □

Definitutako nozioak matrize baten determinantea kalkulatzeko lagungarriak izan daitezke, baita matrize alderanzgarri baten alderantzizkoa sortzeko ere.

3.4.9. Proposizioa. *Izan bitez* $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $A \in \mathrm{M}_n(K)$*matrize karratua eta* $i \in \{1,\dots,n\}$ *edozein. Orduan, honako* adjuntu hauen hedapena *i.* errenkadarako garatuz,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det A_{ij}$$

betetzen da. Era berean, edozein $j \in \{1,\dots,n\}$ *bada, orduan* adjuntuen hedapena *j.* zutabea garatuz

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det A_{ij}$$

betetzen da.

Frogapena. Orokortasunik galdu gabe, emaitza *j.* zutaberako frogatuko dugu, $j \in \{1,\dots,n\}$ indize finko bat izanik. 3.4.1. definizioari erreparatuz, $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$ da, eta j balioa finkatu dugunez, batugai horretan $a_{i,j}$ itxurako balioak lortuko ditugu, baldin eta soilik baldin $\sigma \in S_n$ permutazioak $\sigma(i) = j$ betetzen badu. Horrela bada,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & j & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

dugu. Gainera, σ permutazioaren eremua $\{1,\dots,n\}\backslash\{i\} = \{1,\dots,i-1\} \cup \{i+1,\dots,n\}$ eta koeremua $\{1,\dots,n\}\backslash\{j\} = \{1,\dots,j-1\} \cup \{j+1,\dots,n\}$ honako multzo honekin $\{1,\dots,n-1\}$ n identifikatzen baditugu, orduan σ permutazioa S_{n-1}-eko elementu gisa har dezakegu, eta permutazio horri ρ deituko diogu (nolabait σ-ren S_{n-1}-erako murrizketa gisa ulertuko dugu). Are gehiago, ohartu S_{n-1} eta $\{\sigma \in$

$S_n \mid \sigma(i) = j\}$ multzoak bijekzioan daudela. Izan ere, $\sigma \in \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = j\}$ bada, $\rho \in S_{n-1}$ eraikitzeko, hartu $\heartsuit_j = (n\, n-1 \ldots j)$ zikloa eta jarri

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ \heartsuit_j \circ \sigma(1) & \heartsuit_j \circ \sigma(2) & \ldots & \heartsuit_j \circ \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Alderantziz, har dezagun $\rho \in S_{n-1}$ permutazioa eta eraiki dezagun $\sigma \in \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = j\}$. Hasteko, definitu

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ \heartsuit_j \circ \rho(1) & \heartsuit_j \circ \rho(2) & \ldots & \heartsuit_j \circ \rho(n-1) & n \end{pmatrix}.$$

Orduan, $\sigma' \circ \heartsuit_i \in S_n$ permutazioa $\{1, \ldots n\} \backslash \{i\}$ multzora murriztuz, $\sigma' \circ \heartsuit_i = \heartsuit_j \circ \rho$ berdintza betetzen da. Jarri $\sigma = \heartsuit_j^{-1} \circ \rho' \circ \heartsuit_i$, non $\heartsuit_j^{-1} = (n\, n-1 \ldots j)^{-1} = (j\, j+1 \ldots n)$ zikloa den. Orduan,

$$\sigma = (j\, j+1 \ldots n) \circ \rho' \circ (n\, n-1 \ldots i)$$

berdintzara ailegatzen gara, eta $\sigma \in \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = j\}$ da. Gogoratu, 3.3.6. lemako frogapenari esker,

$$\operatorname{sig}(\sigma) = \operatorname{sig}\Big((j\, j+1 \ldots n) \circ \rho' \circ (n\, n-1 \ldots i)\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3.3.11. lema}}}{=} (-1)^{j-1} \cdot \operatorname{sig}(\rho') \cdot (-1)^{i-1} \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{sig}(\rho') = \operatorname{sig}(\rho)}}{=} (-1)^{i+j} \operatorname{sig}(\rho).$$

Amaitzeko,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) = j}} \operatorname{sig}(\sigma) a_{1\,\sigma(1)} \ldots a_{n\,\sigma(n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\rho \in S_{n-1}} (-1)^{i+j} \operatorname{sig}(\rho) a_{i\,j} \big(a_{1\,\rho(1)} \ldots a_{i-1\,\rho(i-1)} a_{i+1\,\rho(i+1)} \ldots a_{n\,\rho(n)}\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i\,j} \sum_{\rho \in S_{n-1}} \operatorname{sig}(\rho) a_{1\,\rho(1)} \ldots a_{i-1\,\rho(i-1)} a_{i+1\,\rho(i+1)} \ldots a_{n\,\rho(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i\,j} \det M_{i\,j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i\,j} \det A_{i,j} \end{aligned}$$

dugu. □

Matrize karratu baten alderantzizko matrizea aurkitzeko, formula hau dugu:

3.4.10. Proposizioa. *Baldin eta $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ bada, orduan $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ betetzen da. Beste era batean esanda, baldin eta $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ matrize alderanzgarria bada, orduan $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$.*

Frogapena. Bigarren berdintza egiaztatuko dugu. Notazioa finkatzeko, izan bitez

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \ldots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \ldots & a_{n\,n} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} b_{1\,1} & \ldots & b_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n\,1} & \ldots & b_{n\,n} \end{pmatrix}.$$

Badakigu $\operatorname{adj}(A) = D^t$ adjuntuen matrizearen iraulia dela. Beraz, $b_{i\,j} = (-1)^{i+j} \det M_{j\,i}$ dugu. Izan bedi $A \cdot \operatorname{adj}(A) = (f_{i\,j}) \in \mathrm{M}_n(K)$. Egiaztatu nahi duguna da $f_{i\,i} = \det(A)$ eta $f_{i\,j} = 0$ indize desberdin i, j guztietarako betetzen dela. Orokorrean

$$f_{i\,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i\,k} b_{k\,j} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{i\,k} \det M_{j\,k} \tag{3.12}$$

betetzen da. Baldin eta $i = j$ badugu, (3.12). ekuaziotik $f_{ii} = \det(A)$ berdintza ondorioztatzen dugu, 3.4.9. proposizioa erabiliz. Horrez gain, baldin eta $i \neq j$ badugu, orduan (3.12). ekuaziotik $f_{ij} = \det(A')$ berdintzara ailegatzen gara, non A' matrizea A-tik i. zutabe j. zutabearekin ordezkatuz lortzen den. Baina matrize horretan bi zutabe berdin daude, eta, beraz, $\det(A') = 0$. Beraz

$$A \cdot \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{pmatrix}$$

dugu, frogatu nahi genuen bezala. □

Honako emaitza hau enuntziatzeko, notazio honek lagunduko digu: $A \in \mathrm{M}_n(K)$ matrize karratua eta $B \in M_{n,1}(K)$ bektorea emanda, $A_{i\leftarrow B}$ matrizea lortzen da, A-ren i. zutabearen ordez B bektorea idatziz. Adibidez,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ \sqrt{2} & \pi & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

izanez gero,

$$A_{1\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & \pi & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_{3\leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ \sqrt{2} & \pi & 0 \end{pmatrix}$$

izango ditugu.

3.4.11. Teorema (**Cramer-ren erregela).** *Demagun n ekuazio linealetako eta n ezezagunetako sistemaren adierazpen matriziala $AX = B$ dela. Baldin eta $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ badago, orduan sistema bateragarri determinatua da, eta soluzioa honako era honetan kalkulatzen da:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad non \quad x_i = \frac{\det(A_{i\leftarrow B})}{\det(A)} \quad den \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

Frogapena. Sistema bateragarri determinatua da A matrizea alderanzgarria delako (3.2.7. korolarioan ikusitako emaitza).

Emaitza $i = 1$ indizerako frogatuko dugu; $i \neq 1$ kasua antzeko moduan egiten baita. Badakigu A matrizea alderanzgarria dela. Beraz, $AX = B$ sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

eran idatzi dezakegu. Ohartu x_1 elementua

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

matrizearen determinantea dela. Are gehiago, azken matrizearen bigarren zutabea A^{-1} bider A-ren bigarren zutabea da, eta orokorrean $j \neq 1$ denean, azken matrizearen j. zutabea A^{-1} bider A-ren j. zutabea da. Beraz, (3.13). ekuaziotik

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot A_{1 \leftarrow B}$$

ondorioztatzen dugu. Hortaz, determinante-funtzioa aplikatuz,

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ x_n & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \det\left(A^{-1} \cdot A_{1 \leftarrow B}\right) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A_{1 \leftarrow B}) = \frac{\det(A_{1 \leftarrow B})}{\det(A)}$$

dugu. □

3.4.12. Adibidea. Ebatz dezagun honako ekuazio lineal hauetako sistema Cramer-ren erregela erabiliz:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 9, \\ -2x - 3z = -6, \\ 4x - 10y + 9z = 12. \end{cases}$$

Aurreko sistema era matrizialean idatzita honako hau da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & -10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Kasu honetan, Cramer-ren erregela aplikatu dezakegu, ezezagunen eta ekuazioen kopurua berdina baita eta $\det(A) = -8 \neq 0$ baita. Beraz, sistemaren soluzioa honako hau da:

$$x = \frac{1}{-8} \det \begin{pmatrix} 9 & -3 & 2 \\ -6 & 0 & -3 \\ 12 & -10 & 9 \end{pmatrix} = \frac{51}{2}, \qquad y = \frac{1}{-8} \det \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \\ 4 & 12 & 9 \end{pmatrix} = -\frac{9}{2}$$

eta

$$z = \frac{1}{-8} \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & -10 & 12 \end{pmatrix} = -15.$$

3.5 Ariketak

3.5.1. Ariketa. Izan bedi $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ honako aplikazio lineal hau:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-y-z \\ y+2z+t \\ 2x-y+t \end{pmatrix}, \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

i. Kalkulatu aplikazioaren heina.

ii. Zehaztu $\beta \subseteq \mathbb{R}^4$ eta $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ bi oinarri, $M_\gamma^\beta(f) = \left(\begin{smallmatrix} I_{\mathrm{rg}(f)} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ izan dadin.

iii. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ matrizea f-ri elkartutako matrizea izan al daiteke?

3.5.2. Ariketa. Izan bedi honako era honetan definituta dagoen $\mathbb{R}^3$ bektore-espazioaren f endomorfismoa:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-2y+2z \\ -x+3y-z \\ x+4z \end{pmatrix}, \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

i. Aurkitu $\mathbb{R}^3$-ren bi oinarri, f-ri elkartutako matrizea $\left(\begin{smallmatrix} I_{\mathrm{rg}(f)} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ izan dadin.

ii. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ matrizea f-ri elkartutako matrizea izan al daiteke?

iii. $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ matrizea f-ri elkartutako matrizea izan al daiteke?

iv. Existitzen al da $\mathbb{R}^3$-ren β oinarria, $M_\beta^\beta(f) = A$ betetzen duena? (Laguntza: honelako oinarriren bat balego, zer esanahi izango luke A matrizearen lehenengo zutabeak?

3.5.3. Ariketa. Definizioa eta oinarrizko aldaketak erabiliz soilik, kalkulatu honako matrize hauen heinak:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aurreko kasuetako bakoitzean Q eta P bi matrize alderanzgarri aurkitu non, aurrerago aipatutako matrizeez modu egokian biderkatuz, $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ motako matrizea lortzen den.

3.5.4. Ariketa. Aurkitu $P, Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ bi matrize, non $Q^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ den,

$$A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 0 \\ i & -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$$

izanik. Existitzen al dira $P', Q' \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ bi matrize $Q'^{-1}AP' = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ izanik? Eta $Q'^{-1}AP' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ izanik?

3.5.5. Ariketa. Oinarrizko aldaketak erabiliz, frogatu honako matrize hauek alderanzgarriak direla, eta kalkulatu haien alderantzizko matrizeak:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5.6. Ariketa. Izan bedi $f\colon V \to V$ dimentsio finituko bektore-espazio baten endomorfismoa.

Frogatu $M_\beta^\beta(f)$ erako matrize guztien determinantearen balioa berdina dela. Balio komun horri f-ren determinante deritzo, eta $\det(f)$ adieraziko dugu. β eta $\widetilde{\beta}$ V-ren edozein bi oinarri desberdin badira, $M_\beta^{\widetilde{\beta}}(f)$ matrizeen determinantearen balioa berdina al da?

3.5.7. Ariketa. Kalkulatu honako determinante hauek:

$$\det \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}, \qquad \det \begin{pmatrix} a+b & b & b & \dots & b \\ a & a+b & b & \dots & b \\ a & a & a+b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a+b \end{pmatrix},$$

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & b & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & b & \dots & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad (2n \times 2n).$$

3.5.8. Ariketa. Zein dira I_n matrizearen matrize baliokideak?

3.5.9. Ariketa. Baldin eta A matrizea alderanzgarria bada, $AX = B$ motako edozein sistema bateragarri determinatua al da?

4. kapitulua

Endomorfismoen diagonalizazioa

Izan bedi V dimentsio finituko K-gaineko bektore-espazioa. Kapitulu honen helburua $f\colon V \to V$ erako aplikazio linealak aztertzea izango da, hau da, V-ren endomorfismoak aztertzea.

Dagoeneko ikusi dugu, V-ren β oinarri bat finkatzen badugu, $f\colon V \to V$ aplikazio lineala $M_\beta^\beta(f)$ matrizearen bidez deskribatu dezakegula. Noski, V-ren β' beste oinarri bat hartuz gero, f aplikazio lineal berbera deskribatzeko $M_{\beta'}^{\beta'}(f)$ matrizea erabiliko genuke. Gogoratu aurreko bi matrize horiek honako era honetan erlazionatuta daudela (ikusi 2.2.6. teorema):

$$M_\beta^\beta(f) = M_\beta^{\beta'} \cdot M_{\beta'}^{\beta'}(f) \cdot M_{\beta'}^{\beta}. \tag{4.1}$$

Gai honen, eta orokorrago, aljebra linealaren helburu nagusietako bat da f-ri elkartuta dauden matrizeen artean, «ahalik eta sinpleena» dena lortzea. Hemen, «ahalik eta sinpleena» esaten dugunean, ahalik eta zero gehien dituen matrizea esan nahi dugu. Horrelakoak dira, hain zuzen ere, *matrize diagonalak*; diagonal nagusitik kanpoko balio guztiak nuluak dituztenak, alegia. Horrela bada, kapitulu honetan, bi helburu nagusi izango ditugu:

- V-ren f endomorfismo bat emanda, erabaki ea V-ren β oinarririk existitzen den, non $M_\beta^\beta(f)$ matrize diagonala den.
- Aurreko V-ren β oinarria existitzen bada, matrize diagonal hori eta β lortzea.

Has gaitezen gai honetan zehar erabiliko dugun notazioa finkatzen.

Notazioa. Kapitulu honen amaiera arte, V dimentsio finituko K-gaineko bektore-espazioa da, eta $n = \dim V$ ipiniko dugu. Izan bitez $\beta \subseteq V$ oinarria eta V-ren $f\colon V \to V$ endomorfismoa. Hemendik aurrera $M_\beta^\beta(f)$ matrizea (hau da, β eta β oinarriekiko f-ri elkartutako matrizea) $M_\beta(f)$ ikurraren bidez adieraziko dugu. Era berean, M_β ikurrak M_β^β matrizea adieraziko du, hots, β-tik β-rako oinarri-aldaketaren matrizea.

4.0.1. Definizioa. Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ bi matrize. Esango dugu A eta B matrizeak *antzekoak* direla baldin eta existitzen bada $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ matrizea non $A = P^{-1}BP$ den.

Hortaz, (4.1). ekuaziotik V bektore-espazioaren $f\colon V \to V$ endomorfismo bati elkartutako matrizeak antzekoak direla ondorioztatzen dugu, non $P = M_{\beta'}^\beta$ den. Antzekoak diren matrizeek honako propietate hau betetzen dute.

4.0.2. Lema. *Antzekoak diren edozein bi matrizek determinante bera dute.*

Frogapena. Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ antzekoak diren bi matrize. Orduan, existitzen da $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ matrizea, non $A = P^{-1}BP$ den. Beraz, 3.4.5. teorema erabiliz,

$$\det(A) = \det\left(P^{-1}BP\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det(B)\det(P) = \left(\det(P)\right)^{-1}\det(B)\det(P)$$

lortuko dugu. Hau da, $\det(A) = \det(B)$. □

4.1 Balio eta bektore propioak

Kapitulu honen hasieran esan dugu V bektore-espazio baten β oinarri bat finkatuz gero, f endomorfismoaren bidezko irudia lortzeko $M_\beta(f)$ matrizea erabili dezakegula. Hau da, $v \in V$ guztietarako,

$$[f(v)]_\beta = M_\beta(f) \cdot [v]_\beta$$

betetzen dela (ikusi 2.2.5. teorema). Atal honetan, propietate berezi batzuk betetzen dituzten bektoreak definitu nahiko ditugu: *bektore propio* deiturikoak. Horretarako, nozio hori matrize karratuentzat definituko dugu, eta, ondoren, V-ren endomorfismo batentzat hedatuko.

4.1.1. Definizioa. Izan bitez V bektore-espazioa, $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa, $A \in \mathrm{M}_n(K)$ matrize karratua eta $\lambda \in K$.

i. Esango dugu λ balioa *A matrizearen balio propioa* dela, baldin eta existitzen bada nulua ez den $v \in K^n$ bektorea non $Av = \lambda v$ den. Gainera, kasu horretan, v bektorea A-ri elkartutako *bektore propioa* dela esango dugu.

ii. Esango dugu λ balioa *f endomorfismoaren balio propioa* dela, baldin eta existitzen bada nulua ez den $v \in V$ bektorea non $f(v) = \lambda v$ den. Kasu horretan, v bektorea f-ri elkartutako *bektore propioa* dela esango dugu.

Ohartu, V-ren f endomorfismo bat emanda, bere adierazpena lortzeko V-ren oinarri bat eta oinarri horrekiko f-ri elkartutako matrize bat zehaztu behar ditugula. Horregatik, aurreko kontzeptua ondo definituta dagoela ikusteko, f endomorfismoa idazteko aukeratzen diren oinarrien menpekoa ez dela frogatu behar dugu.

4.1.2. Proposizioa. *Izan bitez V bektore-espazioa eta $f \in \mathrm{End}(V)$. Har ditzagun V-ren β oinarria eta $M_\beta(f) \in \mathrm{M}_n(K)$ endomorfismoari elkartutako matrizea. Orduan, $\lambda \in K$ eskalarra f-ren balio propioa da, baldin eta soilik baldin $M_\beta(f)$-ren balio propio bada.*

Frogapena. Baldin eta $f(v) = \lambda v$ betetzen bada, orduan $[f(v)]_\beta = [\lambda v]_\beta$ beteko da. Beraz, 2.2.5. teoremari erreparatuz, $M_\beta(f)[v]_\beta = \lambda[v]_\beta$ ondorioztatzen dugu, eta $[v]_\beta \in K^n$ ez da bektore nulua, $v \neq 0$ izateagatik. Hau da, λ eskalarra $M_\beta(f)$ matrizeari dagokion balio propioa da, eta $[v]_\beta$ bere bektore propio bat.

Beste alde batetik, demagun existitzen dela nulua ez den $w \in K^n$ bektorea, non $M_\beta(f)w = \lambda w$ den, eta kontsidera dezagun $v \in V$ bektore bakarra, $[v]_\beta = w$ betetzen duena. Definizioz, w ez da bektore nulua eta, hortaz, $v \neq 0$ dugu. Hipotesiz, $M_\beta(f)[v]_\beta = \lambda[v]_\beta$ dugu, hau da, $[f(v)]_\beta = \lambda[v]_\beta$. Baldin eta $\beta = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bada eta $[v]_\beta = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t$ bada, orduan

$$f(v) = \lambda\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda\lambda_n w_n = \lambda\left(\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n\right) = \lambda v.$$

Beraz, $f(v) = \lambda v$ ondorioztatu dugu, eta λ eskalarra f-ren balio propioa da.

□

4.1.3. Adibidea. Izan bitez $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ matrize karratua eta $\lambda = -1$. Orduan, existitzen da $v = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bektore ez-nulua, non $Av = -v$ berdintza betetzen den. Ondorioz, λ bada A-ren balio propioa eta v bada λ-ri elkartutako bektore propioa.

Hala ere, $v' = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ bektorea hartuz, ikus daiteke $Av' = -v'$ berdintza ere betetzen dela. Beraz, balio propio bat emanda, balio propio horrentzat bektore propio bat baino gehiago existitu daitezke.

4.1.4. Definizioa. Izan bitez V bektore-espazioa, $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa eta $\lambda \in K$ eskalarra f-ren balio propioa. Esango dugu

$$V(\lambda) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

multzoa *λ-ri dagokion azpiespazio propioa* edo *autoespazioa* dela.

Honako emaitza honek erakutsiko digu, aurreko azpimultzo hori benetan V-ren azpiespazio bektorial bat dela.

4.1.5. Lema. *Izan bitez $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa eta $\lambda \in K$ eskalarra f-ren balio propioa. Orduan, $V(\lambda)$ multzoa V-ren azpiespazio bektoriala da.*

Frogapena. Izan bitez $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa eta V-ren $\lambda \in K$ balio propioa. Ikus dezagun, $v_1, v_2 \in V(\lambda)$ eta $\mu \in K$ guztietarako, honako bi baldintza hauek betetzen direla:

$$v_1 + v_2 \in V(\lambda) \qquad \text{eta} \qquad \mu v_1 \in V(\lambda).$$

Froga dezagun lehenengo baieztapena, f endomorfismo bat dela eta $v_1, v_2 \in V(\lambda)$ direla erabiliz:

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2),$$

hau da, $v_1 + v_2 \in V(\lambda)$ da. Bigarren baieztapena honako berdintza honetatik frogatzen da:

$$f(\mu v_1) = \mu f(v_1) = \mu(\lambda v_1) = \lambda(\mu v_1).$$

□

4.1.6. Oharra. Izan bitez $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa eta V-ren $\lambda \in K$ balio propioa. Orduan, $V(\lambda) = \ker(f - \lambda \,\mathrm{id}_V)$ da. Bereziki, $V(\lambda)$-ren dimentsioa

$$\dim_K V(\lambda) = \dim_K \ker(f - \lambda \,\mathrm{id}_V) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \,\mathrm{id}_V)$$

da.

4.1.7. Lema. *Izan bedi $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa, eta demagun $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ binaka ezberdinak diren f-ren balio propioak direla. Orduan, $i = 1, \ldots, r$ guztietarako, $v_i \in V(\lambda_i)$ bektore ez-nulua hartuta, $\{v_1, \ldots, v_r\}$ multzoa askea da.*

Frogapena. Izan bedi $v_1 \in V(\lambda_1)$ ez-nulua. Badakigu, $\{v_1\}$ sistema askea dela. Izan bedi $j \in \{1, \ldots, r\}$ zenbakirik handiena, non $\{v_1, \ldots, v_j\}$ sistema askea den. Ohartu, $j = r$ bada, amaitu dugula. Beraz, suposa dezagun $j < r$ dela. Orduan, existitzen dira $\mu_1, \ldots, \mu_j \in K$, non $v_{j+1} = \sum_{i \in \{1,\ldots,j\}} \mu_i v_i$ den. Berdintza honi f endomorfismoa aplikatuz, honako berdintza hauek ditugu:

$$f(v_{j+1}) = \lambda_{j+1} v_{j+1} = \sum_{i=1}^{j} \lambda_i \mu_i v_i.$$

Beraz,

$$\lambda_{j+1}\sum_{i=1}^{j}\mu_i v_i = \sum_{i=1}^{j}\lambda_i\mu_i v_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{j}(\lambda_i-\lambda_{j+1})\mu_i v_i = 0$$

eta $\lambda_{j+1}\neq\lambda_i$ direnez, $\{v_1,\dots,v_j\}$ sistema ez askea dela lortzen dugu. Kontraesana. □

4.1.8. Oharra. Aurreko 4.1.7. lemako hipotesiak hartuz, aurreko emaitza eta azpiespazio propioen batura $V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_r)$ zuzena dela esatea baliokideak dira. Izan ere, demagun existitzen dela $0\neq w\in V(\lambda_i)\cap(\sum_{j\neq i}V(\lambda_j))$. Orduan, $j\in\{1,\dots,i-1,i+1,\dots,r\}$ guztietarako, $\mu_j\in K$ eskalarrak eta $v_j\in V(\lambda_j)$ bektorea existitzen dira, non

$$w=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\mu_j v_j$$

den. Orduan, $\{v_1,\dots,v_{i-1},w,v_{i+1},\dots,v_r\}$ ez litzateke sistema askea izango, eta kontraesana lortuko genuke. Ez da zaila beste inplikazioa ikustea.

4.2 Polinomio karakteristikoa

Aurreko atalean ikusi berri dugu, A matrize karratu bat eta horren λ balio propio bat emanda, λ-ri elkartutako bektore propio bat baino gehiago daudela. Are gehiago, λ-ri elkartutako bektore propioen multzoak V-ren azpiespazio bektorial bat osatzen duela. Baina nola lortu ditzakegu matrize karratu baten balio propio guztiak? Atal honetan, balio propio horiek lortzeko erabiliko dugun nozio bat ikasiko dugu: *polinomio karakteristikoa*. Horren definizioa eman aurretik, ikus dezagun adibide bat.

4.2.1. Adibidea. Izan bedi $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&2\end{pmatrix}$ matrize karratu erreala. Aurretik ikusi dugu -1 balioa A matrizearen balio propioa dela. Nola lortuko ditugu A-ren balio propio guztiak?

Demagun $\lambda\in\mathbb{R}$ zenbakia A-ren balio propioa dela. Orduan, existitzen da $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ bektore ez-nulua, non $Av=\lambda v$ den. Hau da, $Av-\lambda v=0$ da. Beraz, honako ekuazio lineal hauetako sistema daukagu:

$$\begin{cases}(1-\lambda)v_1+3v_2=0\\2v_1+(2-\lambda)v_2=0.\end{cases}$$

Ohartu ekuazio linealetako sistema bateragarri indeterminatua dela. Bereziki, sistemari dagokion matrizea $B=\begin{pmatrix}1-\lambda&3\\2&2-\lambda\end{pmatrix}$ ezin da alderanzgarria izan, hau da, $\det(B)=0$ izan beharko da. Ondorioz,

$$(1-\lambda)(2-\lambda)-6=0 \Leftrightarrow 2-3\lambda+\lambda^2-6=0 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda-4=0 \Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-4)=0$$

Beraz, $\lambda_1=-1$ eta $\lambda_2=4$ dira A matrize karratuaren balio propio bakarrak.

4.2.2. Oharra. Aurreko adibideko balio propio horiek x^2-3x-4 polinomioaren erroak dira, eta polinomio hori lortzeko, $\det(A-x\cdot I_2)$ determinantea kalkulatu dugu.

4.2.3. Definizioa. Izan bedi $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ matrize karratua. Honako polinomio honi A-ren *polinomio karakteristiko* deritzo:

$$\chi_A(x) = \det(x \cdot I_n - A) = \det \begin{pmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Segidan datorren teoremak matrize karratu baten balio propioak eta matrize horren polinomio karakteristikoaren erroen arteko lotura azalduko du.

4.2.4. Teorema. *Izan bitez $A \in \mathrm{M}_n(K)$ eta $\lambda \in K$. Orduan, λ eskalarra A-ren balio propioa da, baldin eta soilik baldin λ zenbakia $\chi_A(x)$ polinomioaren erroa bada, hau da, $\chi_A(\lambda) = 0$ bada.*

Frogapena. $\boxed{\Rightarrow}$ Demagun λ eskalarra A-ren balio propio dela. Hau da, existitzen da $v \in K^n$ bektore ez-nulua, non $Av = \lambda v$ den. Horregatik,

$$\mathbf{0} = Av - \lambda v = Av - \lambda I_n v = \big(A - \lambda I_n\big)v,$$

da, hau da, v sistema homogeneoaren soluzio ez-nulua da. Orduan, $A - \lambda I_n$ matrizearen heina ezin da n izan. Beraz, $\det(A - \lambda I_n) = 0$, hau da, λ eskalarra $\chi_A(x)$ polinomioaren erroa da.
$\boxed{\Leftarrow}$ Demagun orain $\det(A - \lambda I_n) = 0$ dela. Beraz, $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$ da, eta existituko da nulua ez den w bektorea, non $(A - \lambda I_n)w = \mathbf{0}$ bektorea den. Hau da, $Aw = \lambda w$, eta λ eskalarra A-ren balio propio dela ondorioztatuko dugu. □

4.2.5. Proposizioa. *Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ antzekoak diren bi matrize. Orduan, $\chi_A(x) = \chi_B(x)$ da.*

Frogapena. Definizioz, A eta B antzekoak badira, existitzen da $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ matrize alderanzgarria, non $B = P^{-1}AP$ den. Orduan,

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI_n - A) = \det(P^{-1}) \cdot \det(xI_n - A) \cdot \det(P) \\ &= \det\big(P^{-1} \cdot (xI_n - A) \cdot P\big) = \det\big(P^{-1}(xI_n)P - P^{-1}AP\big) \\ &= \det\big(x(P^{-1}I_nP) - B\big) = \det\big(xI_n - B\big) = \chi_B(x). \end{aligned}$$

□

Bereziki, aurreko proposizioari esker, A eta B matrizeak f endomorfismoari elkartuta badaude, antzekoak dira, eta, beraz, polinomio karakteristiko bera dute.

4.2.6. Korolarioa. *Izan bitez $f \in \mathrm{End}(V)$ eta $\beta, \widetilde{\beta} \subseteq V$ bi oinarri. Orduan $\chi_{M_\beta(f)}(x) = \chi_{M_{\widetilde{\beta}}(f)}(x)$.*

4.2.7. Definizioa. Izan bedi $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa, eta hartu f-ri elkarturiko edozein A matrize. Hau da, demagun V-ren edozein β oinarri hartuta, $A = M_\beta(f)$ dela. Esango dugu f-ren *polinomio karakteristikoa* A-ren polinomio karakteristikoa dela, hau da, $\chi_f(x) = \chi_A(x)$ izango dela.

Notazioa. Izan bitez $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa eta $\lambda \in K$ endomorfismoaren balio propioa (hau da, polinomio karakteristikoaren erroa). Orduan, $m(\lambda)$ ikurrarekin $\chi_f(x)$ polinomioan λ erroaren anizkoiztasuna adieraziko dugu.

4.2.8. Lema. *Izan bedi $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(K)$ matrize karratua. Orduan, honako baieztapen hauek betetzen dira:*

i. *Polinomio karaketristikoaren maila n da.*

ii. *Polinomio karakteristikoaren gai nagusia*[1] 1 *da.*

iii. *Demagun A matrizearen polinomio karakteristikoa* $\chi_A(x) = x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0$ *dela,* $k_i \in K$ *izanik. Orduan, A matrizearen* traza[2] $\operatorname{tr}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ *bada,*

$$k_0 = (-1)^n \det(A) \quad \textit{eta} \quad k_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$$

dira.

iv. *Bereziki,* $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$ *matrizeak antzekoak badira, orduan* $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

Frogapena. Izan bedi $(c_{ij}) = xI_n - A$. Definizioz,

$$\begin{aligned}\chi_A(x) = \det(xI_n - A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sig}(\sigma) c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \dots c_{n\sigma(n)} \\ &= c_{11}c_{22}\dots c_{nn} + \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}_n\}} \operatorname{sig}(\sigma) c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \dots c_{n\sigma(n)}.\end{aligned}$$

Ohartu S_n taldeko identitate-elementuari dagokion batugaia

$$\begin{aligned}c_{11}c_{22}\dots c_{nn} &= (x - a_{11})\dots(x - a_{nn}) \\ &= x^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})x^{n-1} + \dots\end{aligned} \tag{4.3}$$

polinomioa dela. Beste alde batetik, $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}_n\}$ aukeratzen badugu, σ-ri dagokion batugaian agertzen den polinomioaren maila gehienez $n-2$ izango da. Hori dela eta, χ_A polinomioaren koefiziente nagusiak 1 izan behar du. Gainera, $(n-1)$ mailako monomioaren koefizientea, k_{n-1} deitu dioguna, $-\operatorname{tr}(A)$ izango da (1 eta $-\operatorname{tr}(A)$ balioak (4.3). ekuazioan agertzen direlako).

Horrez gain, badakigu χ_A-ren koefiziente askeak honako hau betetzen duela:

$$k_0 = \chi_A(0) = \det(0I_n - A) = \det(-A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{n errenkada/zutabe daudelako}}}{=} (-1)^n \det(A).$$

Amaitzeko, demagun $B \in \mathrm{M}_n(K)$ eta A matrizeak antzekoak direla. 4.2.6. korolarioari esker, $\chi_A = \chi_B$. Orain, $\chi_B(x) = x^n + \tilde{k}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \tilde{k}_1 x + \tilde{k}_0$ idazten badugu, orduan, $\tilde{k}_{n-1} = k_{n-1}$ berdintza bete behar da. Baina frogapen honetan jada frogatu dugu $k_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$ eta $\tilde{k}_{n-1} = -\operatorname{tr}(B)$ direla. Hortaz, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ ondoriozta dezakegu. □

Aurreko emaitzari esker, endomorfismo baten traza defini dezakegu.

4.2.9. Definizioa. Izan bedi $f \in \operatorname{End}(V)$ endomorfismoa. Esango dugu f-ren *traza* f-ri elkartutako edozein matrizeren traza dela.

4.2.10. Proposizioa. *Izan bitez* $f \in \operatorname{End}(V)$ *endomorfismoa eta* λ *endomorfismoaren balio propioa. Orduan,* $1 \leqslant \dim V(\lambda) \leqslant m(\lambda)$.

Frogapena. Ipini $d = \dim V(\lambda)$ eta $m = m(\lambda)$. Hasteko, λ eskalarra f-ren balio propioa denez, existitzen da v bektore ez-nulu bat $V(\lambda)$ azpiespazio bektorialean, eta hortaz, $\langle v \rangle \subseteq V(\lambda)$ denez, $d \geqslant 1$ da. Izan bedi $\{v_1, \dots, v_d\}$ multzoa $V(\lambda)$-ren oinarria, eta luza dezagun V-ren oinarri batera $\beta = \{v_1, \dots, v_d, w_{d+1}, \dots, w_n\}$. Orduan,

[1] Hau da, $\chi_A(x)$ polinomioan agertzen den monomio nagusiaren koefizientea.
[2] Ingelesez, *trace* esaten da.

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & A \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

da, non $A \in \mathrm{M}_{d,n-d}(K)$, $B \in \mathrm{M}_{n-d}(K)$ eta $\mathbf{0} = (0)_{ij} \in \mathrm{M}_{n-d,d}(K)$ diren. Hori dela eta,

$$\chi_f(x) = \det(xI_n - M_\beta(f)) = \det \begin{pmatrix} (x-\lambda)I_d & -A \\ 0 & xI_{n-d} - B \end{pmatrix} = (x-\lambda)^d \chi_B(x).$$

Hau da, λ eskalarraren anizkoiztasuna gutxienez $d = \dim V(\lambda)$ da. □

4.3 Diagonalgarritasuna

Gai honen hasieran esan dugu, $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismo bat emanda, hasteko, f-ri matrize diagonal bat elkartu diezaiokegun erabaki nahiko dugula. Baiezko kasuan, matrize diagonal hori ematen digun V-ren β oinarria eta matrize diagonala bera zehaztu nahiko ditugu. Horretarako, matrize bat, eta orokorrago, endomorfismo bat diagonalgarria izatearen definizioa ematen hasiko gara.

4.3.1. Definizioa. Izan bitez $A \in M_n(K)$ matrizea eta $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa.

i. Esango dugu A matrizea *diagonalgarria* dela, baldin eta existitzen bada P matrize alderanzgarri bat non $P^{-1}AP$ matrizea diagonala den.

ii. Esango dugu f *diagonalgarria* dela, baldin eta existitzen bada V-ren β oinarria non $M_\beta(f)$ matrizea diagonala den.

4.3.2. Oharra. Baliokidea da esatea f diagonalgarria dela, baldin eta soilik baldin f-ren bektore propioz osatutako oinarria existitzen bada.

Definizioa erabilita, ordea, zaila izango da matrize edo endomorfismo bat diagonalgarria den ala ez erabakitzea. Horregatik, f endomorfismoak diagonalgarria izateko bete behar dituen baldintza beharrezko eta nahikoak emango ditugu.

4.3.3. Teorema. *Izan bitez V dimentsio finituko bektore-espazioa eta $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismoa. Orduan, f diagonalgarria da, baldin eta soilik baldin honako bi baldintza hauek betetzen badira:*

i. *Polinomio karakteristikoaren erro guztiak K gorputzean daude.*

ii. *f endomorfismoaren λ balio propio guztietarako,* $\dim V(\lambda) = m(\lambda)$ *berdintza betetzen da.*

Frogapena. $\boxed{\Rightarrow}$ Demagun f diagonalgarria dela; hau da, existitzen dira $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ eskalarrak (ez dute zertan guztiak desberdinak izan) eta V-ren β oinarria, non

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

matrize diagonala den. Bereziki, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ balioak f-ren balio propioak dira, eta β multzoko bektoreak horiei dagozkien bektore propioak. Ohartu f endomorfismoaren polinomio karakteristikoa

$$\chi_f(x) = \det(xI_n - M_\beta(f)) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$$

K gorputzaren gainean banatzen dela.

Demagun f-ren balio propio desberdin guztiak $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_r$ direla. Orduan, $i \in \{1, \dots, r\}$ guztietarako, V-ren β oinarriarekiko $(f - \tilde{\lambda}_i \,\mathrm{id})$ endomorfismoari elkartutako matrizeak $m(\tilde{\lambda}_i)$ beste zero ditu diagonal nagusian. Izan ere, gainerako diagonaleko balioak $\tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_i \neq 0$ dira, $j \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, r\}$ guztietarako. Ondorioz, 4.1.6. oharra erabiliz, $i \in \{1, \dots, r\}$ guztietarako,

$$m(\tilde{\lambda}_i) = \dim \ker(f - \tilde{\lambda}_i \,\mathrm{id}) = \dim V(\tilde{\lambda}_i)$$

berdintza beteko da; nahi bezala.

$\boxed{\Leftarrow}$ Izan bitez $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_r$ binaka ezberdinak diren $\chi_f(x)$ polinomio karakteristikoaren erro guztiak, hau da, f endomorfismoaren balio propio guztiak. Hipotesiz, balio horiek K gorputzeko elementuak dira eta

$$\chi_f(x) = (x - \tilde{\lambda}_1)^{m(\tilde{\lambda}_1)} \dots (x - \tilde{\lambda}_r)^{m(\tilde{\lambda}_r)}$$

da. Bereziki, $\chi_f(x)$ polinomioaren maila $n = \dim_K(V)$ denez,

$$m(\tilde{\lambda}_1) + \dots + m(\tilde{\lambda}_r) = n = \dim_K(V)$$

da. Hipotesiz, baita ere, $i = 1, \dots, r$ guztietarako, $\dim_K\big(V(\tilde{\lambda}_i)\big) = m(\tilde{\lambda}_i)$ betetzen dela. Hartu, $i \in \{1, \dots, r\}$ bakoitzeko, $V(\tilde{\lambda}_i)$ azpiespazio bektorialaren β_i oinarri bat. Orduan, 4.1.7. lemari esker, $\beta = \beta_1 \sqcup \beta_2 \sqcup \dots \sqcup \beta_r$ multzoko bektoreak linealki independenteak dira. Guztira $m(\tilde{\lambda}_1) + \dots + m(\tilde{\lambda}_r) = n = \dim_K(V)$ bektore daudenez, β multzoa f-ren bektore propioz osaturiko V-ren oinarria da.

□

4.3.4. Oharra. Aurreko frogapenean ikusi dugu f endomorfismo diagonalgarriaren balio propio desberdin guztiak $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ badira, orduan, $i \in \{1, \dots, r\}$ guztietarako, $m(\lambda_i) = \dim_K V(\lambda_i)$ berdintza betetzen dela. Orduan,

$$\dim_K(\oplus_{i=1}^r V(\lambda_i)) = \sum_{i=1}^r m(\lambda_i) = n = \dim_K V$$

denez, $V = \oplus_{i=1}^r V(\lambda_i)$ berdintza lortzen dugu (ikusi 4.1.8. oharra).

Datozen orrialdeetan, hainbat adibide garatuko ditugu.

4.3.5. Adibidea. Izan bitez K gorputza eta $\lambda \in K$ edozein. Ikus dezagun $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(K)$ matrizea ez dela diagonalgarria.

Hasteko, A matrizearen polinomio karakteristikoa $\chi_A(x) = (x - \lambda)^2$ da, eta, beraz, A matrizeak $\lambda \in K$ balio propio bakarra dauka, $m(\lambda) = 2$ izanik. Hortaz, 4.3.3. teoremako **i.** baldintza betetzen da. Hala ere, ikus dezagun aurreko teoremako **ii.** atala ez dela betetzen, $\dim V(\lambda) = 1 < m(\lambda)$ baita:

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= \{v \in K^2 \mid Av = \lambda v\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K^2 \mid \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K^2 \mid \begin{pmatrix} \lambda a + b \\ \lambda b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in K^2 \mid b = 0 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ondorioz, A matrizea ez da diagonalgarria K gorputzaren gainean.

4.3.6. Adibidea. Demagun $\mathbb{R}^3$-ko κ oinarri kanonikoarekiko $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ endomorfismoari elkartutako matrizea

$$M_\kappa(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

dela. Erantzun ditzagun honako galdera hauek:

i. f endomorfismoa diagonalgarria al da?

Baiezko kasuan:

ii. Aurki ezazu $\mathbb{R}^3$-ko β oinarria, non $M_\beta(f)$ diagonala den.

iii. Aurki ezazu $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ matrizea $P^{-1}M_\kappa(f)P$ matrize diagonala izan dadin.

Ebazpena. Aurreko adibidean bezala, 4.3.3. teorema erabiliko dugu. Hasteko, f-ren polinomio karakteristikoa kalkulatuko dugu:

$$\begin{aligned}\chi_f(x) = \det &\begin{pmatrix} x-3 & 1 & -1 \\ 2 & x-4 & 2 \\ 2 & -2 & x \end{pmatrix} \\ =&(x^3 - 7x^2 + 12x) + (4x - 12) + (2x - 8) - 2x + 4 + 4 \\ =&x^3 - 7x^2 + 16x - 12.\end{aligned}$$

Ruffiniren erregelaren[3] arabera:

$$\{\chi_f\text{-ren erro arrazionalak}\} \subseteq \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

partekotasuna betetzen da. Gure kasuan, 2 eta 3 erro arrazionalak dira:

$$2^3 - 7 \cdot 2^2 + 16 \cdot 2 - 12 = 8 - 28 + 32 - 12 = 0.$$

Orduan, alde batetik, $\chi_f(x) = (x-2)p(x)$ idatz dezakegu, non $p(x) \in \mathbb{Z}[X]$ den. Hots,

$$\chi_f(x) = (x-2)(x^2 - 5x + 6). \tag{4.4}$$

Beste alde batetik, 3 zenbakia $x^2 - 5x + 6$ polinomioaren erroa izango da, eta honako deskonposaketa hau lortuko dugu

$$\chi_f(x) = (x-2)(x-3)(x-2) = (x-2)^2(x-3),$$

hau da, f-ren balio propioak 2 eta 3 dira, $m(2) = 2$ eta $m(3) = 1$ anizkoiztasunak izanik. Bereziki, $2, 3 \in \mathbb{R}$ baldintza betetzen da.

Kalkula ditzagun $V(2)$ eta $V(3)$ azpiespazioen dimentsioak endomorfismoa diagonalgarria den ala ez erabakitzeko.

$\boxed{V(3)}$ Hasteko, ikusi dugu 3 zenbakia f-ren balio propioa dela, eta, beraz, $\dim V(3) \geqslant 1$ izango da. Gainera, 4.2.10. teoremagatik, $\dim V(3) \leqslant m(3) = 1$ ere bete behar da. Ondorioz, $\dim V(3) = m(3)$ berdintza lortzen dugu.

$\boxed{V(2)}$ Kasu honetan, aurreko argudioa erabiliz, $1 \leqslant \dim V(2) \leqslant 2$ desberdintzak ditugu. Ikus dezagun $\dim V(2)$-ren balio bat edo bi den. Horretarako, $V(2)$-ren oinarri bat kalkulatuko dugu: jakinik

$$V(2) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av - 2v = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2I_3)v = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$$

dela, errenkadetan oinarrizko aldaketak eginez,

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[3] **Ruffiniren erregela**. Izan bedi $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, non $a_n \neq 0$. Demagun $\frac{a}{b}$ frakzioa g-ren erroa dela, non a eta b-ren zatitzaile komunetako handiena 1 den; orduan, $a \mid a_0$ eta $b \mid a_n$ ($\mathbb{Z}$ multzoan). Gure kasuan, $a_n = 1$ beti, 4.2.8. leman frogatu dugun bezala; hau da, polinomio karakteristikoaren erro arrazionalak zenbaki osoak dira ($b = \pm 1$ delako).

lortzen da. Orduan,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x-y+z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hortaz,

$$V(2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

eta $\dim V(2) = 2 = m(2)$ da. Ondorioz, f endomorfismoa diagonalgarria da.

Hurrengo pausoa $\mathbb{R}^3$-ren β oinarria lortzea izango da non $M_\beta(f)$ matrize diagonala den. Horretarako, $V(2)$ eta $V(3)$ azpiespazio propioen oinarri bana lortu beharko ditugu, eta horien bildura izango da, hain zuzen ere, bila gabiltzan β oinarria. Dagoeneko lortu dugu $V(2)$-ren oinarri bat. Kalkula dezagun $V(3)$-rentzako oinarri bat. Lehen bezala, definizioz:

$$V(3) = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 3I_3)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Errenkadetan oinarrizko aldaketak soilik eginez:

$$A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beraz,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V(3) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x + \frac{z}{2} \\ y - z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hortaz,

$$V(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = -\frac{z}{2},\, y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Orduan, har dezagun $\mathbb{R}^3$-ren honako oinarri hau

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{non} \quad M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

den. Izan ere, oinarriko bektoreen irudiak kalkulatzen baditugu,

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lortzen da.

Amaitzeko, $M_\beta(f) = M_\beta^\kappa M_\kappa(f) M_\kappa^\beta$ berdintza erabiliz, ariketak eskatzen duen P matrizea aurreko M_κ^β matrizea da:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3.7. Adibidea. Izan bedi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrize karratua. Erantzun ditzagun honako galdera hauek:

i. Azter ezazu ea A matrizea digonalgarria den $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ edota $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ taldeetan.

ii. Baiezko kasuan, ipini $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ eta aurki ezazu $P \in \mathrm{GL}_3(K)$ matrizea, non $P^{-1}AP$ matrize diagonala den.

Ebazpena. Aurreko adibideetan bezala, ariketa ebazteko 4.3.3. teorema erabiliko dugu. Hasteko, A-ren polinomio karakteristikoa kalkulatuko dugu:

$$\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} = (x^2+1)(x-2)$$
$$= (x-i)(x+i)(x-2).$$

Polinomio karakteristikoaren erro guztiak errealak ez direnez, A matrizea ez da diagonalgarria izango $M_3(\mathbb{R})$-n. Azter dezagun, bada, A-ren diagonalgarritasuna $\mathbb{C}$ gorputzaren gainean. Ohartu A matrizearen balio propioak i, $-i$ eta 2 direla, eta, gainera, $m(i) = m(-i) = m(2) = 1$ betetzen da. Aurreko 4.3.6. adibidean egin dugun moduan, aurreko $\lambda \in \{\pm i, 2\}$ balio propio bakoitzeko,

$$1 \leqslant \dim_{\mathbb{C}}\big(V(\lambda)\big) \leqslant m(\lambda) = 1$$

desberdintzatik, $\dim\big(V(\lambda)\big) = m(\lambda) = 1$ berdintza lortuko dugu. Ondorioz, A matrize diagonalgarria da $\mathbb{C}$ gorputzaren gainean. Ondorioz, existitzen da $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ matrizea, non

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

den.

Orain, P matrizea lortzeko $V(\mathrm{i})$, $V(-\mathrm{i})$ eta $V(2)$ azpiespazio propioen oinarri bana kalkulatuko dugu.

$\boxed{V(2)}$ Gogoratu

$$V(2) = \{v \in \mathbb{C}^3 \mid Av = 2v\} = \left\{v \in \mathbb{C}^3 \mid Av - 2v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 2I_3)v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

azpiespazio bektorialaren oinarri bat zehaztu nahi dugula. Aurreko adibideetan, $(A - 2I_3)$ matrizeari errenkadetan oinarrizko aldaketak aplikatu dizkiogu $V(2)$-ren oinarria lortzeko. Kasu honetan, $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bektoreak $V(2)$-n egoteko bete beharreko baldintzak lortzeko honako ekuazio lineal hauetako sistema ebatziko dugu:

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

Beraz, $y=-2x$ eta $x=2y$ berdintzetatik, $x=y=0$ izan behar dela ondorioztatzen dugu. Orduan,

$$V(2)=\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

da.

$\boxed{V(\mathrm{i})}$ Antzeko moduan,

$$V(\mathrm{i})=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid \begin{pmatrix}0&0&0\\1&-\mathrm{i}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid \begin{pmatrix}0\\x-\mathrm{i}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{i}y\\y\\0\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{C}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle.$$

$\boxed{V(-\mathrm{i})}$ Amaitzeko,

$$V(-\mathrm{i})=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid \begin{pmatrix}0&0&0\\1&\mathrm{i}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^3 \mid \begin{pmatrix}0\\x+\mathrm{i}y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\left\{\begin{pmatrix}-\mathrm{i}y\\y\\0\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{C}\right\}=\left\langle\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Orduan, $\mathbb{C}^3$-ren β oinarria eta $P\in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ matrizea honako era honetan daude emanda:

$$\beta=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\1\\0\end{pmatrix}\right\},\qquad P=M_\kappa^\beta=\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

Gure emaitzak zuzenak direla egiaztatuko dugu. Gogoratu honako berdintza hau bete behar dela:

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{i}&0\\0&0&-\mathrm{i}\end{pmatrix}=P^{-1}AP \quad\Leftrightarrow\quad PD=AP.$$

Ikus dezagun eskuin aldeko berdintza betetzen dela. Alde batetik,

$$PD=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\2&0&0\end{pmatrix}$$

da, eta, beste alde batetik,

$$AP=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&\mathrm{i}&-\mathrm{i}\\2&0&0\end{pmatrix};$$

nahi bezala.

4.4 Ariketak

4.4.1. Ariketa. Izan bedi $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Erantzun itzazu honakoko galdera hauek.

i. Froga ezazu A alderanzgarria dela, baldin eta soilik baldin zero ez bada A-ren balio propioa.

ii. Demagun A matrizea alderanzgarria dela. Froga ezazu λ eskalarra A-ren balio propioa bada, orduan λ^{-1} balioa A^{-1} matrizearen balio propioa dela.

4.4.2. Ariketa. Esango dugu A matrize karratua *nilpotentea* dela, baldin eta existitzen bada $n \in \mathbb{N}$ non $A^n = 0$ den. Froga ezazu A nilpotentea bada, orduan zero dela bere balio propio bakarra.

4.4.3. Ariketa. Frogatu matrize baten eta haren irauliaren polinomio karakteristikoak berdinak direla.

4.4.4. Ariketa. Izan bedi $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ aplikazioa, non, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ guztietarako,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y + z \\ -2x + 4y - 2z \\ -2x + 2y \end{pmatrix}$$

den.

i. Azter ezazu f endomorfismoa diagonalgarria den ala ez.

ii. Erabaki ezazu honako matrize hauek f endomorfismoari elkartuta dauden ala ez:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.4.5. Ariketa. Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_n(K)$. Froga ezazu A eta B matrizeak antzekoak direla, baldin eta soilik baldin A^t eta B^t antzekoak badira. Ondorioztatu A diagonalgarria dela, baldin eta soilik baldin A^t diagonalgarria bada, eta, kasu honetan, A eta A^t matrizeen forma diagonalak bat datozela. Ondorioztatu diagonalgarria den edozein matrize bere irauliaren antzekoa dela.

4.4.6. Ariketa. Aztertu honako matrize hauen diagonalgarritasuna $\mathbb{R}$ gorputzaren gainean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Baiezko kasuan, eman horien antzekoa den matrize diagonala, eta kalkulatu, kasu bakoitzean, matrize horietatik matrize diagonalera garamatzan P matrizea. Arrazoitu ezazu A eta B matrizeak antzekoak diren ala ez.

4.4.7. Ariketa. Erabaki eta arrazoitu ezazu $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ eta $B = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ matrizeak $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, edota $\mathbb{C}$ gorputzen gainean, hurrenez hurren, diagonalgarriak diren ala ez.

4.4.8. Ariketa. Demagun $\mathbb{R}^4$ espazioaren oinarri kanonikoarekiko f endomorfismo bati elkartutako matrizea honako hau dela:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 5 & -8 \\ 2 & -6 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

i. Froga ezazu f diagonalgarria dela, eman ezazu bere forma diagonala, D, eta aurki ezazu $\mathbb{R}^4$ espazioaren oinarri β, zeinetarako $M_\beta(f) = D$ den.

ii. Eman ezazu $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ matrize alderanzgarria, $P^{-1}AP = D$ betetzen duena (D aurreko ataleko matrize diagonala izanik).

iii. Esan ezazu ea aurkitutako β oinarria edota P matrizea bakarrak diren.

iv. Azter ezazu honako matrize hauek f endomorfismoari elkartuta dauden:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 3 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

4.4.9. Ariketa. Izan bitez $a \in \mathbb{R}$ eta $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ honako era honetan definituriko endomorfismoa:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2)x - ay - (2a+2)z \\ x + y \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}, \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

i. Aztertu ezazu, a parametroaren arabera, f endomorfismoa diagonalgarria den.

ii. Diagonalgarria den kasuetan, eman ezazu β oinarria, non $M_\beta(f)$ diagonala den.

4.4.10. Ariketa. Izan bedi $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$, formula honen bidez emanda:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + 3z + t \\ 2y + az + bt \\ 2z + ct \\ 2t \end{pmatrix}.$$

i. Erabaki ezazu a, b eta c parametroen balioen arabera aurreko endomorfismoa diagonalgarria den. Diagonalgarria den kasuetan, eman ezazu oinarria non $M_\beta(f)$ diagonala den.

ii. Endomorfismoa diagonalgarria den kasuan, ba al dago honako B matrize hau f-ri elkatuta? Arrazoitu erantzuna:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4.11. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^4$-ren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bektore linealki independenteak, W bektore horiek sortutako azpiespazio bektoriala, eta $\beta = \{w_1, w_2, w_3\}$. Izan bedi $f \in \mathrm{End}(W)$ endomorfismoa, non

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

den.

i. Frogatu f diagonalgarria dela, eta aurkitu W-ren β' oinarria zeinetarako $M_{\beta'}(f)$ matrizea diagonala den.

ii. Frogatu honako matrize hau ere f-ri elkatuta dagoela:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

iii. Luzatu f endomorfismoa $\mathbb{R}^4$ espazioaren g eta h bi endomorfismoetara, zeinetarako g endomorfismoa diagonalgarria den, baina ez h.

4.4.12. Ariketa. Frogatu honako $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ eta $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ matrize hauek antzekoak direla, eta zehaztu $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ matrize bat zeinetarako $B = P^{-1}AP$ den (laguntza: frogatu A eta B matrizeak diagonalgarriak direla, eta forma diagonal bera daukatela).

5. kapitulua

Forma bilinealak eta koadratikoak

Orain arte, K-ren gaineko V eta W bektore-espazioak emanda, $f\colon V \to W$ erako aplikazio linealak aztertu ditugu. Bereziki, $V = W$ denean, $f \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismo bat dela esan dugu, eta horiek diagonalgarriak izateko baldintza beharrezko eta nahikoak zein diren frogatu ere bai. Kapitulu honetan, $b\colon V \times V \to K$ erako aplikazioak kontsideratuko ditugu eta horiek bete beharreko baldintza izango da, $V \times V$ biderketa kartesiarreko osagai bakoitzean lineala izatea. Horregatik, *forma bilineal* izena emango diegu.

Aurreko ataletan bezala, V-ren oinarri bat finkatuta, V-ren forma bilineal bati oinarri horrekiko elkartutako matrizea zehazten ikasiko dugu, eta oinarri desberdinetarako lortzen ditugun matrizeen arteko erlazioa ezagutuko. Ondoren, beste kontzeptu bat ikasiko dugu, forma bilineal batekiko *ortogonalak* izatearena. Dimentsio finituko bektore-espazio batean simetrikoak diren forma bilinealak hartuz gero, frogatuko dugu bektore-espazio horiek oinarri ortogonal bat onartzen dutela (gorputzaren karaketristika bi ez den bitartean). Gainera, matrize bat emanda, forma bilineal bati elkartuta dagoen ala ez erabakitzeko metodoak ere ikasiko ditugu.

Azken zatia forma koadratikoei buruzkoa da, eta frogatuko dugu forma bilineal simetrikoak eta forma koadratikoak korrespondentzia natural batean daudela (berriro ere, gorputzaren karakteristika ez bada bi).

5.1 Forma bilinealak eta horien matrizeen bidezko adierazpena

5.1.1. Definizioa. Izan bitez K gorputza eta V gorputz horren gaineko bektore-espazioa. Esango dugu

$$\begin{array}{rccc} b\colon & V \times V & \to & K \\ & (v,w) & \longmapsto & b(v,w) \end{array}$$

erako aplikazioa *forma bilineala* dela, b aplikazioa osagai bakoitzean lineala bada; hau da: $v, v', w, w' \in V$ eta $\lambda, \lambda' \in K$ guztietarako,

i. $b(\lambda v + \lambda' v', w) = \lambda b(v,w) + \lambda' b(v',w)$;

ii. $b(v, \lambda w + \lambda' w') = \lambda b(v,w) + \lambda' b(v,w')$.

5.1.2. Adibidea. Adibidez, $\mathbb{R}^n$ multzoaren gaineko biderketa eskalar estandarra forma bilineala da:

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}, & \\ (v,w) & \longmapsto & x_1y_1 + \ldots + x_ny_n & \end{array} \qquad \forall\, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1}$$

(Kontuz, ekuazioan bektoreen koordenatuak idatzi ditugu oinarri finkatu batekiko, adibidez, oinarri kanonikoarekiko!) Are gehiago, K gorputza, $A \in \mathrm{M}_n(K)$ edozein matrize eta K-ren gaineko n dimentsioko V bektore-espazioa hartuz gero, honako aplikazio hau kontsidera dezakegu:

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \to & K, \\ (v,w) & \longmapsto & [v]_\beta^t \cdot A \cdot [w]_\beta \end{array} \qquad \forall\, v,w \in K^n, \tag{5.2}$$

non $\beta \subseteq V$ oinarria den. Ohartu (5.1). ekuazioan $K = \mathbb{R}$ eta $A = I_n$ direla. Geroago, V espazioaren dimentsioa finitua denean, 5.1.6. teoreman frogatuko dugu forma bilineal guztiek (5.2). ekuazioan agertzen den itxura daukatela.

5.1.3. Lema. *Baldin eta $b\colon V \times V \to K$ forma bilineala bada, orduan, $v, w \in V$ guztietarako, $b(v,0) = 0 = b(0,w)$ da.*

Frogapena. Badakigu $0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0$ betetzen dela. Hori dela eta,

$$\begin{aligned} b(v,0) &= b(v, 1\cdot 0 + 1 \cdot 0) = 1 \cdot b(v,0) + 1 \cdot b(v,0) \\ &= b(v,0) + b(v,0). \end{aligned}$$

Beraz, $b(v,0) = 0$ edozein $v \in V$ bektoretarako. Era berean, $b(0,w) = 0$ frogatzen da, edozein $w \in V$ bektoretarako. □

Aplikazio linealekin gertatzen zen antzera, segidan datorren emaitzaren arabera, V bektore-espazio baten gaineko b forma bilineala zehazteko nahikoa da bektore kopuru finitu baten irudia ezagutzea.

5.1.4. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V dimentsio finituko bektore-espazioa eta $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ espazioaren oinarria. Baldin eta $b\colon V \times V \to K$ forma bilineala bada, orduan edozein $v, w \in V$ bektoretarako honako hau dugu:*

$$b(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j b(v_i, v_j), \qquad \textit{non} \quad [v]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \textit{eta } [w]_\beta = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \textit{diren.}$$

Frogapena. Osagai bakoitzean b aplikazio lineala denez,

$$\begin{aligned} b(v,w) &= b(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, w) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b(v_i, w) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b(v_i, \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \mu_j b(v_i, v_j) \Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \mu_j b(v_i, v_j). \end{aligned}$$

Hau da, nahi genuena frogatu dugu. □

Hurrengo helburua 5.1.4. teoremaren emaitza matrizeen bidez ematea izango da. Horretarako, beharrezkoa izango da forma bilineal bati elkartutako matrizea zehazten ikastea.

5.1.5. Definizioa. Izan bitez $b\colon V \times V \to K$ forma bilineala eta $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ multzoa V-ren oinarria. Har dezagun honako matrize hau:

$$M_\beta(b) := \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & b(v_1,v_2) & \dots & b(v_1,v_n) \\ b(v_2,v_1) & b(v_2,v_2) & \dots & b(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(v_n,v_1) & b(v_n,v_2) & \dots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix},$$

hau da, (i,j) osagaian $b(v_i, v_j)$ elementua duen matrizea. Matrize horri *b forma bilinealari β oinarriarekiko elkartutako matrize* deritzo.

5.1.6. Teorema. *Izan bitez V dimentsio finituko bektore-espazioa eta $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ horren oinarri bat. Baldin eta $b\colon V \times V \to K$ forma bilineala bada, orduan*

$$b(v,w) = [v]_\beta^t \cdot M_\beta(b) \cdot [w]_\beta, \qquad \forall\, v, w \in V.$$

Are gehiago, $M_\beta(b)$ matrizea berdintza hori betetzen duen matrize bakarra da.

Frogapena. 5.1.4. teoreman $b(v,w) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j b(v_i, v_j)$ dela frogatu dugu, non

$$[v]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \text{eta} \qquad [w]_\beta = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

diren. Beste alde batetik,

$$\begin{aligned}
[v]_\beta^t \cdot M_\beta(b) \cdot [w]_\beta &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(v_1,v_1) & b(v_1,v_2) & \dots & b(v_1,v_n) \\ b(v_2,v_1) & b(v_2,v_2) & \dots & b(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b(v_n,v_1) & b(v_n,v_2) & \dots & b(v_n,v_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \mu_j b(v_1,v_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \mu_j b(v_n,v_j) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(\sum_{j=1}^n \mu_j b(v_i,v_j) \Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j b(v_i,v_j).
\end{aligned}$$

Hau da, $b(v,w) = [v]_\beta^t \cdot M_\beta(b) \cdot [w]_\beta$ berdintza frogatu dugu. □

5.1.7. Adibidea. Finka dezagun $\mathbb{R}^2$ bektore-espazioan oinarri kanonikoa, eta izan bedi $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ matrizea. Lehendabizi, matrize karratu horrek forma bilineal bat definitzen duela ikusiko dugu:

$$b_A\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\Big) := \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = x(z+2t) + y(3z+4t), \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Alderantziz, $\mathbb{R}^2$-ko forma bilineal bat emanda, horri elkartutako matrizea zehaztuko dugu. Demagun

$$b\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\Big) := 2xz + 4xt - yz, \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

forma bilineala dela. Orduan, horri elkartutako matrizea (oinarri kanonikoarekiko) honako era honetan aurki dezakegu:

$$b\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = 2, \qquad b\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = 4, \qquad b\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = -1, \qquad b\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = 0$$

direnez,

$$M_\kappa(b) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

da eta

$$b\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\-1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}$$

dugu.

5.1.8. Teorema. *Izan bitez K-gaineko V dimentsio finituko bektore-espazioa, $b\colon V\times V\to K$ forma bilineala eta $\beta,\gamma\subseteq V$ bi oinarri. Orduan, $M_\gamma(b)=P^t\cdot M_\beta(b)\cdot P$ dugu, non $P=M_\beta^\gamma$ den.*

Frogapena. Gogoratu 1.4.1. definizioan definitutako M_γ^β matrizea β oinarritik γ oinarrirako oinarrien aldaketaren matrizea da: $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}$ bada, $M_\gamma^\beta=([v_1]_\gamma\dots[v_n]_\gamma)$ da.

1.4.3. teoremari esker, badakigu $M_\gamma^\beta\cdot[v]_\beta=[v]_\gamma$ betetzen dela bektore $v\in V$ guztietarako. Beraz, 5.1.6. teorema erabiliz,

$$\begin{aligned}[v]_\beta^t M_\beta(b)[w]_\beta = b(v,w) &= [v]_\gamma^t M_\gamma(b)[w]_\gamma\\ &= \left(M_\gamma^\beta\cdot[v]_\beta\right)^t M_\gamma(b)\left(M_\gamma^\beta\cdot[w]_\beta\right).\end{aligned}\tag{5.3}$$

0.6.17. lemak $\left(M_\gamma^\beta\cdot[v]_\beta\right)^t=[v]_\beta^t\cdot\left(M_\gamma^\beta\right)^t$ betetzen dela dio, $v,w\in V$ bektore guztietarako. Hortaz, (5.3). ekuazioan ordezkatuz,

$$\begin{aligned}[v]_\beta^t M_\beta(b)[w]_\beta &= \left([v]_\beta^t\left(M_\gamma^\beta\right)^t\right)M_\gamma(b)\left(M_\gamma^\beta\cdot[w]_\beta\right)\\ &= [v]_\beta^t\left(\left(M_\gamma^\beta\right)^t\cdot M_\gamma(b)\cdot M_\gamma^\beta\right)\cdot[w]_\beta\end{aligned}$$

ondorioztatzen dugu, $v,w\in V$ bektore guztietarako. Beraz, 0.7.7. ariketari esker, $M_\beta(b)=\left(M_\gamma^\beta\right)^t\cdot M_\gamma(b)\cdot M_\gamma^\beta$ dugu. □

Badakigu 5.1.8. teoremaren enuntziatuan agertzen den M_γ^β matrizea alderanzgarria dela eta beraz, ondoko nozioa eman dezakegu.

5.1.9. Definizioa. Izan bitez $A,B\in\mathrm{M}_n(K)$ bi matrize. Esango dugu A matrizea B matrizearekin *kongruentea* dela, $P\in\mathrm{GL}_n(K)$ matrizea existitzen bada, non $B=P^tAP$ den.

5.1.10. Lema. *Kongruentea izatea baliokidetasun-erlazioa da.*

Frogapena. Baldin eta $A,B,D\in\mathrm{M}_n(K)$ hiru matrize badira, honako hiru propietate hauek betetzen direla egiaztatu behar dugu:

- A matrizea A-rekin kongruentea da.
- A matrizea B-rekin kongruentea bada, orduan B matrizea A-rekin kongruentea da.
- A matrizea B-rekin kongruentea bada eta B matrizea D-rekin kongruentea bada, orduan A matrizea D-rekin kongruentea da.

Lehengo atala argi dago, $A=I_n^t\cdot A\cdot I_n$ delako. Bigarren eta hirugarren puntuak frogatzeko, 0.6.17. eta 0.6.23. lemak erabili. □

Hori dela eta, bi matrize *kongruenteak direla* esan dezakegu, ordenari garrantzirik eman gabe. Bereziki, 5.1.9. definiziotik eta aurreko teorematik, honako hau lortzen da.

5.1.11. Korolarioa. *Izan bitez K-gaineko V dimentsio finituko bektore-espazioa, $b\colon V\times V\to K$ forma bilineala eta $\beta,\gamma\subseteq V$ bektore-espazioaren bi oinarri. Orduan, $M_\beta(b)$ eta $M_\gamma(b)$ matrize kongruenteak dira.*

Frogapena. Erabili 5.1.8. teorema. □

5.1.12. Adibidea. Orain, V dimentsio infinituko bektore-espazioa denean zer gerta daitekeen ikusiko dugu. Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$, non $a < b$ den, eta

$$C := \{f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ funtzioa jarraitua}\}.$$

1.1.11. adibidean C multzoa $\mathbb{R}$-ren gaineko bektore-espazioa dela ikusi dugu. Badakigu $\mathbb{R}[x]$ polinomioen multzoak C-ren $\mathbb{R}$-gaineko bektore- azpiespazioaren egitura duela. Beraz, $\dim_{\mathbb{R}}(C) = \infty$ dugu, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[x]) = \infty$ baita.

Izan bedi $b\colon C \times C \to \mathbb{R}$ honako era honetan definitutako funtzioa:

$$b(f,g) := \int_a^b f(x)g(x)dx, \qquad \forall\, f, g \in C.$$

Orduan, b forma bilineala da.

Hasteko, ohartu $b(f,g) \in \mathbb{R}$ dela, $f \cdot g$ funtzioa jarraitua delako, eta $a, b \in \mathbb{R}$ direlako. Argi dago $b(f,g) = b(g,f)$ betetzen dela, edozein f, g bektoretarako (bektore horiek funtzioak dira). Beraz, forma bilineala dela egiaztatzeko, nahikoa da b lehenengo osagaian aplikazio lineala dela frogatzea. Hori frogatuko dugu: $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ eskalarrak eta $f, f', g \in C$ bektoreak badira,

$$\begin{aligned} b(\lambda f + \lambda' f', g) &= \int_a^b \big(\lambda f + \lambda' f'\big)(x)g(x)dx = \int_a^b \Big(\lambda f(x) + \lambda' f'(x)\Big)g(x)dx \\ &= \lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda' \int_a^b f'(x)g(x)dx \\ &= \lambda b(f,g) + \lambda' b(f',g). \end{aligned}$$

Hau da, lehengo osagaian b funtzioa aplikazio lineala da. Propietate hori erabil dezakegu bigarren osagaian ere aplikazio lineala dela frogatzeko:

$$b(f, \lambda g + \lambda' g') = b(\lambda g + \lambda' g', f) = \lambda b(g,f) + \lambda' b(g',f) = \lambda b(f,g) + \lambda' b(f,g').$$

Frogatu dugu, hortaz, b forma bilineala dela. Hala ere, ez dago argi b-ri elkartutako matrizeak nola eraiki litezkeen.

5.2 Ortogonaltasuna eta oinarri ortogonalak

Hemendik aurrera, forma bilineal berezi batzuekin lan egingo dugu: forma bilineal simetrikoekin, eta horien propietate nagusiak frogatuko ditugu.

5.2.1. Definizioa. Esango dugu $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal *simetrikoa* dela, $v, w \in V$ guztietarako, $b(v,w) = b(w,v)$ betetzen bada. Batzuetan, $\mathcal{B}_s(V)$ ikurra erabiliko da $V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoen multzoa adierazteko.

Esaterako, 5.1.2. adibidean aipatzen den biderketa eskalarra eta 5.1.12. adibidean agertzen den forma bilineala simetrikoak dira. Era berean, propietate antzekoa defini dezakegu matrizeetarako:

5.2.2. Definizioa. Esango dugu $A \in \mathrm{M}_n(K)$ matrize *simetrikoa* dela, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ guztietarako, $a_{ij} = a_{ji}$ bada; edo, baliokideki, $A = A^t$ bada.

5.2.3. Proposizioa. *Izan bitez K-gaineko V dimentsio finituko bektore-espazioa, $b\colon V\times V\to K$ forma bilineala eta $\beta\subseteq V$ bektore-espazioaren oinarria. Orduan, b simetrikoa da, baldin eta soilik baldin $M_\beta(b)$ matrize simetrikoa bada.*

Frogapena. Alde batetik, hartu $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}\subset V$ oinarria. Baldin eta b formal bilineal simetrikoa bada, $b(v,w)=b(w,v)$ betetzen da $v,w\in V$ bektore guztietarako eta, bereziki, $b(v_i,v_j)=b(v_j,v_i)$. Beraz, $M_\beta(b)$ matrizea simetrikoa da.

Beste alde batetik, demagun $M_\beta(b)=M_\beta(b)^t$ matrizea simetrikoa dela, eta har ditzagun $v,w\in V$ bi bektore. Honako berdintza hauek dauzkagu:

$$b(v,w)=[v]_\beta^t M_\beta(b)[w]_\beta \underset{\substack{\uparrow\\ \text{eskalarra da}}}{=} \left([v]_\beta^t M_\beta(b)[w]_\beta\right)^t=[w]_\beta^t M_\beta(b)^t[v]_\beta=[w]_\beta^t M_\beta(b)[v]_\beta=b(w,v)$$

eta, hortaz, b forma bilineala simetrikoa da. □

5.2.4. Definizioa. Izan bitez $b\colon V\times V\to K$ forma bilineal simetrikoa eta $v,w\in V$ bi bektore. Esango dugu v eta w bektoreak *b-rekiko ortogonalak* direla, $v\perp w$ idatziko dugularik, baldin eta $b(v,w)=0$ bada (edo, baliokidea dena, $b(w,v)=0$ bada).

Baldin eta $v\in V$ bektoreak $b(v,v)=0$ betetzen badu (hau da, $v\perp v$ bada), v bektoreari *bektore isotropo* deritzo.

Datorren emaitza enuntziatzeko, gorputz baten *karakteristika*ren nozioaz gogoratu behar dugu (0. kapituluan ikusitako 0.4.2. definizioa). Bertan, b forma bilineal simetriko ez-nulua bada eta K-ren karakteristika bi ez bada, ez-isotropoak diren bektore asko daudela ikusiko dugu.

5.2.5. Lema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta $b\colon V\times V\to K$ forma bilineal simetriko ez-nulua. Gorputzaren karakteristika bi ez bada, V-ren bektore ez-isotropoak existitzen dira.*

Frogapena. Daukagun forma bilineal simetrikoa nulua ez denez, $v,w\in V$ bi bektore existituko dira non $b(v,w)\neq 0$ den. Bi kasu daude: $\{v,w\}$ multzoan bektore ez-isotropo bat dago, ala multzo horren bektoreak isotropoak dira. Lehenengo kasuan ez dago ezer frogatzeko, jada bektore ez-isotropo bat aurkitu dugulako. Demagun, orduan, v eta w bektoreak isotropoak direla. Kasu horretan, b forma bilineala osagai bakoitzean lineala delako, honako hau betetzen da:

$$\begin{aligned} b(v+w,v+w) &\underset{\substack{\uparrow\\ b\text{ forma bilineala}}}{=} b(v,v)+b(v,w)+b(w,v)+b(w,w) \underset{\substack{\uparrow\\ v,w\text{ isotropoak}}}{=} 0+b(v,w)+b(w,v)+0\\ &= b(v,w)+b(w,v)\underset{\substack{\uparrow\\ b\text{ forma simetrikoa}}}{=}2b(v,w).\end{aligned}$$

Hortaz, $b(v+w,v+w)=2b(v,w)$ ondorioztatu dugu. Gorputzaren karakteristika bi ez denez, $2\neq 0$ dugu. Gainera, $b(v,w)\neq 0$ suposatzen ari gara, eta, horregatik, $2b(v,w)$ ere ez da zero izango, hau da, $b(v+w,v+w)\neq 0$. Beraz, bektore ez-isotropo bat aurkitu dugu, $v+w$ bektorea. □

5.2.6. Definizioa. Izan bitez $b\colon V\times V\to K$ forma bilineal simetrikoa eta $S\subseteq V$ bektoreen azpimultzo bat. Esango dugu S-ren bektore guztiekin ortogonalak diren V-ren bektoreek osatutako multzoa *S-ren ortogonala* dela, eta $S^\perp$ idatziko dugu; hau da:

$$S^\perp:=\{v\in V\mid \forall w\in S,\ v\perp w\}.$$

Bereziki, S multzoaren kardinalitatea bat bada (hau da, $S=\{w\}$ bada), normalean $\{w\}^\perp$ ordez $w^\perp$ idazten da.

5.2.7. Teorema. *Izan bitez K-ren gaineko V bektore-espazioa eta b horren gainean definitutako forma bilineala. Orduan, V-ren S azpimultzo guztietarako, $S^\perp$ multzoa V-ren azpiespazioa da.*

Frogapena. Badakigu $0 \in S^\perp$ betetzen dela, $v \in V$ bektore guztietarako, eta bereziki $v \in S$ bektore guztietarako, $0 \perp v$ delako. Baldin eta $v_1, v_2 \in S^\perp$ baditugu, orduan,

$$b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b(v_2, w) = 0 + 0 = 0, \qquad \forall\, w \in S,$$

hau da, $v_1 + v_2 \in S^\perp$. Azkenik, baldin eta $v \in S^\perp$ eta $\lambda \in K$ baditugu,

$$b(\lambda \cdot v, w) = \lambda \cdot b(v, w) = \lambda \cdot 0 = 0, \qquad \forall\, w \in S$$

ondorioztatzen dugu. Hortik, 1.2.4. teorema erabiliz, $S^\perp$ azpiespazio bektoriala dela frogatu dugu. □

5.2.8. Teorema. *Izan bitez $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa eta $W = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle \leqslant V$-ren azpiespazioa. Orduan, $v \in W^\perp$, baldin eta soilik baldin $v \perp w_i$ bada, $i = 1, \ldots, r$ guztietarako.*

5.2.8. teoremak honako ondorio garrantzitsu hau dakar:

5.2.9. Korolarioa. *Izan bitez $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa eta $W = \langle w_1, \ldots, w_r \rangle \leqslant V$ azpiespazioa. Orduan $W^\perp = w_1^\perp \cap \cdots \cap w_r^\perp$.*

5.2.10. Definizioa. Izan bitez $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa eta $U, W \leqslant V$. Esango dugu U eta W azpiespazioak b-rekiko *ortogonalak* direla, $U \perp W$ idatziz, $u \in U$ eta $w \in W$ guztietarako, $b(u, w) = 0$ bada.

Definizioz, W azpiespazio guztietarako, $W \perp W^\perp$ betetzen da.

5.2.11. Definizioa. Izan bedi $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa. Esango dugu, $V^\perp$ azpiespazioa *b-ren nukleoa* dela, eta $\ker(b)$ bidez adieraziko dugu. Beraz,

$$\ker(b) = V^\perp = \{v \in V \mid b(v, w) = 0, \forall w \in V\},$$

hau da, V-ren bektore guztiekin ortogonalak diren bektoreen multzoa da.

Baldin eta $\ker(b) = \{0_V\}$ bada, orduan *b ez-endekatua* dela esaten da, eta $\ker(b) \neq \{0_V\}$ bada, berriz, *endekatua*.

5.2.12. Teorema. *Izan bitez $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa eta $\beta \subseteq V$-ren oinarri finitua. Orduan,*

i. $V^\perp = \{v \in V \mid M_\beta(b)[v]_\beta = 0_V\}$.

ii. *b ez-endekatua da, baldin eta soilik baldin $M_\beta(b)$ matrizea alderanzgarria bada.*

Frogapena. Izan bedi $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Definizioz,

$$\begin{aligned} V^\perp &= \left\{v \in V \mid b(w, v) = 0_K,\ \forall\, w \in V\right\} \\ &= \left\{v \in V \mid [w]_\beta^t \cdot M_\beta(b) \cdot [v]_\beta = 0_K,\ \forall\, w \in V\right\} \end{aligned}$$

dugu. Bereziki, $[v_i]_\beta^t \cdot M_\beta(b) \cdot [v]_\beta = 0_K$ dugu indize $i = 1, \ldots, n$ guztietarako, hau da,

$$[v_i]_\beta^t \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0_K, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n, \tag{5.4}$$

non

$$M_\beta(b)\cdot[v]_\beta=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_{n,1}(K)$$

den. (5.4). ekuaziotik, v_i bektoreak β oinarriaren bektoreak direnez, $\lambda_i=0_K$ dela ondorioztatzen dugu, $i=1,\dots,n$ guztietarako, hau da $M_\beta(b)[v]_\beta=0_V$. □

5.2.13. Definizioa. Izan bedi $b\colon V\times V\to K$ forma bilineal simetrikoa eta $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}\subset V$-ren oinarria. Esango dugu *β oinarria b-rekiko ortogonala* dela, baldin eta, $i,j\in\{1,\dots,n\}$ indize desberdin guztietarako, $v_i\perp v_j$ bada. Horrez gain, $i\in\{1,\dots,n\}$ guztietarako $b(v_i,v_i)=1$ bada, orduan, *β oinarria b-rekiko ortonormala* dela esaten da.

Adibidez, $\mathbb{R}^n$-ko oinarri kanonikoa biderketa eskalar estandarrarekiko oinarri ortogonala zein ortonormala da.

5.2.14. Teorema. *Izan bedi $b\colon V\times V\to K$ forma bilineal simetrikoa eta $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}\subset V$-ren oinarri finitua. Orduan, $M_\beta(b)$ matrizea diagonala da, baldin eta soilik baldin β oinarria b-rekiko oinarri ortogonala bada.*

Honako proposizio garrantzitsu hau 5.2.16. teorema frogatzeko erabiliko dugu; edozein forma bilineal simetrikok oinarri ortogonal bat onartzen duela frogatzeko, hain zuzen ere.

5.2.15. Proposizioa. *Izan bitez K-gaineko V dimentsio finituko bektore-espazioa, $b\colon V\times V\to K$ forma bilineal simetrikoa eta $W\leqslant V$ azpiespazioa. Baldin eta $W\cap W^\perp=\{0_V\}$ bada, orduan* $\dim(V)=\dim(W)+\dim(W^\perp)$ *betetzen da. Ondorioz, $V=W\oplus W^\perp$.*

Frogapena. Demagun $n=\dim V$ dela. Izan bedi $\gamma=\{w_1,\dots,w_r\}\subseteq W$ azpiespazioaren oinarria. Badakigu $r\leqslant n$ dela. Gainera, $r=n$ bada, orduan $W=V$ dugu, hau da $\dim(V)=\dim(W)$; eta $W\cap W^\perp=\{0_V\}$ baldintzatik ondorioztatuko dugu $V^\perp=\{0\}$ dela. Bereziki, $V=V\oplus\{0\}$ tribialki betetzen da.

Orokortasunik galdu gabe, demagun $r<n$ dela. Orain, γ oinarria V-ren oinarri bateraino luzatuko dugu: $\beta=\{w_1,\dots,w_r,v_{r+1},\dots,v_n\}$. Gure helburua $\dim(W^\perp)=n-r$ dela frogatzea da. Gogoratu, definizioz, W-ren ortogonala honako azpiespazio hau dela:

$$W^\perp=\{v\in V\mid b(v,w)=0\ \forall\, w\in W\}. \tag{5.5}$$

Edozein bektore $v\in V$ emanda, $M_\beta(b)=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ bada,

$$\begin{aligned} v\in W^\perp &\iff b(w_i,v)=0 \qquad \forall\, i=1,\dots,r,\\ &\iff [w_i]_\beta^t\cdot M_\beta(b)\cdot[v]_\beta=0 \qquad \forall\, i=1,\dots,r,\\ &\iff \begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{r1}&\dots&a_{rn}\end{pmatrix}\cdot[v]_\beta=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.6}$$

dugu. Horregatik, (5.6). ekuazioan agertzen den matrizeari $\tilde{A}$ deitzen badiogu, (5.6). ekuaziotik $\dim(W^\perp)=\dim(V)-\mathrm{rg}(\tilde{A})$ dela ondorioztatuko dugu. Heinaren balioa maximoa dela ikusteko, beste forma bilineal simetriko bat definituko dugu orain; b-ren murrizketa, alegia. Hau da,

$$\begin{array}{rccc} b\restriction_{W\times W}\colon & W\times W & \longrightarrow & K\\ & (w_1,w_2) & \longmapsto & [w_1]_\beta^t\cdot M_\beta(b)\cdot[w_2]_\beta. \end{array}$$

Ohartu, $w_1, w_2 \in W$ badira, $[w_i]_\beta$ bektoreen azken $(n-r)$ osagaiak zero direla. Hau da,

$$\begin{array}{rccc} b\restriction_{W\times W}\colon & W\times W & \to & K \\ & (w_1,w_2) & \longmapsto & [w_1]_\gamma^t \cdot M_\gamma(b\restriction_{W\times W})\cdot [w_2]_\gamma \end{array}$$

dugu, non

$$M_\gamma(b\restriction_{W\times W}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_r(K)$$

den. Gertatzen dena $W\cap W^\perp = \{0_V\}$ baldintzatik $M_\gamma(b\restriction_{W\times W}) \in \mathrm{GL}_r(K)$ dela ondorioztatu ahal izatea da, $b(w,w)=0$ baldintza betetzen duen $w\in W$ bektoretik existitzen ez delako. Hau da, $W\cap W^\perp=\{0_V\}$ baldintzak $b\restriction_{W\times W}$ forma ez-endekatua dela diosku. Orduan, 5.2.12. lemaren bidez, $M_\gamma(b\restriction_{W\times W}) \in \mathrm{GL}_r(K)$ dela esan dezakegu. Beraz, bere heina r da, eta $M_\gamma(b\restriction_{W\times W})$ matrizea $\tilde{A}\in \mathrm{M}_{rn}(K)$ matrizearen azpimatrizea denez, $\tilde{A}$ matrizearen heina ere r da.

Beraz, $\dim(W^\perp) = n - \mathrm{rg}(\tilde{A}) = n-r$ dela frogatu dugu, eta, W azpiespazioaren eta bere ortogonalaren arteko ebaketa tribiala denez, $W+W^\perp$ azpiespazioa batura zuzena da. Hori dela eta,

$$\begin{aligned} \dim(W+W^\perp) &= \dim(W\oplus W^\perp) = \dim(W)+\dim(W^\perp) \\ &= r+(n-r) = n = \dim(V) \end{aligned}$$

dugu, hau da, $V = W\oplus W^\perp$ betetzen da. □

Baldin eta $W=\langle w\rangle$ azpiespazioa 1 dimentsiokoa bada, orduan, $W\cap W^\perp=\{0_V\}$ baldintza eta $b(w,w)\neq 0$ baldintza baliokideak dira.

5.2.16. Teorema. *Izan bitez $b\colon V\times V\to K$ forma bilineal simetrikoa eta V dimentsio finituko bektore-espazioa. Demagun K-ren karakteristika bi ez dela. Orduan, existitzen da V-ren oinarria, b-rekiko ortogonala dena.*

Frogapena. Espazioaren dimentsioaren gaineko indukzioa erabiliko dugu. Oinarrizko kasua $\dim(V)=1$ tribiala da. Kasu hori hutsa da, ezer ez dugulako egin behar edozein $\beta\subseteq V$ espazioaren oinarri b-rekiko ortogonala dela egiaztatzeko.

Demagun, orain, emaitza egia dela edozein forma bilineal simetrikotarako $b'\colon W\times W\to K$, W espazioaren dimentsioa gehienez $n-1\geqslant 1$ denean, eta demagun $\dim(V)=n$ dela.

Forma bilineal simetrikoa forma nulua bada, ez dago ezer frogatzeko, edozein V-ren oinarri forma bilineal nuluarekiko ortogonala da eta. Ez bada forma bilineal nulua, 5.2.5. lemari esker badakigu gutxienez bektore ez-isotropo bat, e_1 izena emango dioguna, existitzen dela. Bektore horrek $\langle e_1\rangle \cap e_1^\perp = \{0\}$ baldintza betetzen du (ez-isotropo izatearren); beraz, 5.2.15. proposizioa aplikatuz gero, $\dim(e_1^\perp)=n-1$ da eta $V=\langle e_1\rangle\oplus e_1^\perp$ ondoriozta dezakegu.

Har dezagun orain b forma bilinealaren $e_1^\perp\leqslant V$ azpiespazioarekiko $b'\colon e_1^\perp\times e_1^\perp\to K$ murrizketa; hau da, $w_1,w_2\in e_1^\perp$ bektore guztietarako, $b'(w_1,w_2)=b(w_1,w_2)$ betetzen da. Beraz, b' ere forma bilineala da. Indukzio-hipotesiagatik, badakigu $e_1^\perp$ espazioaren b'-rekiko γ oinarri ortogonala existitzen dela. Espazioaren dimentsioa $n-1$ denez, oinarrian $n-1$ bektore daude, eta jarri $\gamma=\{e_2,\dots,e_n\}$.

Amaitzeko, $\{e_1\}\cup\gamma=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}\subseteq V$ multzoa b-rekiko oinarri ortogonala dela egiaztatuko dugu orain. Lehenengo eta behin, multzoa linealki independentea da, $\{e_2,\dots,e_n\}\subseteq e_1^\perp$ azpiespazioaren oinarria delako, eta $e_1\notin e_1^\perp$ delako. Bigarrenenik,

$$n-1=\dim\langle e_2,\dots,e_n\rangle < \dim\langle e_1,e_2,\dots,e_n\rangle \leqslant n.$$

Hori dela eta, $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}\subseteq V$ espazioaren oinarria da. Ikusiko dugu orain b-rekiko oinarri ortogonala dela. Oinarria eraikitzeko moduagatik, $i=2,\dots,n$ indize guztietarako $b(e_1,e_j)=0$ dugu.

Gainera, $i, j = 2, \dots, n$ indize desberdin guztietarako, $b'(e_i, e_j) = b(e_i, e_j) = 0$ dugu, $\{e_2, \dots, e_n\}$ oinarria b'-rekiko ortogonala delako.

□

5.2.16. teoreman edozein forma bilineal simetrikori matrize diagonal bat elkar dakiokeela frogatu dugu, gorputzaren karakteristika bi ez denean.

5.2.17. Korolarioa. *Baldin eta $A \in \mathrm{M}_n(K)$ matrize simetrikoa bada eta K-ren karakteristika bi ez bada, A matrizea matrize diagonal batekin kongruentea da; hau da, $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ existitzen da, non $P^t AP$ diagonala den.*

5.2.18. Adibidea. Adibide honetan ulertuko dugu zergatik $p = 2$ zenbaki lehena zenbaki oso xelebrea den. Izan bitez $K = \mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, bi elementu dituen gorputza, eta $V = K^2$, 0.4.3. adibidean sortu genuena. Kontsidera dezagun

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{F}_2)$$

matrize simetrikoa. Ikusi dugun bezala, matrizeak honako forma bilineal simetriko hau definitzen digu:

$$\begin{array}{rccc} b\colon & {\mathbb{F}_2}^2 \times {\mathbb{F}_2}^2 & \to & \mathbb{F}_2. \\ & \left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{t} \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{t} \end{pmatrix} \end{array}$$

Ikusiko dugu, orain, V espazioan ez dela forma bilineal horrekiko oinarri ortogonalik existitzen. Existituko balitz, $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ existituko litzateke, zeinetarako $P^t \left(\begin{smallmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{smallmatrix}\right) P$ matrizea diagonala litzatekeen. Frogatuko dugu hori ezinezkoa dela, edozein matrize

$$P = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$$

hartuta:

$$\begin{aligned} P^t \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{c} & \bar{a} \\ \bar{d} & \bar{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{ca} + \overline{ac} & \overline{cb} + \overline{ad} \\ \overline{da} + \overline{bc} & \overline{bd} + \overline{bd} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{2ac} & \overline{ad + bc} \\ \overline{ad + bc} & \overline{2bd} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{0} & \overline{ad + bc} \\ \overline{ad + bc} & \bar{0} \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\det(P) = \overline{ad + bc} \\ \text{delako}}} \det(P) \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

P matrizea alderanzgarria izatearren ($\det(P) \neq \bar{0}$ bada, aukera bakarra $\det(P) = \bar{1}$ da). Hau da, ez da $\beta \subseteq V$ existitzen, non $M_\beta(b)$ matrizea diagonala den.

Honako nozio hau ondo definituta dago, 5.1.8. teoremagatik: baldin eta A, B matrizeak forma bilineal berari elkartutako bi matrize badira, orduan, $B = P^t AP$ dugu, $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ izanik. Ondorioz, $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(A)$ dugu.

5.2.19. Definizioa. Izan bedi b forma bilineala. Esango dugu b-ren *heina* b-ri elkartutako edozein matrizeren heina dela.

Nahiz eta b forma bilineal simetrikoari elkartzen zaion matrize diagonala ez den bakarra, b-ri elkartu dakizkiokeen matrize diagonal guztiek heina bera dute, eta, beraz, diagonalean nuluak ez diren eta nuluak diren elementuen kopuru berdinak dituzte. Beraz, oinarri ortogonaletako bektore ezisotropoen kopurua bat dator $\mathrm{rg}(b)$ balioarekin eta bektore isotropoen kopurua $n - \mathrm{rg}(b)$ balioarekin.

Horrez gain, $K = \mathbb{R}$ bada, orduan $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ oinarri ortogonala berrordena daiteke honako hau lortzeko: $p \in \{1, \ldots, \mathrm{rg}(b)\}$ batentzat, $b(v_i, v_i) > 0$ da $1 \leqslant i \leqslant p$ guztietarako eta $b(v_i, v_i) < 0$ da $p + 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{rg}(b)$ guztietarako.

5.2.20. Teorema. Sylvesterren inertzia-legea. *Izan bitez $\mathbb{R}$-gaineko eta dimentsio finituko V bektore-espazioa eta $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa. Orduan, $b(v_i, v_i) > 0$ baldintza betetzen duten oinarriko bektoreen p kopurua (eta ondorioz, $b(v_i, v_i) < 0$ baldintza betetzen dutenen kopurua ere bai) ez dago aukeratutako V-ren oinarri ortogonalaren menpe; hau da, V-ren oinarri ortogonal guztietan p kopuru hori berdina da.*

Atala definizio eta emaitza batzuk batuz amaituko dugu. Horien frogapenak berehalakoak dira; normalean, definizioetan oinarrituak.

5.2.21. Definizioa. Izan bedi $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetriko erreala. Demagun V-ren edozein oinarri ortogonal hartuz, $b(v_i, v_i) > 0$ baldintza betetzen duten oinarriko bektoreen kopurua p dela. Esango dugu, $(p, \mathrm{rg}(b) - p)$ bikotea b-ren *signatura* dela. Normalean, $\mathrm{sig}(b)$ idatziko dugu.

Aurretik ikusitako guztiagatik, b forma bilineal simetriko erreal baten signatura $(p, \mathrm{rg}(b) - p)$ bikotea izango da, non p balioa b-rekin elkartutako edozein matrize diagonalek diagonalean dituen elementu positiboen kopurua den.

5.2.22. Korolarioa. *Izan bitez $\mathbb{R}$-gaineko eta n dimentsioko V bektore-espazioa, $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa eta $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa. Orduan, A matrizea b formari elkartuta dago, baldin eta soilik baldin $\mathrm{sig}(b_A) = \mathrm{sig}(b)$, non $b_A\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aplikazioa A matrizeak definitutako forma bilineal simetrikoa den.*

5.2.23. Korolarioa. *Izan bitez $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ bi matrize simetriko. Bi matrizeak kongruenteak dira, baldin eta soilik baldin $\mathrm{sig}(b_A) = \mathrm{sig}(b_B)$ bada.*

5.2.24. Definizioa. Izan bedi $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa. Baldin eta $v \in V$ bektore guztietarako, $b(v, v) \geqslant 0$ betetzen bada, *b positiboki definitua* dela esango dugu; eta *b negatiboki definitua* dela esango dugu, aldiz, $v \in V$ guztietarako, $b(v, v) \leqslant 0$ denean.

Era berean, *b hertsiki positiboki definitua* dela esango dugu, $v \in V \backslash \{0_V\}$ guztietarako, $b(v, v) > 0$ denean, eta *b hertsiki negatiboki definitua* dela esaten da, $v \in V \backslash \{0_V\}$ guztietarako, $b(v, v) < 0$ denean.

5.2.25. Teorema. (Sylvesterren irizpidea). *Izan bedi A matrize erreala. Orduan, A matrizea hertsiki positiboki definitua den b forma bilineal simetriko erreal bati elkartutako matrizea da, baldin eta soilik baldin A matrizea simetrikoa bada eta bere minore printzipalak positiboak badira.*

Azkenik, simetrikoki, honako hau daukagu.

5.2.26. Korolarioa. *Izan bedi A matrize erreala. Orduan, A matrizea hertsiki negatiboki definitua dagoen b forma bilineal simetriko bati elkartutako matrizea da, baldin eta soilik baldin A matrizea simetrikoa bada eta bere minore printzipalak ez-nuluak badira, aldizkako zeinukoak, eta lehen minorea negatiboa izanik.*

5.3 Forma koadratikoak

Izan bitez K gorputza, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eta

$$Q_n := \{p \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid p \text{ polinomioaren monomio guztiak 2. mailakoak dira}\}.$$

Adibidez, $x^2+3xy+7xz+2z^2$ polinomioa Q_3-ren elementua da, baina $x^2+3xy+7x$ ez, lehenengo mailako monomioa dagoelako. Horrelako polinomioak bigarren mailako *polinomio homogeneoak* direla esaten da.

5.3.1. Definizioa (Forma koadratikoak). Izan bitez $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eta K-ren gaineko n dimentsioko V bektore-espazioa. Espazio horren β oinarria finkatuz gero, $q \in Q_n$-ko elementu bakoitzak honako aplikazio hau definitzen du:

$$\begin{array}{rccc} q\colon & V & \to & K, \\ & v & \mapsto & q([v]_\beta) \end{array} \qquad \forall\, v \in V. \tag{5.7}$$

Aplikazio horri *forma koadratiko* deritzo.

Forma koadratikoak ez dira linealak, bigarren mailako polinomioak baitira. Adibidez, aipatutako $q = x^2 + 3xy + 7xz + 2z^2 \in Q_3$ polinomioa hartuta,

$$q\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = (\lambda x)^2 + 3(\lambda x)(\lambda y) + 7(\lambda x)(\lambda z) + 2(\lambda z)^2 = \lambda^2 q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

berdintzara ailegatzen gara. Matrizialki,

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

idatzi dezakegu.

5.3.2. Adibidea. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineala, non $M_\kappa(b) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ den (kontuz, forma bilineal hori ez da simetrikoa). Orain, $v \in \mathbb{R}^3$ bektorea hartzen badugu, non $[v]_\kappa = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ den,

$$\begin{aligned} b(v,v) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x + 3z \\ 2y \\ 2x + 2z \end{pmatrix} \\ &= x^2 + 3xz + 2y^2 + 2xz + 2z^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 5xz. \end{aligned}$$

Beraz, b forma bilinealak aurreko ekuazioan agertzen den itxurako forma koadratiko bat ematen digu; hau da, $q(v) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 5xz$.

Aurreko adibidea orokortu daiteke, hau da, edozein $b\colon V \times V \to k$ forma bilinealek $q_b\colon V \to K$ forma koadratiko bat zehazten du, $q_b(v) = b(v,v)$ definituz. Are gehiago, baldin eta b forma bilineala bada eta b^+ bere zati simetrikoa (5.4.20. ariketa egin), orduan $q_b = q_{b^+}$ beteko da.

5.3.3. Definizioa. Izan bitez V dimentsio finituko bektore-espazioa eta $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa. Esango dugu *b-ri elkartutako forma koadratikoa* $q_b\colon V \to K$ aplikazioa dela, $v \in V$ guztietarako, $q_b(v) := b(v,v)$ izanik.

5.3.2. adibidean forma bilineal bati elkartutako forma koadratikoa aurkitu dugu. Orain, bi forma bilineal desberdinek forma koadratiko bera defini dezaketela ikusiko dugu adibide baten bidez. Hori gertatzeko, ekuazioan agertzen diren bi zenbakiek iradokitzen digute gorputzaren karakteristikak bi izan beharko lukeela.

5.3.4. Adibidea. Har ditzagun $K = \mathbb{F}_2$ eta $V = K^2$ (beraz, $\operatorname{char}(K) = 2$ betetzen da). Izan bitez $b_1\colon V \times V \to K$ eta $b_2\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoak,

$$M_\kappa(b_1) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \qquad M_\kappa(b_2) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

elkartutako matrizeak dauzkatenak. Hasteko, argi dago b_1 eta b_2 forma bilineal desberdinak direla, elkartutako matrizeak desberdinak direlako. Izan ere,

$$b_1(e_1+e_2,e_2)=(\bar{1}\quad\bar{1})\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{0}\\ \bar{1}\end{pmatrix}=(\bar{1}\quad\bar{0})\begin{pmatrix}\bar{0}\\ \bar{1}\end{pmatrix}=\bar{0}$$

eta

$$b_2(e_1+e_2,e_2)=(\bar{1}\quad\bar{1})\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\ \bar{1}&\bar{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{0}\\ \bar{1}\end{pmatrix}=(\bar{0}\quad\bar{1})\begin{pmatrix}\bar{0}\\ \bar{1}\end{pmatrix}=\bar{1}$$

betetzen da; hau da, $b_1(e_1+e_2,e_2)\neq b_2(e_1+e_2,e_2)$. Forma koadratikoen garapenak eginda, ikus dezakegu $q_1(x,y)=q_2(x,y)=x^2$ dugula, hau da, forma koadratiko bera sortu dugula.

Baldin eta gorputzaren karakteristika bi ez bada, ordea, aurreko egoera ezin da eman. Are gehiago, forma bilineal simetrikoen eta forma koadratikoen artean bijekzio bat existitzen dela frogatuko dugu. Horrek inplikatzen du, beraz, forma koadratiko bat emanda, forma bilineal simetriko bat eraikitzeko gai izango garela, hasierako forma koadratikoa definitzen duena. Emaitza hori frogatzeko, honako emaitza hau erabilgarria egingo zaigu.

5.3.5. Teorema. *Izan bedi $q\colon V\to K$ forma koadratikoa. Orduan, V-ren β oinarri bat existitzen da, non q-ren adierazpena koordenatuetan karratuen batura den, hau da, non*

$$q(v)=a_{11}{x_1}^2+\ldots+a_{nn}{x_n}^2,\qquad [v]_\beta=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

erakoa den.

Frogapena. Lehen egin dugun bezala, adierazi q forma koadratikoa matrizialki:

$$q\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&\ldots&x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&\frac{a_{12}}{2}&\ldots&\frac{a_{1n}}{2}\\ \frac{a_{21}}{2}&a_{22}&\ldots&\frac{a_{2n}}{2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{a_{n1}}{2}&\frac{a_{n2}}{2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

eta jarraitu 5.2.16. teoremaren frogapena. □

5.3.6. Teorema. *Izan bedi V dimentsio finituko K-gaineko bektore-espazioa eta demagun* $\operatorname{char}(K)\neq 2$ *dela. Orduan,*

$$\begin{array}{lccc}\eta\colon & \mathcal{B}_s(V) & \longrightarrow & Q_{\dim(V)},\\ & b & \longmapsto & q_b\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{lccc}\xi\colon & Q_{\dim(V)} & \longrightarrow & \mathcal{B}(V),\\ & q & \longmapsto & \xi(q)(v,w):=\frac{1}{2}\big(q(v+w)-q(v)-q(w)\big)\end{array}$$

aplikazioak ondo definituta daude eta bijektiboak dira.

Frogapena. Argi dago $\eta\colon \mathcal{B}(V)\to Q_{\dim(V)}$ aplikazioa ondo definituta dagoela (hau da, $\eta(b)\in Q_{\dim(V)}$ dugula). Simetrikoa dela ikustea berehalakoa da.

Orain, $\xi(q)$ lehenengo osagaian lineala dela egiaztatuko dugu: izan bitez $\beta\subset V$ 5.3.5. teoreman agertzen den oinarria eta $v_1,v_2,w\in V$ bektoreak, non

$$[v_1]_\beta=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix},\qquad [v_2]_\beta=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix},\qquad [w]_\beta=\begin{pmatrix}\nu_1\\ \vdots\\ \nu_n\end{pmatrix}$$

diren. Orduan, 5.3.5. teorema erabiliz,

$$\begin{aligned}\xi(q)(v_1+v_2,w) &= \frac{1}{2}\big(q(v_1+v_2+w)-q(v_1+v_2)-q(w)\big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\lambda_i+\mu_i+\nu_i)^2-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\lambda_i+\mu_i)^2-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\nu_i^2\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\lambda_i^2+\mu_i^2+\nu_i^2+2\lambda_i\mu_i+2\lambda_i\nu_i+2\mu_i\nu_i)-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\lambda_i^2+\mu_i^2+2\lambda_i\mu_i)-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\nu_i^2\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\lambda_i\nu_i+\mu_i\nu_i)\end{aligned}$$

berdintzara ailegatuko gara. Horrez gain, antzeko eran

$$\begin{aligned}\xi(q)(v_1,w)+\xi(q)(v_2,w) &= \frac{1}{2}\big(q(v_1+w)-q(v_1)-q(w)+q(v_2+w)-q(v_2)-q(w)\big)\\ &= \ldots = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\lambda_i\nu_i+\mu_i\nu_i)\end{aligned}$$

dugu. Amaitzeko, badin eta $\rho\in K$ eskalarra bada,

$$\xi(q)(\rho v_1,w)=\frac{1}{2}\big(q(\rho v_1+w)-q(\rho v_1)-q(w)\big)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(\rho\lambda_i)\nu_i=\rho\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda_i\nu_i=\rho\xi(q)(v_1,w).$$

Beraz, $\xi(q)$ lehenengo osagaian lineala da. Bigarrenean ere lineala dela egiaztatzeko, egindako kalkuluak errepikatu ditzakegu.

Bijektiboak direla frogatzeko, ikus dezagun

$$\eta\circ\xi(b)=b\quad\forall\, b\in\mathcal{B}(V),\qquad\qquad \xi\circ\eta(q)=q\quad\forall\, q\in\mathcal{Q}_{\dim(V)}$$

betetzen direla:

$$\eta\circ\xi(q)=\eta\big(\xi(q)\big)=\frac{1}{2}\big(q(v+v)-q(v)-q(v)\big)=\frac{1}{2}\big(4q(v)-2q(v)\big)=q(v),$$

eta

$$\xi\circ\eta(b)=\xi\big(q_b\big)=\frac{1}{2}\big(q_b(v+w)-q_b(v)-q_b(w)\big)=\frac{1}{2}\big(b(v+w,v+w)-b(v,v)-b(w,w)\big)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{5.4.3. ariketa}}}{=}b(v,w).$$

Beraz, bi aplikazioak bijektiboak dira. □

Bereziki, $q\colon V\to K$ forma koadratikoa emanda, $\mathrm{char}(V)\neq 2$ denean, $b\colon V\times V\to K$ forma bilineal simetriko bat (eta bakar bat!) existitzen da, zeinetarako $q=q_b$ betetzen den. Azken teoremaren esanahia da forma koadratikoek eta forma bilineal simetrikoek «nozio bera» adierazten dutela. Beraz, forma bilineal simetrikoetarako definitu dugun guztia forma koadratikoetarako defini dezakegu. Bereziki,

5.3.7. Definizioa. Izan bedi b forma bilineal simetrikoari elkartutako $q\colon V\to K$ forma koadratikoa. Esango dugu q forma koadratikoaren *heina* b-ren heina dela. Era berean, q forma koadratikoaren *signatura* b-ren signaturari deritzo.

Azkenik, q forma koadratikoaren adierazpena karratuen batura soilaren bidez emanda dagoenean, q-ren heina bat dator batura horretako koefiziente ez-nuluen kopuruarekin; q-ren signatura, berriz, $(p,\mathrm{rg}(b)-p)$ izango da, p batura horretako koefiziente positiboen kopurua izanik.

5.4 Ariketak

5.4.1. Ariketa. Honako aplikazio hauetatik azter ezazu zein diren $\mathbb{R}^2$ gaineko forma bilinealak:

i. $b((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - 3x_1x_2$.

ii. $b((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1$.

iii. $b((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1$.

iv. $b((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + y_1$.

Aurreko forma bilinealetatik, zein dira simetrikoak?

5.4.2. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$b(v,w) := x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2, \qquad \forall\, v,w \in \mathbb{R}^3,\ [v]_\kappa = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ [w]_\kappa = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

eran definituta dagoen forma bilineal simetrikoa.

i. Aurki ezazu oinarri kanonikoareriko b-ri elkartutako matrizea, baita $\{v_1,v_2,v_3\}$ oinarriarekiko elkartutako matrizea ere,

$$[v_1]_\kappa = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [v_2]_\kappa = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [v_3]_\kappa = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

izanik. Zein erlazio dago aurreko bi matrizeen artean?

ii. Kalkula ezazu b aplikazioaren nukleoa.

iii. Kalkula itzazu $\langle w_1,w_2\rangle$ eta $\langle w_3\rangle$ azpiespazioen ortogonalak,

$$[w_1]_\kappa = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [w_2]_\kappa = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [w_3]_\kappa = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

izanik.

iv. Aurki ezazu b-rekiko ortogonala den oinarri bat. Zein da b-ri oinarri horrekiko elkartutako matrizea?

5.4.3. Ariketa (Polarizazio-identitatea). Izan bedi $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa. Egiazatatu

$$b(v,w) = \frac{1}{2}\big(b(v+w,v+w) - b(v,v) - b(w,w)\big)$$

betetzen dela, $v,w \in V$ edozein izanik. Non erabiltzen da forma bilineala simetrikoa dela?

5.4.4. Ariketa. Izan bitez $b\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa, $\mathbb{R}^4$-ko oinarri kanonikoarekiko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

elkartutako matrizea daukana, eta $W := \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leqslant \mathbb{R}^4$ azpiespazioa.

i. Aurkitu $W^\perp$ azpiespazioa definitzen duten ekuazioak.

ii. Egiaztatu $W \cap W^\perp = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ betetzen dela.

iii. Aurkitu $V^\perp$ (non $V = \mathbb{R}^4$ den).

iv. Aurkitu $W^\perp$-ren bektore isotropo guztiak.

5.4.5. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa, non oinarri kanonikoarekiko elkartutako matrizea honako hau den:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Aurkitu b-rekiko ortogonala den oinarri bat.

ii. Zein da b-ren signatura?

5.4.6. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa, non oinarri kanonikoarekiko elkartutako matrizea honako hau den:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i. Aurkitu b-rekiko ortogonala den oinarri bat.

ii. Aurkitu $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ matrize bat, zeinentzat P^tAP matrize diagonala den, diagonaleko balioak 1 edo -1 izanik. Zein da b-ren signatura?

5.4.7. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa, oinarri kanonikoarekiko matrize elkartua

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

izanik.

i. Kalkulatu b-ri elkartutako D matrize diagonala, diagonaleko balio ez-nuluak 1 edo -1 izanik, eta $\mathbb{R}^3$-ren β oinarria non $M_\beta(f) = D$ den.

ii. Zein da b-ren nukleoa?

iii. Elkartuta al dago $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea b-ri? Eta $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea? Eta $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matrizea?

5.4.8. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa, non oinarri kanonikoarekiko elkartutako matrizea honako hau den:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Eman nulua ez den $v \in \mathbb{R}^3$ bektoren baten adibidea, non $b(v,v) = 0$ den. Bektore hori b-rekiko ortogonala den oinarriren batean egon al daiteke?

ii. Kalkulatu b-rekiko ortogonala den oinarri bat eta eman b-ri elkartutako matrizea oinarri horrekiko.

5.4.9. Ariketa. Izan bedi $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ matrizea. Aurkitu A-rekin kongruentea den D matrize diagonal bat, diagonaleko balio ez-nuluak 1 edo -1 izanik, baita $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ matrize alderanzgarria (non $D = P^t A P$ den) ere.

5.4.10. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa, non $\mathbb{R}^3$-ren $\beta = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ oinarriarekiko elkartutako matrizea ondokoa den:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i. Oinarri kanonikoarekiko b-ri elkartutako matrizea kalkulatu gabe, aurkitu b-ri elkartutako D matrize diagonala, diagonaleko balio ez-nuluak 1 edo -1 izanik, eta β' oinarria, non $M_{\beta'}(b) = D$ den.

ii. Kalkulatu esplizituki $b((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$.

5.4.11. Ariketa. Izan bedi b, $\mathbb{R}^3$-ren forma bilineala, non $\beta = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\}$ oinarria b-rekiko ortonormala den.

i. Kalkulatu $(1,1,0)$ bektorea barne duen oinarri ortogonal bat.

ii. Aurkitu b-ri elkartutako matrizea oinarri kanonikoarekiko.

5.4.12. Ariketa. Laburtu honako forma koadratiko hauek karratuen batura batera:

i. $q(x,y,z) = xy + xz + yz$.

ii. $q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 4xz - 4yz$.

5.4.13. Ariketa. Izan bitez $V = P_2(\mathbb{R}) = \{f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f(x)) \leqslant 2\}$ bektore- espazioa eta $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ aplikazioa, $f(p(x),q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$ adierazpenaren bitartez definitua.

i. Frogatu b forma bilineal simetriko ez-endekatua eta positiboki definitua dela.

ii. Aurkitu V espazioaren $\mathbb{R}$-oinarri ortonormal bat.

5.4.14. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ honako era honetan definituta dagoen forma bilineala:

$$b((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3.$$

i. Kalkulatu b formaren signatura.

ii. Deskonposatu $V = \mathbb{R}^3$ bektore-espazioa U eta W azpiespazio ortogonalen batura zuzena bezala, b formarekiko U azpiespazioan positiboki definituta eta W azpiespazioan negatiboki definituta izanik.

5.4.15. Ariketa. Aztertu, λ parametroaren balioen arabera, zein den honako A matrize honek zehaztutako $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma bilinealaren signatura:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

5.4.16. Ariketa. Har dezagun $\mathbb{C}^n$ espazioa $\mathbb{C}$-ren gaineko bektore-espaziotzat, eta

$$\begin{array}{rccc} H\colon & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}, \\ & (v,w) & \longmapsto & \sum_{j=1}^n z_j \overline{w_j} \end{array} \qquad \forall\, v = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

non $\overline{a+bi} := a - bi$ den.

i. Frogatu $H\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ lehenengo osagaian aplikazio lineala dela.

ii. Lehenengo osagaian lineala den arren, frogatu H ez dela forma bilineala.

5.4.17. Ariketa. Izan bedi K gorputza. Frogatu $\det\colon K^2 \times K^2 \to K$, non

$$\begin{array}{rccc} \det\colon & K^2 \times K^2 & \to & K, \\ & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{array}$$

forma bilineala dela. Simetrikoa al da?

5.4.18. Ariketa. Izan bedi

$$\mathcal{P}_2 := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p \text{ polinomioaren maila gehienez } 2 \text{ da}\}.$$

i. Frogatu $\mathcal{P}_2$ multzoa $\mathbb{R}$-ren gaineko bektore-espazioa dela, eta $\beta := \{1, x, x^2\}$ espazioaren oinarria dela.

ii. Frogatu $b(p,q) := \int_0^1 p(x)q(x)dx$ edozein $p, q \in \mathcal{P}_2$ bektoretarako definitutako funtzioa forma bilineal simetrikoa dela.

iii. Aurkitu $M_\beta(b)$ matrizea.

5.4.19. Ariketa. Izan bitez K gorputza, V espazioa K-ren gaineko bektore-espazioa, non $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ finitua den, eta $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ espazioaren oinarria. Frogatu

i. $\mathcal{B}(V) := \{b\colon V \times V \to K \mid b \text{ forma bilineala da}\}$ multzoa K-ren gaineko bektore-espazioa dela.

ii. $\varphi\colon \mathcal{B}(V) \to \mathrm{M}_n(K)$ aplikazioa, edozein $b \in \mathcal{B}(V)$ elementutarako $\varphi(b) := M_\beta(b)$ definitua dena, aplikazio lineala dela.

iii. $\psi\colon \mathrm{M}_n(K) \to \mathcal{B}(V)$ aplikazioa, edozein $A \in \mathrm{M}_n(K)$ elementutarako $\psi(A) := b_A$ definitua dena (non $b_A\colon V \times V \to K$ forma bilinealak $b_A(v,w) = [v]_\beta^t A [w]_\beta$ betetzen duen, edozein $v, w \in V$ bektoretarako), aplikazio lineala dela.

iv. $\varphi\big(\psi(A)\big) = A$ matrize guztietarako, eta $\psi\big(\varphi(b)\big) = b$ forma bilineal guztietarako.

Ondorioztatu azken puntutik $\mathcal{B}(V)$ eta $\mathrm{M}_n(K)$ bektore-espazioak isomorfoak direla. Bereziki, $\mathcal{B}(V)$ espazioaren dimentsioa $\dim_K\big(\mathcal{B}(V)\big) = n^2$ da.

5.4.20. Ariketa. $b\colon V \times V \to K$ forma bilineala *antisimetrikoa* da, $b(v,w) = -b(w,v)$ bada bektore guztietarako. Baliokidea dena, forma bilineala antisimetrikoa da $M_\beta(b)$ matrizea antisimetrikoa bada, hau da, $M_\beta(b)^t = -M_\beta(b)$ bada.

i. Gorputzaren karakteristika bi ez bada (baliokidea dena, $2 \neq 0$ badugu K gorputzean), frogatu $b(v,v) = 0$ betetzen dela edozein b forma bilineal antisimetrikotarako.

Orain ikusiko dugu b edozein forma bilineal $b^+ + b^-$ moduan deskonposa daitekeela, non b^+ forma bilineal simetrikoa den eta b^- antisimetrikoa. Hori egiteko, K gorputzean $2 \neq 0$ betetzen dela ziurtatu behar dugu (frogatu nahi dugun emaitza ez da egia gorputzaren karakteristika bi denean):

ii. b forma bilineala bada eta gorputzaren karakteristika bi ez bada, frogatu honako modu honetan definitutako aplikazioak ($v, w \in V$ bektore guztietarako)

$$b^+(v,w) := \frac{1}{2}\Big(b(v,w) + b(w,v)\Big), \qquad b^-(v,w) := \frac{1}{2}\Big(b(v,w) - b(w,v)\Big)$$

forma bilinealak direla, bata simetrikoa eta bestea antisimetrikoa, eta egiaztatu $b(v,w) = b^+(v,w) + b^-(v,w)$ dela.

iii. Gorputzaren karakteristika bi izango balitz, zer ezin izango genuke egin (edo: non apurtuko litzateke azken puntuko ebazpena?)?

5.4.21. Ariketa. Izan bitez p zenbaki lehena eta $n \geqslant 2$ zenbaki arrunta.

i. Kalkulatu $|\mathrm{M}_n(\mathbb{F}_p)|$, hau da $\mathrm{M}_n(\mathbb{F}_p)$ multzoaren kardinalitatea.

ii. Kalkulatu $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)|$.

5.4.22. Ariketa. Izan bitez $K \in \{\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5\}$ gorputza, $V = K^2$ bektore-espazioa, $A = \left(\begin{smallmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(K)$ matrizea, eta $b\colon V \times V \to K$ forma bilineal simetrikoa, A matrizeak definitzen duena.

Erantzun honako galdera hauek kasu bakoitzean, $K = \mathbb{F}_3$ denean eta $K = \mathbb{F}_5$ denean:

i. Existitzen al da b-rekiko V-ren oinarri ortogonala?

ii. Aurkitu $P \in \mathrm{GL}_2(K)$ matrizea, non P^tAP diagonala den, diagonaleko balioak $\pm\bar{1}$ izanik.

iii. Zenbat matrize $P \in \mathrm{GL}_2(K)$ existitzen dira, aurreko atala betetzen dutenak?

iv. Existitzen al da b-rekiko V-ren oinarri ortonormala?

6. kapitulua

Espazio euklidearrak

Aurreko gaian, dimentsio finituko E espazio bektoriala eta horren gainean definitutako b forma bilineal bat emanda, b-rekiko ortogonala den oinarri bat existitzen dela ikusi dugu. Gai honetan, E-ren gainean definituriko forma bilineala simetrikoa eta hertsiki positiboa izango da, eta *biderketa eskalar* izena emango diogu, $\langle , \rangle$ edo $\cdot$ bidez adieraziko duguna. Modu horretan, $(E, \langle , \rangle)$ bikotea *espazio euklidearra* dela esango dugu. Bereziki, biderketa eskalarra erabiliz, bektoreen norma (nolabait, horien tamaina neurtuko duena) definituko dugu.

Gai honetan aztertuko ditugun endomorfismoak, hasteko, endomorfismo *autoadjuntuak* izango dira, eta frogatuko dugu existitzen dela E-ren oinarri ortonormal bat non endomorfismo horiei elkartutako matrizea simetrikoa den. Gainera, endomorfismo autoadjuntuek balio propio errealak dituztela ikusiko dugu. Gero, biderketa eskalarra «gordetzen» duten endomorfismoak aztertuko ditugu, *isometriak* deiturikoak. Azken atalean, $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$-ko isometrien sailkapenak eman eta emaitza horiek frogatuko ditugu.

6.1 Biderketa eskalarra eta norma

6.1.1. Definizioa. Izan bedi E dimentsio finituko $\mathbb{R}$-espazio bektoriala. Esango dugu $b\colon E \times E \to \mathbb{R}$ erako aplikazioa *biderketa eskalarra* dela, b forma bilineal simetrikoa eta hertsiki positiboki definitua denean; hau da, b simetrikoa denean eta, $v \in E$ guztietarako,

i. $b(v, v) \geqslant 0$;

ii. $b(v, v) = 0$, baldin eta soilik baldin $v = 0_E$ bada.

Baldin eta b biderketa eskalarra bada, $b(v, w)$ adierazpenaren ordez $v \cdot w$ edo $\langle v, w \rangle$ adierazpenak erabiltzen dira. Guk bigarrena erabiliko dugu gehienetan. Hortaz, b biderketa eskalar batek honako baldintza hauek betetzen ditu, $u, v, w \in E$ bektore guztietarako eta $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ eskalar guztietarako:

i. $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$;

ii. $\langle w, \lambda u + \mu v \rangle = \lambda \langle w, u \rangle + \mu \langle w, v \rangle$;

iii. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$;

iv. $\langle v, v \rangle \geqslant 0$, eta $\langle v, v \rangle = 0$, baldin eta soilik baldin $v = 0_E$.

6.1.2. Adibidea. Ikus ditzagun pare bat adibide:

1. $\mathbb{R}^n$ multzoaren gaineko biderketa eskalar estandarra,

$$(x_1,\dots,x_n)\cdot(y_1,\dots,y_n)=x_1y_1+\dots+x_ny_n$$

definitua dena, biderketa eskalarra da.

2. Izan bedi C multzoa 5.1.12. adibidean definitua. Hau da, $\mathbb{R}$-ren $[a,b]$ multzotik $\mathbb{R}$-ra doazen funtzio jarraituen multzoa. Ikusi dugu C bektore-espazioa dela $\mathbb{R}$ gorputzaren gainean. Izan bedi $b\colon C\times C\to\mathbb{R}$ honako era honetan definitutako funtzioa:

$$b(f,g):=\int_a^b f(x)g(x)dx,\qquad \forall\, f,g\in C.$$

Orduan, ikusi dugu b forma bilineala dela. Gainera, b simetrikoa eta hertsiki positiboki definitua da

$$b(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=b(g,f)\quad\text{eta}\quad b(f,f)=\int_a^b f(x)^2dx\geqslant 0$$

betetzen baitira.

6.1.3. Oharra. Izan bedi E dimetsio finituko bektore-espazioa $\mathbb{R}$-ren gainean eta b bertan definituriko forma bilineala. Orduan, $b=\langle\,,\,\rangle$ biderketa eskalarra bada, $\ker(b)=E^\perp=\{0_E\}$ da, eta, ondorioz, b ez-endekatua da.

Baldin eta $\langle\,,\,\rangle\colon E\times E\to\mathbb{R}$ biderketa eskalarra bada eta $W\leqslant E$, orduan $\langle\,,\,\rangle$ aplikazioa $W\times W$ azpiespaziora murriztuta ere biderketa eskalarra da, $\langle\,,\,\rangle\colon W\times W\to\mathbb{R}$.

6.1.4. Definizioa. Izan bitez $\mathbb{R}$-gaineko eta dimentsio finituko E bektore-espazioa eta $\langle\,,\,\rangle\colon E\times E\to\mathbb{R}$ biderketa eskalarra. Esango dugu $(E,\langle\,,\,\rangle)$ bikotea *bektore-espazio euklidearra* edo laburtzeko asmoz, *espazio euklidearra* dela.

Kasu horretan, $v\in E$ bektorearen *norma*, $\|v\|$ bidez adierazten dena, honako hau da:

$$\|v\|:=\sqrt{\langle v,v\rangle}.$$

Ohartu v bektore guztietarako norma ondo definituta dagoela, $\langle v,v\rangle\geqslant 0$ baita. Are gehiago, v bektore guztietarako $\|v\|\geqslant 0$ betetzen da eta $\|v\|=0$ da, baldin eta soilik baldin $v=0$ bada.

6.1.5. Adibidea. Biderketa eskalar estandarrak $\mathbb{R}^n$ espazio euklidearrean definitutako normari *norma euklidearra* deritzo: $\|(x_1,\dots,x_n)\|=\sqrt{{x_1}^2+\dots+{x_n}^2}$. Ohartu $\mathbb{R}$ espazio euklidearrean, norma euklidearra balio absolutuarekin bat datorrela, eta, aldiz, $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazio euklidearretan, bektorearen moduluarekin.

Antzeko moduan, $(C,\langle,\rangle)$ bikotea bektore-espazio euklidearra da, eta $f\in C$ bada, f-ren norma honako era honetan definituta dago:

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b f(x)^2dx}.$$

6.1.6. Teorema (Cauchy-Schwarz-en desberdintza). *Izan bedi $(E,\langle\,,\,\rangle)$ espazio euklidearra. Orduan, $v,w\in E$ bektore guztietarako, $|\langle v,w\rangle|\leqslant\|v\|\|w\|$ desberdintza betetzen da.*

Frogapena. Izan bitez $\lambda\in\mathbb{R}$ eta $v,w\in E$. Orduan,

$$\begin{aligned}0\leqslant\langle\lambda v+w,\lambda v+w\rangle&=\langle\lambda v,\lambda v\rangle+\langle\lambda v,w\rangle+\langle w,\lambda v\rangle+\langle w,w\rangle\\&=\lambda^2\langle v,v\rangle+2\lambda\langle v,w\rangle+\langle w,w\rangle=\lambda^2\|v\|^2+2\lambda\langle v,w\rangle+\|w\|^2.\end{aligned}\tag{6.1}$$

(6.1). ekuazioan agertzen den parabolak gehienez erro erreal bat du. Orduan,

$$4\langle v, w\rangle^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leqslant 0$$

dugu, edo, baliokideki, $\langle v, w\rangle^2 \leqslant \|v\|^2\|w\|^2$. Horregatik, $|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\|\,\|w\|$ ondorioztatzen da. □

Cauchy-Schwarz-en desberdintza honako era honetan idatz dezakegu:

$$-\|v\|\,\|w\| \leqslant \langle v, w\rangle \leqslant \|v\|\,\|w\|, \qquad \forall\, v, w \in V. \tag{6.2}$$

6.1.7. Teorema. *Biderketa eskalar bati loturiko normak honako hauek betetzen ditu, $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $v, w \in E$ guztietarako:*

i. $\|v\| \geqslant 0$.

ii. $\|v\| = 0$*, baldin eta soilik baldin* $v = 0_E$.

iii. $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$.

iv. *Minkowski-ren desberdintza:* $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

v. $\|v + w\| \geqslant \big|\|v\| - \|w\|\big|$.

vi. *Paralelogramoaren legea:* $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$.

Frogapena. Lehenengo hiru atalak ebatz ditzala irakurleak ariketa modura. Orain, Cauchy-Schwarz-en desberdintza erabiliz, ikus dezagun $\|v + w\|^2 \leqslant (\|v\| + \|w\|)^2$ dela:

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \underbrace{2\langle v, w\rangle}_{\leqslant 2\|v\|\,\|w\|} + \|w\|^2 \leqslant \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Normak zenbaki erreal positiboak direnez, erro karratuak hartuz gero, $\|v+w\| \leqslant \|v\|+\|w\|$ desberdintza lortuko da.

Gainera, (6.3). ekuazioan $2\langle v, w\rangle \geqslant -2\|v\|\,\|w\|$ desberdintza erabiliz gero,

$$\begin{aligned}\|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \underbrace{2\langle v, w\rangle}_{\geqslant -2\|v\|\,\|w\|} + \|w\|^2 \geqslant \|v\|^2 - 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| - \|w\|)^2\end{aligned}$$

izango dugu. Aurreko moduan arrazoituz, desberdintza horretan erro karratuak hartuz, $\|v + w\| \geqslant \big|\|v\| - \|w\|\big|$ ondorioztatzen da. Azkenik, paralelogramaren legea normaren definiziotik egiaztatzen da. □

6.1.8. Definizioa. Izan bedi V bektore-espazio erreala. Baldin eta $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ aplikazio batek aurreko teoremako lehenengo lau propietateak betetzen baditu, aplikazio horri V-ren gaineko *norma* esaten zaio.

6.1.9. Teorema (**Pitagorasen teorema).** *Izan bitez $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra eta $v, w \in E$ edozein bektore. Orduan, v eta w biderketa eskalarrarekiko ortogonalak dira, $v \perp w$ idatzita, baldin eta soilik baldin $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$ betetzen bada.*

Frogapena. Idatzi, definizioa erabilita,

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + +2\langle v,w\rangle + \|w\|^2.$$

Hipotesia erabilita, emaitza ondorioztatzen da. □

6.1.10. Proposizioa. *Izan bitez $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra eta $U,W \leqslant E$ azpiespazioak. Honako hauek betetzen dira:*

i. $E = W \oplus W^\perp$ *da eta, ondorioz,* $\dim W^\perp = \dim E - \dim W$.

ii. $(W^\perp)^\perp = W$.

iii. $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ *eta* $(U\cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$.

Frogapena. Hasteko, ikus dezagun $W\cap W^\perp = \{0\}$ dela. Hartu $u \in W\cap W^\perp$ edozein. Definizioz $\langle u,u\rangle = 0$ da, eta, beraz, $u = 0$ da. Orain, 5.2.15. proposizioaren arabera, $E = W \oplus W^\perp$ betetzen da.

Bigarren propietateari dagokionez, definizioz, $W^\perp$ espazio bektoriala W-rekin perpendikularra den azpiespaziorik handiena da. Hortaz, $W \perp W^\perp$ izateak $W \subseteq (W^\perp)^\perp$ inplikatzen du. Gainera, $\dim W = \dim(W^\perp)^\perp$ denez, berdintza lortuko dugu.

Azkenik, ohartu $U,W \subseteq U+W$ direnez, $(U+W)^\perp \subseteq U^\perp, W^\perp$ beteko direla, eta beraz, $(U+W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$. Horrek partekotasun bat frogatzen du. Bigarren partekotasuna betetzen dela ikusteko, hartu $v \in U^\perp \cap W^\perp$ edozein bektore. Orduan, $u+w \in U+W$ guztietarako,

$$\langle v, u+w\rangle = \langle v,u\rangle + \langle v,w\rangle = 0$$

da. Ondorioz, $v \in (U+W)^\perp$ da; nahi bezala. Azken berdintza aurrekoetatik ondorioztatzen da, eta ariketa gisa utziko dugu.

□

6.2 Angeluak

Izan bitez $v,w \in E$ bi bektore ez-nulu; (6.2). ekuazioan agertzen den Cauchy-Schwarz-en desberdintzaren ondorioz, honako hau betetzen da:

$$-1 \leqslant \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} \leqslant 1.$$

Har ditzagun $\cos\colon [0,\pi] \to [-1,1]$ funtzio bijektiboa eta $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ funtzioa; kosinuaren alderantzizko funtzioa, alegia.

6.2.1. Definizioa. Izan bitez $v,w \in E$ bi bektore ez-nulu. Esango dugu v eta w bektoreek *osatutako angelua* honako zenbaki erreal hau dela:

$$\widehat{vw} := \arccos \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} \in [0,\pi].$$

6.2.2. Adibidea. Har ditzagun $\mathbb{R}^2$ bektore-espazioa eta $\cdot$ biderketa eskalar estandarra. Orduan, $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ eta $v = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ bektoreak badira,

$$\widehat{uv} = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

da.

Orokorrean, $\mathbb{R}^n$ biderketa eskalar estandarrekin hartuta, bertako edozein bi bektore ez-nulu perpendikularren arteko angelua $\frac{\pi}{2}$ izango da.

Ohartu $\mathbb{R}^n$ espazioan biderketa eskalar estandarra dugunean, bi bektoreek osatutako angelua bat datorrela bektore horiek osatzen duten angelu geometrikorik txikienarekin.

6.3 Oinarri ortonormalak

Atal honetan, espazio euklidearrak oinarri ortonormalak onartzen dituzten bektore-espazioak direla ikusiko dugu; hortik dator nozio horren garrantzia.

6.3.1. Teorema. *Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ zenbaki arrunta, $\mathbb{R}$-ren gaineko n dimentsioko E bektore-espazioa eta horren gaineko $b\colon E \times E \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa. Honako baieztapen hauek baliokideak dira:*

i. *b biderketa eskalarra da.*

ii. $\operatorname{sig}(b) = (n, 0)$ *da.*

iii. *b forma bilinealari I_n identitate matrizea elkar dakiokegu.*

iv. *b-rekiko E-ren oinarri ortonormala existitzen da.*

Frogapena. Honako hauek frogatuko ditugu: **i**. $\Rightarrow$ **iv**. ,**iv**. $\Rightarrow$ **ii**.($\Rightarrow$ **iii**.), **ii**. $\Rightarrow$ **i** eta **ii**. $\Leftrightarrow$ **iii**.. Berehalakoa da ikustea $\operatorname{sig}(b) = (n, 0)$ dela esatea eta b forma bilinealari I_n identitate-matrizea elkartu diezaiokegula ikustea balikodeak direla.

Demagun E-ren b-rekiko oinarri ortonormala existitzen dela, eta deitu β oinarri horri. Orduan, b-ri elkartutako matrizea β oinarriarekiko honako era honetakoa da:

$$\mathrm{M}_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

eta, beraz, $\operatorname{sig}(b) = (n, 0)$ da (eta b forma bilinealari I_n identitate-matrizea elkartu diezaiokegu).

Demagun $\operatorname{sig}(b) = (n, 0)$ dela. Orduan, existitzen da E-ren β oinarria, non b-ri elkartutako β-rekiko matrizea

$$\mathrm{M}_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

erakoa den. Orduan, $v \in E$ guztietarako, $b(v, v) = [v]_\beta^t M_\beta(b)[v]_\beta$ da. Suposa dezagun $[v]_\beta^t = (x_1, \dots, x_n)$ dela; orduan,

$$b(v, v) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geqslant 0,$$

litzateke. Hau da, b positiboki definitua da; alegia, b biderketa eskalarra.

Azkenik, hartu E-ren $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ oinarri ortogonal bat eta eraiki b-ri elkartutako matrizea β oinarriarekiko, hots, $A = (b(v_i, v_j))_{i,j}$. Orduan, f positiboki definitua (eta ez-endekatua denez), $b(v_i, v_i) > 0$ da $i \in \{1, \dots, n\}$ guztietarako. Orduan,

$$\beta' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{b(v_1, v_1)}} v_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{b(v_n, v_n)}} v_n \right\}$$

multzoa E-ren oinarri ortonormala da. □

Izan bedi $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra. Aurreko gaian ikusi genuenez, $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}\subset E$-ren oinarri ortogonala da

$$\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}0, & i\neq j \text{ bada,}\\ 1, & i=j \text{ bada,}\end{cases}$$

edo, baliokidea dena, biderketa eskalarrari elkartutako matrizea β oinarriarekiko matrize diagonala bada. Bereziki, β oinarri ortonormala bada, oinarriko bektore guztietarako $\|v_i\|=1$ betetzen da, eta biderketa eskalarrari elkartutako matrizea identitatea da.

6.3.2. Teorema. *Izan bitez $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra, $\beta=\{v_1,\dots,v_n\}$ horren oinarri ortonormala eta $v\in E$ edozein bektore. Orduan, $[v]_\beta=\begin{pmatrix}\langle v_1,v\rangle\\ \vdots\\ \langle v_n,v\rangle\end{pmatrix}$ dugu.*

Frogapena. Izan bitez $v\in V$ edozein eta $\lambda_i\in\mathbb{R}$ eskalarrak, $i=1,\dots,n$ guztietarako, non

$$v=\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_nv_n$$

den. Beraz,

$$\langle v_1,v\rangle=\langle v_1,\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_nv_n\rangle=\sum_{i=1}^n\langle v_1,\lambda_iv_i\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda_i\langle v_1,v_i\rangle=\lambda_1.$$

Era berean, egiaztatzen da $\lambda_i=\langle v_i,v\rangle$ betetzen dela $i\in\{2,\dots,n\}$ guztietarako. □

6.3.3. Lema. *Izan bitez $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra, eta $v,w\in E\backslash\{0\}$ nuluak ez diren bi bektore. Orduan, v eta $w-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}v$ bektoreak ortogonalak dira.*

Frogapena. Berehalakoa da,

$$\Big\langle v,w-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}v\Big\rangle=\langle v,w\rangle-\Big\langle v,\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}v\Big\rangle=\langle v,w\rangle-\frac{\langle v,w\rangle}{\langle v,v\rangle}\langle v,v\rangle=0$$

dugulako. □

Honako teorema honen frogapenean, $\langle\ ,\ \rangle$ ikurraren ordez $\cdot$ ikurra erabiliko dugu biderketa eskalarra adierazteko, bektore batzuek sortutako azpiespazioak ere erabili beharko baititugu.

6.3.4. Teorema. (Gram-Schmidt-en ortogonalizazio-metodoa). *Edozein $(E,\cdot)$ espazio euklidearretan oinarri ortonormalak existitzen dira. Are gehiago, $\{v_1,\dots,v_n\}$ espazioaren edozein oinarritatik abiatuz, $\{w_1,\dots,w_n\}$ oinarri ortogonala eraiki daiteke, non $w_1:=v_1$ den eta $i\in\{2,\dots,n\}$ indize guztietarako,*

$$w_i:=v_i-\frac{v_i\cdot w_1}{w_1\cdot w_1}w_1-\frac{v_i\cdot w_2}{w_2\cdot w_2}w_2-\cdots-\frac{v_i\cdot w_{i-1}}{w_{i-1}\cdot w_{i-1}}w_{i-1}\tag{6.4}$$

den. Ondorioz, $i\in\{1,\dots,n\}$ indize guztietarako, $w_i':=\frac{1}{\|w_i\|}w_i$ bada, $\{w_1',\dots,w_n'\}$ oinarri ortonormala da.

Frogapena. Indizearen gaineko indukzioz w_i bektoreak sortuko ditugu. Lehenengo eta behin, $w_1:=v_1$ definituko dugu. Kasu honetan, $\langle w_1\rangle=\langle v_1\rangle$ betetzen da.

Demagun honako bi baldintza hauek betetzen dituzten $w_1,\dots,w_{i-1}$ bektoreak dagoeneko sortu ditugula:

i. $w_1,\dots,w_{i-1}$ binaka ortogonalak dira.

ii. $\langle w_1,\dots,w_{i-1}\rangle=\langle v_1,\dots,v_{i-1}\rangle$ betetzen da.

Orain w_i bektorea sortuko dugu, eta aipatu ditugun bi baldintzak $\{w_1,\dots,w_i\}$ bektoreek betetzen dituztela egiaztatuko dugu. Sortuko dugun bektorea (6.4). ekuazioan definituta dago. Ekuazio horretan dakusagunez, $w_i \in \langle v_i, w_1,\dots,w_{i-1}\rangle$ dugu, hau da, $w_i \in \langle v_1,\dots,v_i\rangle$. Horregatik, $\langle w_1,\dots,w_i\rangle \leqslant \langle v_1,\dots v_i\rangle$. Beste alde batetik, (6.4). ekuaziotik ondoriozta dezakegu

$$v_i := \frac{v_i\cdot w_1}{w_1\cdot w_1}w_1 + \dots + \frac{v_i\cdot w_{i-1}}{w_{i-1}\cdot w_{i-1}}w_{i-1} + w_i,$$

hau da, $v_i \in \langle w_1,\dots,w_i\rangle$ dela. Horrez gain, badakigu $\langle w_1,\dots,w_{i-1}\rangle = \langle v_1,\dots,v_{i-1}\rangle$ betetzen dela; beraz, $\langle v_1,\dots,v_i\rangle \leqslant \langle w_1,\dots,w_i\rangle$ dugu. Hori dela eta,

$$\langle v_1,\dots,v_i\rangle = \langle w_1,\dots,w_i\rangle$$

frogatu dugu.

Orain, $\{w_1,\dots,w_n\}$ binaka ortogonalak direla frogatuko dugu. Bi indize $r, s < i$ hartuta, indukziohipotesiz $w_r\cdot w_s = 0$ betetzen da. Falta zaigun kasua, beraz, $r = i$ eta $s < i$ da. Kasu horretan,

$$\begin{aligned} w_i\cdot w_s &= \left(v_i - \frac{v_i\cdot w_1}{w_1\cdot w_1}w_1 - \dots - \frac{v_i\cdot w_{i-1}}{w_{i-1}\cdot w_{i-1}}w_{i-1}\right)\cdot w_s \\ &= v_i\cdot w_s - \frac{v_i\cdot w_1}{w_1\cdot w_1}w_1\cdot w_s - \dots - \frac{v_i\cdot w_{i-1}}{w_{i-1}\cdot w_{i-1}}w_{i-1}\cdot w_s \end{aligned} \tag{6.5}$$

dugu. (6.5). ekuazioan, $w_j\cdot w_s$ zero izango da $j \in \{1,\dots,i-1\}\backslash\{s\}$ indize guztietarako, $\{w_1,\dots,w_{i-1}\}$ bektoreak binaka ortogonalak baitira. Beraz, ekuazioa jarraituz,

$$w_i\cdot w_s = \dots = v_i\cdot w_s - \frac{v_i\cdot w_s}{w_s\cdot w_s}w_s\cdot w_s = v_i\cdot w_s - v_i\cdot w_s = 0$$

lortzen dugu. Horrek w_i eta w_s bektore ortogonalak direla esan nahi du, $s \in \{1,\dots,i-1\}$ indize guztietarako. Hau da, egiaztatu dugu $\{w_1,\dots,w_i\}$ bektoreak binaka ortogonalak direla.

Beraz, indukzioagatik, $\{w_1,\dots,w_n\}$ espazioaren oinarria ortogonala da. Bukatzeko, sortu dugun oinarriaren bektore bakoitza bere normaz zatitzen badugu, oinarri ortonormal bat aurkituko dugu:

$$\left\{\frac{1}{\|w_1\|}w_1,\dots,\frac{1}{\|w_n\|}w_n\right\}.$$

Ohartu zatiketa horiek egin ditzakegula espazioa euklidearra delako. □

Sylvester-ren irizpidea (6.3.6. teorema) frogatzeko, honako lema hau erabilgarria izango da. Matrizeen arteko kalkulu bat egingo dugu leman, 6.3.6. teoreman indukzio korapilatsuagoa saihesteko.

6.3.5. Lema. *Izan bedi* $A = \left(\begin{smallmatrix} B & a \\ a^t & b\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *matrize simetrikoa, non* $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ *(zutabe) bektore bat den,* $b \in \mathbb{R}$ *eskalar bat den, eta* $B \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ *matrize alderanzgarri simetriko bat den. Orduan,* $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *matrizea existitzen da, non* $P^t\cdot A\cdot P = \left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & \tilde{b}\end{smallmatrix}\right)$ *den.*

Gainera, baldin eta $\det(A) > 0$ *eta* $\det(B) > 0$ *badira, orduan* $\tilde{b} > 0$ *da.*

Frogapena. Izan bedi $v_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ bektorea B-ren i. zutabea, $i = 1,\dots,n-1$ indize guztietarako. Matrize hori alderanzgarria denez, $\{v_1,\dots,v_{n-1}\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ espazioaren oinarria da. Beraz, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ bada, $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ eskalarrak existitzen dira, non $a = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1}v_{n-1}$ den.

Hartu honako matrize alderanzgarri hau,

$$P := \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -\lambda_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -\lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),$$

eta honako berdintza hau betetzen dela egiazta daiteke:

$$P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix},$$

non $\tilde{b} = b - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i$ den. Beraz, lemaren lehenengo baieztapena betetzen da. Demagun, orain, $\det(A) > 0$ eta $\det(B) > 0$ ditugula. Orduan

$$\det\left(P^t \cdot A \cdot P\right) = \det(P)^2 \det(A) > 0. \tag{6.6}$$

Horrez gain, $P^t \cdot A \cdot P = \left(\begin{smallmatrix} B & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{smallmatrix}\right)$ denez,

$$\det\left(P^t \cdot A \cdot P\right) = \det \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix} = \tilde{b} \cdot \det(B) \tag{6.7}$$

dugu. Beraz, (6.6). eta (6.7). ekuazioak konparatuz, $\tilde{b} > 0$ ondorioztatzen dugu. □

6.3.6. Teorema (**Sylvester-ren irizpidea**). *Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ zenbaki arrunta, n dimentsioko E espazio bektoriala $\mathbb{R}$ gainean eta $b\colon E \times E \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa. Baldin eta $A = (a_{ij})$ matrizea b-ri elkartutako matrizea bada, defini ditzagun $i \in \{1, \dots, n\}$ guztietarako honako matrize hauek:*

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

Orduan, b biderketa eskalarra da, baldin eta soilik baldin $\det(A_i) > 0$ bada $i \in \{1, \dots, n\}$ indize guztietarako.

Frogapena. Izan bedi $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq E$ espazioaren oinarria, non $M_\beta(b) = A$ den. Edozein $i \in \{1, \dots, n\}$ baliotarako, definitu $E_i := \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ azpiespazioa eta hartu horren $\beta_i = \{v_1, \dots, v_i\}$ oinarria. Orduan, $b\restriction_{E_i}\colon E_i \times E_i \to \mathbb{R}$ forma bilinealari β_i-rekiko elkartutako matrizea honako hau da:

$$M_{\beta_i}(b\restriction_{E_i}) = A_i = \begin{pmatrix} b\restriction_{E_i}(v_1, v_1) & \dots & b\restriction_{E_i}(v_1, v_i) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b\restriction_{E_i}(v_i, v_1) & \dots & b\restriction_{E_i}(v_i, v_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Demagun b forma bilineala E gaineko biderketa eskalarra dela. Orduan, $b\restriction_{E_i}$ ere E_i gaineko biderketa eskalarra da, eta existituko da $\beta_i' \subseteq E_i$ espazioaren oinarri ortonormala. Oinarri horrekiko, $M_{\beta'}(b\restriction_{E_i})$ matrizea i tamainako I_i identitate- matrizea da. Gainera, $A_i = P^t \cdot I_i \cdot P = P^t \cdot P$ betetzen da, non $P = M_{\beta_i}^{\beta_i'}$ den. Ondorioz, P alderanzgarria izateagatik $\det(P) \neq 0$ denez,

$$\det(A_i) = \det(P^t P) = \left(\det(P)\right)^2 > 0$$

da. Hau da, $\det(A_i) > 0$ frogatu dugu, $i \in \{1, \dots, n\}$ guztietarako.
$\boxed{\Leftarrow}$ Demagun orain $\det(A_i) > 0$ dela, $i \in \{1, \dots, n\}$ indize guztietarako, eta ikus dezagun b biderketa eskalarra dela; hau da, ikus dezagun oinarri ortonormal bat existitzen dela. Hori $\dim(E)$-ren gaineko indukzioz frogatuko dugu.

Espazioaren dimentsioa bat bada, ez dago ezer frogatzeko. Demagun orain $\dim(E) = n > 1$ dela, eta demagun emaitza egia dela espazio baten dimentsioa n baino txikiagoa denean. Aurreko lema erabiliko dugu. Izan ere, hipotesiz b-ri elkartutako matrizea honako era honetan idatz dezakegu:

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & a \\ a^t & b \end{pmatrix}$$

non $b \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ eta $\det(A_{n-1}) > 0$ diren. Bereziki, $A_{n-1} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ matrize simetriko alderanzgarria da. Beraz, 6.3.5. lemari esker, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ matrizea existitzen da, non

$$P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & \tilde{b} \end{pmatrix}$$

den. Gainera, $\det(A) > 0$ denez, $\tilde{b} > 0$ dugu.
Indukzio-hipotesiz, A_{n-1} matrizeak definitzen duen forma bilineal simetrikoa, hau da,

$$b \restriction_{E_{n-1}} : E_{n-1} \times E_{n-1} \to \mathbb{R}$$

forma bilineala biderketa eskalarra da. Beraz, $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ matrizea existitzen da, non $Q^t \cdot A_{n-1} \cdot Q = I_{n-1}$ den. Amaitzeko, $\tilde{b} > 0$ denez, $\widetilde{Q} := \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\tilde{b}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ matrize alderanzgarria da. Hortaz,

$$(P\widetilde{Q})^t A (P\widetilde{Q}) = \widetilde{Q}^t \left(P^t A P\right) \widetilde{Q} = \begin{pmatrix} Q^t A_{n-1} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

dugu, hau da, A eta I_n kongruenteak dira, eta, beraz, b biderketa eskalarra da. □

6.3.7. Definizioa. Esango dugu $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ matrize *ortogonala* dela $A^t A = I_n$ baldintza betetzen bada.

Ohartu, A matrizea ortogonala bada, orduan $\det(A)^2 = 1$ dela; hau da, $\det(A) = \pm 1$ dela. Bereziki, A alderanzgarria da.

6.3.8. Lema. *$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ matrizea ortogonala da, baldin eta soilik baldin $A^{-1} = A^t$ bada.*

Frogapena. Berehalakoa da. □

6.3.9. Teorema. *Izan bitez $(E, \langle\,,\,\rangle)$ espazio euklidearra, $\beta \subseteq E$ oinarri ortonormala, eta $\beta' \subseteq E$ beste oinarri bat. Orduan, β' oinarri ortonormala da, baldin eta soilik baldin $M_\beta^{\beta'}$ matrize ortogonala bada.*

Frogapena. Notazioa errazteko, idatzi $P = M_\beta^{\beta'}$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Alde batetik, β oinarria ortonormala denez, $M_\beta(\langle\,,\,\rangle) = I_n$ da. Teorian ikusi bezala,

$$M_{\beta'}(\langle\,,\,\rangle) = (M_\beta^{\beta'})^t \cdot M_\beta(\langle\,,\,\rangle) \cdot M_\beta^{\beta'} = P^t \cdot I_n \cdot P$$

betetzen da. Beraz, β' oinarria ere ortonormala bada,

$$I_n = P^t \cdot I_n \cdot P = P^t \cdot P$$

dugu. Hortaz, definizioz, $P = M_\beta^{\beta'}$ matrizea ortogonala da.
$\boxed{\Leftarrow}$ Beste alde batetik, P matrizea ortogonala bada, $P^t P = I_n$ da. Orduan,

$$M_{\beta'}(\langle\,,\,\rangle) = P^t \cdot M_\beta(\langle\,,\,\rangle) \cdot P \underset{\substack{\uparrow \\ \beta \text{ oinarria ortonormala}}}{=} P^t I_n P = I_n,$$

hau da, $M_{\beta'}(\langle\,,\,\rangle) = I_n$ dugu. Beraz, β' oinarriak ere ortonormala izan behar du. □

6.3.10. Korolarioa. *Izan bedi $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Orduan, P matrizea ortogonala da, baldin eta soilik baldin matrize horren zutabeek $\mathbb{R}^n$-ren biderketa eskalar estandarrareriko oinarri ortonormala osatzen badute.*

6.4 Endomorfismo autoadjuntuak

Dagoeneko ikusi dugu espazio euklidearrek oinarri ortonormalak onartzen dituztela. Atal honetan espazio euklidearren endomorfismo berezi batzuk aztertuko ditugu: *endomorfismo autoadjuntuak* deiturikoak. Aplikazio lineal horien berezitasuna da, endomorfismo horiek oinarri ortonormal batekiko emanda badaude, elkartutako matrizea simetrikoa izatea; eta, alderantziz, endomorfismo simetriko bati oinarri ortonormal batekiko elkartutako matrizea simetrikoa dela.

Ikusiko dugun moduan, propietate horren ondorio zuzena izango da endomorfismo autoadjuntuak diagonalgarriak direla.

6.4.1. Definizioa. Izan bitez $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra eta $h\colon E \to E$ endomorfismoa. Esango dugu h *autoadjuntua* dela, baldin eta, $v, w \in E$ guztietarako, $\langle h(v), w\rangle = \langle v, h(w)\rangle$ betetzen bada.

Adibidez, ez da zaila ikustea $1_E, -1_E$ eta 0_E endomorfismo autoadjuntuak direla. Demagun $h\colon E \to E$ endomorfismoa autoadjuntua dela eta $W \leqslant E$ azpiespazio h*-aldagaitza* (hau da, $h(W) = W$) dela. Orduan, $h\restriction_W\colon W \to W$ aplikazioa ere endomorfismo autoadjuntua da.

6.4.2. Teorema. *Izan bitez $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra eta $\beta = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq E$-ren oinarri ortonormala. Orduan, $h \in \mathrm{End}(E)$ edozein endomorfismo autoadjuntua da, baldin eta soilik baldin h endomorfismoari elkartutako $M_\beta(h)$ matrizea, hau da $\begin{pmatrix}[h(v_1)]_\beta & \cdots & [h(v_n)]_\beta\end{pmatrix}$ matrizea, simetrikoa bada.*

Frogapena. Aurreko gaiko 5.1.6. teoreman frogatu bezala, honako berdintza hau betetzen da:

$$\langle v, h(w)\rangle = [v]_\beta^t M_\beta(\langle\ ,\ \rangle)[h(w)]_\beta, \qquad \forall\, v, w \in E.$$

Kasu honetan, β oinarria oinarri ortonormala denez, $M_\beta(\langle\ ,\ \rangle) = I_n$ dugu, eta, ondorioz,

$$\begin{aligned}\langle v, h(w)\rangle &= [v]_\beta^t [h(w)]_\beta \qquad\qquad \forall\, v, w \in E\\ &= [v]_\beta^t M_\beta(h)[w]_\beta\end{aligned} \tag{6.8}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Orain, $M_\beta(h)$ matrizea simetrikoa dela suposatuz gero, (6.8). ekuaziotik

$$\begin{aligned}\langle v, h(w)\rangle &= [v]_\beta^t M_\beta(h)[w]_\beta = [v]_\beta^t M_\beta(h)^t [w]_\beta \qquad\qquad \forall\, v, w \in E\\ &= \big(M_\beta(h)[v]_\beta\big)^t [w]_\beta = [h(v)]_\beta^t [w]_\beta = \langle h(v), w\rangle\end{aligned}$$

ondorioztatzen dugu, hau da, h endomorfismoa autoadjuntua dela.
$\boxed{\Rightarrow}$ Beste alde batetik, h endomorfismoa autoadjuntua bada, orduan,

$$[v]_\beta^t M_\beta(h)[w]_\beta = \langle v, h(w)\rangle = \langle h(v), w\rangle = [v]_\beta^t M_\beta(h)^t [w]_\beta, \qquad \forall\, v, w \in E. \tag{6.9}$$

Izan bitez $v = v_i$ eta $w = v_j$, non $i, j \in \{1, \dots, n\}$ desberdinak diren; (6.9). ekuaziotik, aukera horiekin $a_{ij} = a_{ji}$ dela lortzen dugu, non $M_\beta(h) = (a_{rs})$ den. Hau da, $M_\beta(h)$ matrizea simetrikoa da. □

Honako lema honetan matrize simetriko baten balio propio guztiak errealak direla frogatuko dugu; 6.4.4. korolarioan gauza bera ikusiko dugu endomorfismo autoadjuntuetarako.

6.4.3. Lema. *Izan bedi $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ matrize simetrikoa. Orduan, A-ren polinomio karakteristikoaren erro guztiak errealak dira.*

Frogapena. Idatz dezagun h-ren polinomio karakteristikoa deskonposatuta,

$$\chi_h(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n),$$

non $\lambda_i \in \mathbb{C}$ den indize $i = 1, \dots, n$ guztietarako. Polinomio karakteristikoaren erro guztiak errealak direla frogatuko dugu. Izan bedi λ aurreko erro horietako bat. Orduan, existitzen da nulua ez den bektore bat, $v \in \mathbb{C}^n$, non $Av = \lambda v$ den.[1] Berdintza hori gertatzen da, baldin eta soilik baldin $\overline{Av} = \overline{\lambda v}$ badugu, non $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ aplikazioa zenbaki konplexuen konjugatu funtzioa den. Gure matrizea erreala denez, $\overline{A} = A$ dugu, eta, ondorioz, $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Beraz, $v = \begin{pmatrix} x_1+\mathrm{i}y_1 \\ \vdots \\ x_n+\mathrm{i}y_n \end{pmatrix} \in V(\lambda) \subseteq \mathbb{C}^n$ ez-nulua bada, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ izanik, eta bereziki $\|v\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2} > 0$ bada,

$$\begin{aligned} v^t A\bar{v} &\underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ matrizea simetrikoa}}}{=} v^t A^t \bar{v} = (Av)^t \bar{v} = \lambda v^t \bar{v} = \lambda(x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2) \\ &= v^t \bar{\lambda}\bar{v} = \bar{\lambda} v^t \bar{v} = \bar{\lambda}(x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2). \end{aligned}$$

Hortaz,

$$\lambda(x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2) = \bar{\lambda}(x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2)$$

lortu dugu, non $x_1^2+y_1^2+\cdots+x_n^2+y_n^2$ zenbaki erreal positiboa den. Hori dela eta $\lambda = \bar{\lambda}$, hau da, $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Emaitza horren ondorio zuzena da honako hau.

6.4.4. Korolarioa. *Izan bitez $(E, \langle\,,\,\rangle)$ espazio euklidearra eta $h \in \mathrm{End}(E)$ endomorfismo autoadjuntua. Orduan, endomorfismoaren polinomio karakteristikoaren erro guztiak errealak dira.*

Frogapena. Endomorfismo baten polinomio karakteristikoa endomorfismo horri elkartutako edozein matrizeren polinomio karakteristikoa da, hau da $\chi_h(x) = \chi_{M_\beta(h)}(x)$. Beraz, 6.4.2. teoremaren arabera, $M_\beta(h)$ simetrikoa da, eta aurreko emaitzak nahi duguna frogatzen du. □

Hortaz, endomorfismo autoadjuntu baten balio propioak errealak izanik, horien azpiespazio propioen arteko erlazioa azalduko dugu.

6.4.5. Proposizioa. *Izan bitez $(E, \langle\,,\,\rangle)$ espazio euklidearra eta $h\colon E \to E$ endomorfismo autoadjuntua. Orduan:*

i. *h-ren balio propio ezberdinei dagozkien azpiespazio propioak elkarrekiko ortogonalak dira.*

ii. *$W \leqslant E$ azpiespazioa h-aldagaitza bada, $W^\perp$ ere h-aldagaitza da.*

Frogapena. Izan bitez λ_1 eta λ_2 endomorfismoaren bi balio propio desberdin. Orduan, gutxienez bietako bat zeroren desberdina da. Demagun, orokortasunik galdu gabe, $\lambda_1 \neq 0$ dugula. Hartu λ_1 eta λ_2 balio propioen azpiespazio propioak

$$V(\lambda_i) = \{v \in E \mid h(v) = \lambda_i v\}, \qquad i = 1, 2,$$

eta $v \in V(\lambda_1)\backslash\{0\}$ eta $w \in V(\lambda_2)\backslash\{0\}$ bi bektore ez-nulu. Orduan

$$\begin{aligned} \langle v, w\rangle &= \frac{1}{\lambda_1}\lambda_1\langle v, w\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle \lambda_1 v, w\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle h(v), w\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda_1}\langle v, h(w)\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\langle v, \lambda_2 w\rangle = \frac{1}{\lambda_1}\lambda_2\langle v, w\rangle. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Beraz, $\langle v, w\rangle \neq 0$ izango balitz, (6.10). ekuaziotik $1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ berdintza ondorioztatuko genuke. Hori absurdoa da, λ_1 eta λ_2 desberdinak direlako.

[1] Kontuz! Printzipioz erro horiek zenbaki konplexuak dira. Beraz, $Av = \lambda v$ idazteko, $v \in \mathbb{C}^n$ dela suposatu behar dugu.

Demagun, orain, $W \leqslant V$ azpiespazioa h-aldagaitza dela, eta izan bedi $v \in W^{\perp}$. Egiaztatu nahi dugu $h(v) \in W^{\perp}$ betetzen dela. Hori egia izateko,

$$\langle h(v), w\rangle = 0, \qquad \forall\, w \in W$$

izan behar dugu, eta hori betetzen da:

$$\langle h(v), w\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ h \text{ autoadjuntua}}}{=} \langle v, h(w)\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ h(w)=\tilde{w}\in W}}{=} \langle v, \tilde{w}\rangle = 0, \qquad \forall\, w \in W.$$

Beraz, $W^{\perp}$ azpiespazioa h-aldagaitza da. □

6.4.6. Teorema. *Izan bitez $(E, \langle\,,\,\rangle)$ espazio euklidearra eta $h \in \mathrm{End}(E)$ endomorfismo autoadjuntua. Orduan, h-ren bektore propioz osatutako E-ren oinarri ortonormala existitzen da.*

Frogapena. Frogapena $\dim(E) = n$ gaineko indukzioz egingo dugu.

Demagun E espazioaren dimentsioa bat dela eta hartu κ espazioaren oinarri kanonikoa. Orduan, $M_{\kappa}(h)$ matrizea diagonala da, eta amaitu dugu.

$\boxed{1, \ldots, n-1 \Rightarrow n}$ Ikusi berri dugun 6.4.4. lemari esker, h-ren polinomio karakteristikoa $\mathbb{R}$ gainean banatzen da, hau da,

$$\chi_h(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$$

idatz dezakegu, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ indize $i = 1, \ldots, n$ guztietarako. Izan bedi λ polinomio karakteristikoaren erro bat, eta bi kasu desberdinduko ditugu: $V(\lambda) = E$ edo $V(\lambda) \lneq E$, alegia.

Lehenengo kasua erraza da: $m(\lambda) = \dim V(\lambda) = \dim(E) = n$ betetzen denez, h endomorfismoak balio propio bakarra du, eta h diagonalgarria da. Orduan, $V(\lambda) = E$-ko bektorez osatutako $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ oinarria eraiki dezakegu $M_{\beta}(f)$ matrize diagonala delarik. Bereziki,

$$\tilde{\beta} = \left\{ \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \ldots, \frac{1}{\|v_n\|} v_n \right\}$$

h-ren bektore propioz osatutako E-ren oinarri ortonormala izango da, $\mathrm{M}_{\tilde{\beta}}(h) = I_n$ izanik.

Bigarren kasuan, $V(\lambda) \neq E$ dugu. Azpiespazio hori h-aldagaitza da, definizioz. Beraz, 6.4.5. Proposizioaren arabera, $V(\lambda)^{\perp}$ azpiespazioa ere h-aldagaitza da eta $E = V(\lambda) \oplus V(\lambda)^{\perp}$ dugu. Are gehiago, bi faktore horiek h-aldagaitzak direnez gero, h-ren murrizketak $h\restriction_{V(\lambda)} \in \mathrm{End}\big(V(\lambda)\big)$ eta $h\restriction_{V(\lambda)^{\perp}} \in \mathrm{End}\big(V(\lambda)^{\perp}\big)$ endomorfismoak dira, eta, beraz, $h = h\restriction_{V(\lambda)} \oplus h\restriction_{V(\lambda)^{\perp}}$ dugu. Orain, $\dim V(\lambda) < n$ eta $\dim V(\lambda)^{\perp} < n$ betetzen direnez, indukzio-hipotesiz, $V(\lambda)$ espazioan $h\restriction_{V(\lambda)}$-ren bektore propioz osatutako oinarri ortonormala existitzen da, γ_1, eta $V(\lambda)^{\perp}$ espazioan $h\restriction_{V(\lambda)^{\perp}}$-ren bektore propioz osatutako oinarri ortonormala existitzen da, γ_2.

Erraz ikusten da $\gamma := \gamma_1 \cup \gamma_2 \subseteq E$ multzoa h-ren bektore propioz osatutako oinarri ortonormala dela. □

6.4.7. Korolarioa. *Edozein matrize simetriko erreal diagonalgarria da. Are gehiago, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ simetrikoa bada, $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ matrize ortogonala existitzen da, non $P^{-1}AP$ matrizea diagonala den.*

Frogapena. Berehalakoa da. □

6.4.8. Korolarioa. *Izan bitez V dimentsio finituko bektore-espazioa eta $b\colon V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineal simetrikoa. Orduan, b forma bilinealaren signatura b-ri elkartutako edozein A matrizeren balio propio positibo eta balio propio negatiboen kopurua da (anizkoiztasunak kontuan hartuta).*

6.5 Isometria linealak

Atal honetan, biderketa eskalarra gordetzen duten endomorfismoak definitu eta horien propietate nagusiak emango ditugu.

6.5.1. Definizioa. Izan bedi $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra. Esango dugu $h\colon E \to E$ endomorfismoa E-ren *isometria (lineala)* dela, baldin eta biderketa eskalarra gordetzen badu, hau da, $v, w \in E$ guztietarako, $\langle h(v), h(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ bada.

6.5.2. Adibidea. Dimentsio finituko $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearrean, 1_E eta -1_E isometriak dira.

6.5.3. Proposizioa. *Izan bitez $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra eta $h\colon E \to E$ isometria. Orduan, h bijektiboa da.*

Frogapena. Nahikoa da h aplikazio injektiboa dela ikustea, $\dim(E) = \dim\ker(h) + \dim \mathrm{Im}(h)$ delako. Ikus dezagun $\ker(h) = \{0\}$ dela, hau da, $h(v) = 0$ izateak $v = 0$ derrigortzen duela.

Demagun $h(v) = 0$ dela. Hipotesiz, $0 = \langle h(v), h(v)\rangle = \langle v, v\rangle$. Hau da, $\langle v, v\rangle = 0$ betetzen denez eta $\langle\ ,\ \rangle$ biderketa eskalarra denez, $v = 0$ dela ondorioztatzen dugu.

Beraz, h endomorfismoa injektiboa da, eta, E dimentsio finitukoa izateagatik, suprajektiboa ere bai. □

6.5.4. Proposizioa. *Baldin eta $\lambda \in \mathbb{R}$ eskalarra isometria baten balio propioa bada, orduan $\lambda = \pm 1$ da.*

Frogapena. Demagun $h\colon E \to E$ isometria dela eta λ bere balio propioa dela. Orduan, $v \in E\backslash\{0\}$ bektore ez-nulua existitzen da, non $h(v) = \lambda v$ betetzen den. Isometriaren definizioa erabilita,

$$\langle v, v\rangle = \langle h(v), h(v)\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \lambda^2 \langle v, v\rangle$$

ondorioztatzen da, eta, beraz, $1 = \lambda^2$ dugu, $\langle v, v\rangle \neq 0$ da eta. □

6.5.5. Teorema. *Izan bitez $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra eta $h \in \mathrm{End}(E)$. Endomorfismo hori isometria da, baldin eta soilik baldin norma gordetzen badu; hau da, baldin eta soilik baldin $\|h(v)\| = \|v\|$ bada $v \in E$ guztietarako.*

Frogapena. Alde batetik, h isometria bada, orduan $v \in E$ bektore guztietarako,

$$\|h(v)\| = \sqrt{\langle h(v), h(v)\rangle} = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \|v\|$$

dugu, eta, beraz, norma gordetzen du.

Beste alde batetik, h aplikazioak norma gordetzen badu,

$$v, w \in E \text{ guztietarako, } \|v + w\| = \|h(v + w)\| \text{ beteko da.}$$

Orduan, $v, w \in E$ guztietarako,

$$\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2$$

eta

$$\begin{aligned}\|h(v + w)\|^2 &= \langle h(v), h(v)\rangle + 2\langle h(v), h(w)\rangle + \langle h(w), h(w)\rangle \\ &= \|h(v)\|^2 + 2\langle h(v), h(w)\rangle + \|h(w)\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\langle h(v), h(w)\rangle + \|w\|^2\end{aligned}$$

betetzen direnez, honako berdintza hau lortzen da:

$$\|v\|^2 + 2\langle h(v), h(w)\rangle + \|w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2.$$

Edo, baliokideki,

$$\forall\, v, w \in E, \quad \langle h(v), h(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Hau da, h isometria da. □

6.5.6. Adibidea. Izan bedi $\mathbb{R}^2$ espazio euklidearrean honako era honetan definituriko $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio lineala

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{guztietarako.}$$

Ohartu, $\|v\| = \|h(v)\|$ denez, h isometria lineala dela.

6.5.7. Teorema. *Izan bitez $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ espazio euklidearra eta $h \in \mathrm{End}(E)$. Baldin eta $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq E$ espazioaren oinarri ortonormala bada, honako baieztapen hauek baliokideak dira:*

1. *h isometria da.*
2. *$\beta' = \{h(v_1), \ldots, h(v_n)\} \subseteq E$ espazioaren oinarri ortonormala da.*
3. *$M_\beta(h)$ matrizea ortogonala da.*

Frogapena. Hasteko, nabaria da h isometria bada, orduan β' oinarri ortonormala dela, h aplikazioak biderkadura eskalarra eta norma gordetzen baititu.

Demagun, orain, β' oinarri ortonormala dela. Beraz, $M_\beta(\langle\ ,\ \rangle) = M_{\beta'}(\langle\ ,\ \rangle) = I_n$ dugu, β eta β' oinarriak $\langle\ ,\ \rangle$ biderketa eskalarrarekiko ortonormalak baitira.

Ohartu $M_\beta(h) = M_\beta^{\beta'}$ betetzen dela eta ipini $P = M_\beta^{\beta'}$. Orduan,

$$I_n = M_{\beta'}(\langle\ ,\ \rangle) = P^t M_\beta(\langle\ ,\ \rangle)P = P^t P$$

dugu, hau da, P matrizea ortogonala da.

Amaitzeko, demagun $M_\beta(h)$ matrizea ortogonala dela, eta ikus dezagun h endomorfismoa isometria dela. Beraz, izan bitez $v, w \in E$ edozein bi bektore. Honako hauek kalkula ditzakegu:

$$\langle h(v), h(w)\rangle = [h(v)]_\beta^t\, M_\beta(\langle\ ,\ \rangle)\, [h(w)]_\beta \underset{\substack{\uparrow \\ \beta \text{ oinarria } \langle\ ,\ \rangle\text{-rekiko ortonormala da}}}{=} \big(M_\beta(h)[v]_\beta\big)^t \big(M_\beta(h)[w]_\beta\big)$$

$$= [v]_\beta^t M_\beta(h)^t M_\beta(h)[w]_\beta \underset{\substack{\uparrow \\ M_\beta(h) \text{ matrizea ortogonala da}}}{=} [v]_\beta^t I_n [w]_\beta = \langle v, w\rangle.$$

Beraz, h isometria da. □

6.6 Isometria linealak $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazio euklidearretan

Atal honen helburua $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazio euklidearreko isometria linealak sailkatzea izango da.

6.6.1. Definizioa. Izan bitez $(\mathbb{R}^2, \cdot)$ espazio euklidearra, non $\cdot$ biderketa eskalar estandarra den, eta $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfismoa. Finka dezagun $\mathbb{R}^2$-ren $\kappa = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\}$ oinarri kanonikoa.

i. Esango dugu h endomorfismoa *ϑ angeluko biraketa* dela, baldin eta h-ri elkartutako κ-rekiko matrizea honako era honetakoa bada:

$$M_\kappa(h) = B_\vartheta := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \qquad \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Halaber, *h biraketa* dela esaten da, existitzen bada $\vartheta \in \mathbb{R}$ non h endomorfismoa ϑ angeluko biraketa den.

ii. Esango dugu *h zuzen bektorial batekiko erreflexioa* (edo *zuzen bektorial batekiko simetria ortogonala*) dela, baldin eta h-ri elkartutako κ-rekiko matrizea honako era honetakoa bada:

$$M_\kappa(h) = ER_\vartheta := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \qquad \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Ohartu $\det(B_\vartheta) = 1$ dela eta $\det(ER_\vartheta) = -1$ dela, ϑ balio guztietarako. Gainera, h zuzen bektorial batekiko erreflexioa bada, $h^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ dugu (hori ikusteko, kalkula ezazu ER_ϑ^2 matrizea). Ohartu, biraketak eta zuzen bektorial batekiko erreflexioak isometriak direla. Hortaz, honako teorema honen inplikazio bat ia frogatuta dago.

6.6.2. Teorema. *Izan bitez $\mathbb{R}^2$ espazio euklidearra eta $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfismoa. Orduan, h isometria da, baldin eta soilik baldin h honako era honetako aplikazioetako bat bada:*

i. *Identitate-aplikazioa da.*

ii. *Zuzen batekiko erreflexioa da.*

iii. *Simetria zentral da.*

iv. *Biraketa da.*

Frogapena. Nabaria da identitate-aplikazioa eta $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ simetria zentrala isometriak direla. Hortaz, teoremaren aurreko lerroei esker, inplikazio bat frogatuta dago.

Izan bedi $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfismoa eta finkatu $\mathbb{R}^2$-ren κ oinarri kanonikoa. Orduan, κ oinarri ortonormala denez $\mathbb{R}^2$-ko biderketa eskalar estandarrarekiko, $\mathrm{M}_\kappa(h)$ matrizea ortogonala da (ikusi 6.3.9. teorema). Hortaz, idatzi

$$A = \mathrm{M}_\kappa(h) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

non

$$\begin{aligned} (a_{11}, a_{21}) \cdot (a_{11}, a_{21}) &= a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ (a_{12}, 1_{22}) \cdot (a_{12}, a_{22}) &= a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ (a_{11}, a_{12}) \cdot (a_{12}, a_{22}) &= a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0, \end{aligned}$$

betetzen diren. Orduan, hartu $\alpha, \vartheta \in [0, 2\pi)$ eta jarri $a_{11} = \cos\vartheta$, $a_{12} = \cos\alpha$, $a_{21} = \sin\vartheta$ eta $a_{22} = \cos\alpha$ zeinak aurreko hiru berdintzak betetzen dituzten. Bereziki, hirugarren propietatea erabiliz,

$$0 = \cos\vartheta\cos\alpha + \sin\vartheta\sin\alpha = \cos(\vartheta - \alpha)$$

lortzen dugu. Hau da, $\vartheta - \alpha = k\frac{\pi}{2}$ berdintza bete behar da, $k \in \mathbb{Z}$ izanik. Bi kasu aztertuko ditugu orain.

Alde batetik, demagun $\alpha = \vartheta + \frac{\pi}{2}$ dela. Orduan,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \cos(\vartheta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin\vartheta & \sin(\vartheta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

da, eta, definizioz, h jatorrian zentratutako eta ϑ angeluko biraketa da.

Bestalde, demagun $\alpha = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ dela. Orduan,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \cos(\vartheta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin\vartheta & \sin(\vartheta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

da, eta, definizioz, h zuzen bektorial batekiko erreflexioa da.

Azkenik, $\vartheta = 0$ bada, $A = I_2$ identitate-matrizea da, eta $\vartheta = \pi$ bada, berriz, h simetria zentrala dela esaten da. □

6.6.3. Oharra. Aurreko frogapeneko bigarren kasuan, honako adierazpen hau lortu dugu:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eta bigarren berdinatzatik ondoriozta daiteke zuzen bektorial batekiko erreflexioa bat datorrela X ardatzarekiko simetria ortogonala, eta jatorrian zentratutako ϑ angeluko biraketaren arteko konposaketarekin.

Ohartu, baita ere, $A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$ kasuan soilik, matrize horrek bi balio propio erreal dituela: 1 eta -1, alegia. Orduan, A matrize diagonalgarria da eta $v_1 \in V(1)$ eta $v_2 \in V(-1)$ badira, orduan h-ri elkartutako $\beta = \{v_1, v_2\}$-rekiko matrizea honako itxura honetakoa da:

$$M_\beta(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Honako taula honetan $\mathbb{R}^2$-ko isometrien balio propien bidezko sailkapena laburtzen da:

$\mathbb{R}^2$-ko isometrien sailkapena		
Izena	$\dim V(1)$	$\dim V(-1)$
Identitatea	2	0
Zuzen batekiko erreflexioa	1	1
Simetria zentrala	0	2
Biraketa	0	0

Orain, $\mathbb{R}^3$ espazioko isometriak sailkatuko ditugu, eta, horretarako, honako emaitza hau erabiliko dugu.

6.6.4. Lema. *Izan bitez E dimentsio finituko espazio euklidearra eta $h\colon E \to E$ isometria. Demagun $U \subset E$ azpiespazioa h-aldagaitza dela; orduan, U-ren osagarri ortogonala, $U^\perp$, azpiespazio h-aldagaitza da.*

Frogapena. Frogatu nahi dugu $h(U^\perp) \subseteq U^\perp$ betetzen dela. Izan bedi, $v \in U^\perp$ edozein. Orduan, $u \in U$ guztietarako,

$$0 = u \cdot v = h(u) \cdot h(v)$$

betetzen da. Hortaz, $h(v) \in U^\perp$; nahi bezala. □

6.6.5. Teorema. *Baldin eta $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria bada, orduan h mota hauetako aplikazio bat da:*

i. *h (minus) identitate-aplikazioa da (jatorriarekiko erreflexioa).*

ii. *h zuzen batekiko erreflexioa da.*

iii. *h zuzen baten inguruko biraketa da.*

iv. *h plano batekiko erreflexioa (simetria ortogonala) da.*

v. *h zuzen baten inguruko biraketa baten eta plano batekiko erreflexio baten konposaketa da.*

Frogapena. Izan bedi h isometria lineala. Orduan, χ_f polinomio karakteristikoaren maila 3 denez, gutxienez erro erreal bat izango du; deitu $\lambda \in \mathbb{R}$. Gainera, ikusi dugu $\lambda = 1$ edo $\lambda = -1$ izan behar dela. Hartu λ-ri elkartutako $u \in \mathbb{R}^3$ bektore propioa, non $\|u\| = 1$ den. Eraiki $\{v_1, v_2\}$ bektoreak, u-ri ortogonalak eta $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ betetzen dutenak. Hau da, $\beta = \{u, v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^3$ oinarri ortonormala da. Orduan,

$$\mathrm{M}_\beta(h) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & d & e \end{pmatrix}$$

matrize ortogonala da. Definizioz, h-ren λ balio propio bakoitzerako, $V(\lambda)$ multzoa h-aldagaitza da. Bereziki, $V(1)$ azpiespazio propioa h-aldagaitza da. Gainera, $h(V(\lambda)^\perp) = V(\lambda)^\perp$ ere beteko da. Beraz, $h \restriction_{V(\pm 1)^\perp} : V(\pm 1)^\perp \to V(\pm 1)^\perp$ isometria lineala da. Ohartu $V(\pm 1)^\perp \cong \mathbb{R}^2$ denez, h aplikazioa $\mathbb{R}^2$-ko isometria gisa hartu dezakegula, eta, hortaz, aurreko emaitzako kasuak aztertuz, emaitza frogatu.

Hasteko, demagun h-ren balio propioa $\lambda = 1$ dela. Demagun, aurreko frogan bezala, $k = 1$ dela, eta idatz dezagun

$$A = \mathrm{M}_\beta(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Ohartu, kasu horretan, $\det A = 1$ beteko dela.

- $\vartheta = 0$ bada, $V(1) = \mathbb{R}^3$ da, eta h identitate-aplikazioa da.
- $\vartheta = \pi$ bada, $\dim V(1) = 1$ eta $\dim V(-1) = 2$ dira. Orduan, h isometria $V(1)$ zuzen bektorialarekiko erreflexioa da.
- $\vartheta \in [0, 2\pi)\backslash\{\pi\}$ bada, A matrizeak erro erreal bakarra dauka, $h \restriction V(1)^\perp$ biraketa izanik. Hortaz, h isometria $V(1)$ zuzenarekiko biraketa da.

Demagun, orain, $k = -1$ dela. Orduan,

$$A = \mathrm{M}_\beta(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

da, eta ohartu $\det A = -1$ dela. Orduan,

- $\vartheta = 0$ edo $\vartheta = \pi$ bada, $\dim V(1) = 2$ eta $\dim V(-1) = 1$ dira. Orduan, h isometria $V(1)$ planoarekiko simetria da.
- $\vartheta \neq 0, \pi$ bada, orduan $\dim V(1) = 1$ eta $\dim V(-1) = 2$ dira. Orduan, h isomteria $V(1)$ zuzenarekiko simetria da.

Emaitza frogatzeko, $\lambda = -1$ kasurako aurreko egoera guztiak aztertzea geratzen zaigu,

$$A = \mathrm{M}_\beta(h) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \cos\vartheta + k\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\vartheta & \sin\vartheta + k\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

izanik. Ohartu, ϑ-ren balio ezberdinetarako, askotan aurreko egoera berean egongo garela. Honako bi kasu berri hauek izango ditugu:

- $k = 1$ eta $\vartheta = \pi$ badira, $A = \mathrm{M}_\beta(h) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ da. Hortaz, $\dim V(-1) = 3$ da, eta h isometria jatorriarekiko biraketa da.
- $k = -1$ eta $\vartheta \neq 0, \pi$ badira, orduan, $A = \mathrm{M}_\beta(h) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$ itxurakoa da. Orduan, $\dim V(-1) = 1$ da eta h-ren beste balio propioak konplexuak dira; beraz, h isometria biraketa eta simetria baten arteko konposaketa da.

□

$\mathbb{R}^3$-ko isometrien sailkapena			
Izena	$\dim V(1)$	$\dim V(-1)$	$\dim(V(1) \oplus V(-1))^\perp$
Identitatea	3	0	
Zuzen batekiko erreflexioa	1	2	0
Plano batekiko erreflexioa	2	1	0
Jatorriarekiko erreflexioa	0	3	0
Zuzen batekiko biraketa	1	0	2
Biraketa eta simetria baten konposaketa	0	1	2

6.7 Ariketak

6.7.1. Ariketa. Izan bedi $\cdot$ forma $\mathbb{R}^3$ espazioko biderketa eskalar estandarra. Honako oinarri hauetatik abiatuz, aurkitu oinarri ortonormalak Gram-Schmidt-en metodoa erabiliz:

$$\beta = \{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\} \qquad \gamma = \{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}.$$

Zein dira $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ bektorearen koordenatuak, lortutako oinarri ortonormaletan?

6.7.2. Ariketa. Izan bedi $\cdot$ forma $\mathbb{R}^4$ espazioko biderketa eskalar estandarra. Honako azpiespazio hauetako bakoitzerako, aurkitu oinarri ortonormal bat:

$$U_1 = \langle\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\rangle, \qquad U_2 = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\},$$

$$U_3 = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z+t=0,\ x+y-z+t=0\}, \qquad U_3^{\perp}.$$

6.7.3. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, honako era honetan definitutako forma bilineala:

$$b(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}) := 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_3.$$

Egiaztatu b biderketa eskalarra dela, eta aurkitu b-rekiko ortonormala den

$$W = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 0\}$$

azpiespazioaren oinarri bat, Gram-Schmidt-en metodoa erabiliz.

6.7.4. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ honela definituta dagoen forma bilineala:

$$b(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}) := xx' - xy' + xz' - yx' + 2yy' + zx' + 3zz'.$$

Frogatu b biderketa eskalarra dela, eta aurkitu $\mathbb{R}^3$-ren oinarri bat, b-rekiko ortonormala dena.

6.7.5. Ariketa. Demagun $\mathbb{R}^3$-an $\cdot$ biderketa eskalarra dugula, eta $\beta = \{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\}$ oinarria biderketa eskalar horrekiko ortonormala dela.

i. Kalkulatu $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ biderketa eskalarraren adierazpen orokorra.

ii. Aurkitu $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ bektorearen proportzionala den bektore bat barne duen β' oinarri ortonormal bat. Egiaztatu β oinarritik β' oinarrira garamatzan matrizea ortogonala dela.

6.7.6. Ariketa. Izan bedi $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ honela definituta dagoen forma bilineala:

$$b(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}) := xx' - xz' + yy' - zx' + 2zz'.$$

i. Frogatu b biderketa eskalarra dela.

ii. Definizioa erabiliz, frogatu $h(x,y,z) := (y+z, -x+z, y)$ aplikazioa $(\mathbb{R}^3, b)$ espazioko isometria dela.

iii. Aurkitu biderketa eskalar horrekiko ortonormala den oinarri bat, eta egiaztatu oinarri horrekiko h isometriari elkartutako matrizea ortogonala dela.

6.7.7. Ariketa. Izan bedi $\cdot$ forma $\mathbb{R}^3$ espazioko biderketa eskalar estandarra. Frogatu

$$h(x,y,z) := (5x + 2y + 2z, 2x + 2y + z, 2x + y + 2z)$$

eran definituta dagoen $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismoa autoadjuntua dela, eta aurkitu $\mathbb{R}^3$-ren bektore propioz osatutako oinarri ortonormal bat. Zein erlazio dago h endomorfismoari oinarri horrekiko eta oinarri kanonikoarekiko elkartutako matrizeen artean?

6.7.8. Ariketa. Ortogonala den matrize baten bidez, diagonalizatu honako matrize simetriko hauek, hau da, aurkitu ondoko A matrize simetriko bakoitzarekin antzekoa den D matrize diagonal bat eta P matrize ortogonala, non $D = P^{-1}AP$ den:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

II. Atala

Geometria

7. kapitulua

Geometria afina

7.1 $\mathbb{R}^n$-ren egitura afina

Eskuliburuko aurreko atalean, $\mathbb{R}^n$ multzoak $\mathbb{R}$ gaineko bektore-espazio egitura duela ikusi dugu, eta, horregatik, bertako elementuak *bektore* gisa interpretatu ditugu. Senak, ordea, $\mathbb{R}^n$-ko elementuak *puntu* modura ikustera eraman gaitzake. Ohartu bi ikuspuntu horien artean desberdintasun nabariak daudela: bektoreen arteko batuketa definitu dugu, baina puntuen arteko batuketarik ez daukagu, adibidez.

Atal honetan, $\mathbb{R}^n$-ren bi ikuspuntu horiek bateratu nahiko ditugu; hau da, $\mathbb{R}^n$ multzo modura hartzen dugunean, horren elementuak puntuak izango dira, eta $\mathbb{R}^n$ espazio bektorialtzat hartzen dugunean, berriz, horren elementuak bektoreak izango dira. Are gehiago, $\mathbb{R}^n$-ko puntuak eta bektoreak erlazionatzen dituen erregela bat definituko dugu.

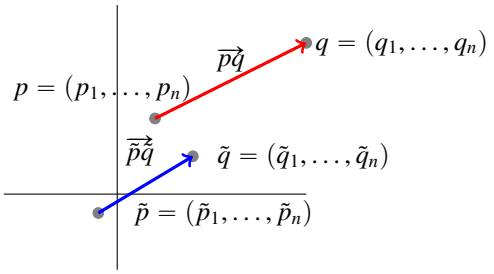
Esan bezala, $\mathbb{R}^n$ multzoan aurreko ikuspuntuak bateratu eta elkarrekin erlazionatzeko aukera daukagu, $\mathbb{R}^n$-k duen *egitura afina*ri esker, eta nozio hori definituz hasiko gara. Hurrengo helburua egitura afin hori «gordetzen»duten $\mathbb{R}^n$-ko azpimultzoak definitzea izango da; *azpiespazio afinak* deiturikoak. Horien propietate eta ezaugarri nagusiak aztertuko ditugu, eta, $\mathbb{R}^n$-ko bi azpiespazio afin emanda, horien arteko posizio erlatiboa zehazten ikasiko.

Notazioa. Aldi berean $\mathbb{R}^n$-ko puntu eta bektoreekin lan egingo dugunez, elkarren artean desberdintzeko, puntuak adierazteko p, q, r, ..., letra arruntak erabiliko ditugu, eta bektoreak adierazteko, berriz, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ..., letra gezidunak. Are gehiago, puntu baten osagaiak *lerroka* idatziko ditugu; adibidez, $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Hala ere, aurrerago definituko dugun moduan, puntu baten koordenatuak zutabeka idatziko ditugu (bektoreen koordenatuak bezala).

Geometrikoki, $\mathbb{R}^n$-ko bi puntu emanda, ez da zaila horiek *lotzen* dituen bektorea irudikatzea. Has gaitezen, bada, nozio hori matematikoki definitzetik.

7.1.1. Definizioa. Izan bitez $\mathbb{R}^n$ multzoko $p = (p_1, \ldots, p_n)$ eta $q = (q_1, \ldots, q_n)$ puntuak. Esango dugu, *p eta q puntuak lotzen dituen bektorea*, $\overrightarrow{pq}$ adieraziko duguna, honako $\mathbb{R}^n$-ko bektore hau dela:

$$\overrightarrow{pq} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}.$$



Notazioa. Demagun $\mathbb{R}^n$-ren bi puntu p, q ditugula, eta idatzi $\vec{v} = \overrightarrow{pq}$. Orduan, q puntua $q = p + \vec{v}$ moduan idatziko dugu. Era berean, $p + W$ adierazpena erabiliko dugu $\mathbb{R}^n$-ren honako azpimultzo hau adierazteko:

$$p + W = \{p + \vec{v} : \vec{v} \in W\} = \{q \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{pq} \in W\}. \tag{7.1}$$

Har dezagun $p \in \mathbb{R}^n$ bakoitzerako honako era honetan definituriko aplikazioa:

$$\begin{array}{rccc} \nu_p : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n. \\ & q & \mapsto & \overrightarrow{pq} \end{array} \tag{7.2}$$

Egiazta dezagun (7.2). ekuazioan definituriko ν_p aplikazioak honako propietate hauek betetzen dituela.

7.1.2. Propietateak. Izan bitez $p, q, r, \in \mathbb{R}^n$ edozein puntu. Orduan,

i. $\nu_p(q) = \nu_p(r) + \nu_r(q)$, hau da, $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq}$.

ii. ν_p aplikazioa bijektiboa da.

Frogapena. Izan bitez $p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n), r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ puntuak. Orduan, definizioz,

$$\nu_p(r) + \nu_r(q) = \begin{pmatrix} r_1 - p_1 \\ \vdots \\ r_n - p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1 - r_1 \\ \vdots \\ q_n - r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \nu_p(q)$$

berdintza betetzen da. Bigarren propietatea ikusteko, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ bektore bat emanda, froga dezagun existitzen dela $q \in \mathbb{R}^n$ puntu bat eta bakar bat, non $\nu_p(q) = \vec{v}$ den. Hasteko, har dezagun $q = p + \vec{v} = (p_1 + v_1, \ldots, p_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$ puntua, non $\overrightarrow{pq} = \vec{v}$ betetzen den. Bakartasuna ikusteko, demagun existitzen dela $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ puntu desberdin bat, non $\overrightarrow{pr} = \vec{v} = \overrightarrow{pq}$ den. Orduan,

$$\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - p_1 \\ \vdots \\ r_n - p_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ q_i - p_i = r_i - p_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ q_i = r_i.$$

Hau da, $q = r$ beteko da, eta q puntua bakarra da. □

7.1.3. Definizioa. Izan bitez $p \in \mathbb{R}^n$ puntua eta (7.2). ekuazioan agertzen den ν_p aplikazioa. Esango dugu $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \nu_p)$ hirukotea *espazio afina* dela.

Notazioa. Laburtzeko, $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \nu_p)$ hirukotea idatzi ordez, $\mathbb{R}^n$ espazio afina dela esango dugu (ν_p aplikazioa zein den garbi dagoen heinean).

Ohartu baliokidea dela, $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, $\nu_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio bijektiboa edo honako aplikazio hau definitzea:

$$\begin{array}{rccc} \nu\colon & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n. \\ & (p,q) & \mapsto & \overrightarrow{pq} \end{array} \tag{7.3}$$

7.1.4. Oharra. Espazio afinaren definizioa orokorragoa da. Izan bitez K gorputza, V bektore-espazioa K gorputzaren gainean eta A multzoa. Demagun, $a \in A$ guztietarako, $\nu_a \colon A \to V$ aplikazioa existitzen dela, zeinak 7.1.2. Propietateak zerrendako baldintzak betetzen dituen. Kasu horretan, esango dugu (A, V, ν_p) hirukotea *espazio afina* dela. Bereziki, $\mathbb{R}^n$-ren kasuan, $V = \mathbb{R}^n$ eta $A = \mathbb{R}^n$ hartu ditugu.

Azter ditzagun ν_p aplikazioak betetzen dituen beste hainbat propietate.

7.1.5. Proposizioa. *Izan bitez $p, q, r, s \in \mathbb{R}^n$. Orduan:*

i. *$\overrightarrow{pq} = \vec{0}$, baldin eta soilik baldin $p = q$ bada.*

ii. *$\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$.*

iii. *$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$, baldin eta soilik baldin $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$ bada.*

Frogapena. Lehenengo baieztapena frogatuz hasiko gara. Demagun $p = (p_1, \dots, p_n)$ eta $q = (q_1, \dots, q_n)$ direla; orduan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{pq} = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ q_i - p_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\},\ p_i = q_i \quad \Leftrightarrow \quad p = q. \end{aligned}$$

Bigarren baieztapena ia berehalakoa da, $i \in \{1, \dots, n\}$ guztietarako, $q_i - p_i = -(p_i - q_i)$ berdintza erabilita. Azkenik, demagun, alde batetik, $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ dela. Orduan, honako lehen eta azken berdintza hauetan 7.1.2. **i.** Propietateak erabilita, honako hau lortzen dugu:

$$\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{ps} + \overrightarrow{sr} = \overrightarrow{ps} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{qs}.$$

Bestalde, demagun $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$ berdintza betetzen dela. Orduan, aurreko propietate berbera erabiliz, honako hau lortzen dugu:

$$\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq} = \overrightarrow{qs} + \overrightarrow{rq} = \overrightarrow{rs}.$$

□

7.2 Azpiespazio afinak

Espazio bektorialen gaian, $\mathbb{R}^n$-ren egitura bektoriala gordetzen duten azpimultzoak aztertu genituen, *azpiespazio bektorial* izenekoak (ikusi 1.2.1. definizioa). Gogoratu, $\mathbb{R}^n$-ko azpimultzo W ez-huts bat azpiespazio bektoriala izateko, bi baldintza bete behar direla:

i. $\vec{u}, \vec{v} \in W$ bektore guztietarako, $\vec{u} + \vec{v} \in W$.

ii. $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{w} \in W$ guztietarako, $\lambda \vec{w} \in W$.

Bereziki, W bera $\mathbb{R}$ gaineko bektore-espazio bat izango da, 1.1.1. definizioko beste propietateak automatikoki beteko baitira.

Gai honetan, lan egingo dugun $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpimultzoek $\mathbb{R}^n$-k duen egitura afina gordetzea nahiko dugu. Gogoratu, benetan $\mathbb{R}^n$ idaztean $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \nu_p)$ hirukotea esan nahi dugula.

7.2.1. Definizioa. Izan bitez $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpimultzoa, $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala eta ν_p-ren S multzorako murrizketa $\nu_{p\restriction S} : S \to W$. Esango dugu $(S, W, \nu_{p\restriction S})$ *hirukotea* $\mathbb{R}^n$*-ren azpiespazio afina* dela, baldin eta honako bi baldintza hauek betetzen badira:

i. $p, q, r \in S$ guztietarako, $\nu_{p\restriction S}(q) = \nu_{p\restriction S}(r) + \nu_{r\restriction S}(q)$ da.

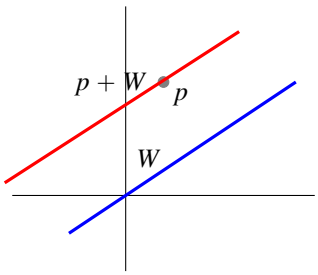
ii. $\nu_{p\restriction S} : S \to W$ bijekzioa da.

7.2.2. Oharra. Ohartu, lehenengo propietatea berehala betetzen dela, $\mathbb{R}^n$-ko puntu guztientzat betetzen baita (ikusi 7.1.2.**i.** Propietatea).

Alde batetik, $q \in S$ bada, orduan existitzen da $\vec{w} \in W$ bakarra, non $\nu_{p\restriction S}(q) = \vec{w}$ den. Hau da, $q = p + \vec{w} \in p + W$ da, eta, ondorioz, $S \subseteq p + W$ partekotasuna betetzen da. Bestalde, hartu $\vec{w} \in W$ edozein. Orduan, existitzen da $q \in S$ bakarra, non $\nu_{p\restriction S}(q) = \vec{pq} = \vec{w}$ den, hots, $q = p + \vec{w} \in S$ den. Beraz, $p + W \subseteq S$ betetzen da. Gainera, $S = p + W \subseteq \mathbb{R}^n$ bada, erraz ikus daiteke $(S, W, \nu_{p\restriction S})$ hirukoteak egitura afina duela. Izan ere, nahikoa da $\nu_{p\restriction S} : S \to \mathbb{R}^n$ aplikazioaren irudia W dela eta bereziki $\nu_{p\restriction S} : S \to W$ aplikazioa bijektiboa dela ikustea. Horregatik, honako azpiespazio afinaren definizioa eman dezakegu.

7.2.3. Definizioa. Izan bedi $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpimultzoa. Esango dugu S azpimultzoa $\mathbb{R}^n$ espazio afinaren *azpiespazio afina* dela, baldin eta existitzen badira $p \in \mathbb{R}^n$ puntua eta $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala non $S = p + W$ den. Nabaria denez, $p \in S$ da, eta, horregatik, S azpiespazio afina p *puntutik igarotzen* dela esango dugu.

Beraz, $\mathbb{R}^n$-ko azpiespazio afinak azpiespazio bektorialen *kopiak* izango dira («$\mathbb{R}^n$ multzoan dantzan »).



7.1. Irudia. $\mathbb{R}^2$-ko azpiespazio afina

7.2.4. Oharra. Azpiespazio afinen definizioaren arabera, garbi dago horiek $\mathbb{R}^n$-ko azpimultzo ezhutsak direla (gutxienez puntu bat dute barruan).

Notazioa. Puntu eta bektoreekin egin dugun bezala, $\mathbb{R}^n$-ko azpiespazio afinak eta azpiespazio bektorialak desberdintzeko, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ partekotasun eta $W \leqslant \mathbb{R}^n$ desberdintza ikurrak erabiliko ditugu, hurrenez hurren. Hala ere, hartuko ditugun azpimultzo guztiak $\mathbb{R}^n$ multzokoak direnez eta definituriko multzoaren egitura garbi badago, ohikoa izango da aurrez aipaturiko partekotasun-ikurrak ez erabiltzea.

Demagun $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina dela; hau da, existitzen direla $p \in \mathbb{R}^n$ puntua eta $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala, non $S = p + W$ den. Egia al da S-ren adierazpenean agertzen diren p eta W horiek bakarrak direla? Galdera horren erantzuna hurrengo proposizioak emango digun arren, pentsa

ezazu 7.1. irudian. Har ezazu bertan agertzen den zuzen afineko (kolore gorriz agertzen dena) beste edozein puntu; deitu q. Eta eraiki $\mathbb{R}^2$ espazio afinean $q + W$ zuzen afina. Orduan, $q + W = p + W$ betetzen al da?

7.2.5. Proposizioa. *Izan bitez $p, q, \in \mathbb{R}^n$ puntuak eta $W_1, W_2 \leqslant \mathbb{R}^n$ bektore-azpiespazioak. Honako bi baieztapen hauek baliokideak dira:*

i. $p + W_1 = q + W_2$*;*

ii. $W_1 = W_2$ *eta* $q \in p + W_1$.

Frogapena. Ikus dezagun lehenengo baldintzak bigarrena inplikatzen duela. Argi eta garbi, bi multzoak $p + W_1 = q + W_2$ berdinak badira, bereziki $p \in q + W_2$ eta $q \in p + W_1$ partekotasunak beteko dira. Orduan, (7.1). ekuazioko berdintzatik, $\overrightarrow{pq} \in W_1 \cap W_2$ dela lortuko dugu.

Orain, $W_1 = W_2$ ikusteko, hartu $\vec{v}_1 \in W_1$. Orduan, $p + \vec{v}_1 \in p + W_1 = q + W_2$ denez, $\overrightarrow{pq} + \vec{v}_1 \in W_2$. Beraz, $\vec{v}_1 \in W_2$ da. Antzeko eran, $\vec{v}_2 \in W_2$ bada, $q + \vec{v}_2 \in q + W_2 = p + W_1$ denez, $\overrightarrow{pq} + \vec{v}_2 \in W_1$ da, eta, hortaz, $\vec{v}_2 \in W_1$ da; nahi bezala.

Froga dezagun bigarren baldintzak lehenengoa inplikatzen duela. Badakigu $q \in p + W_1$ betetzen denez, $\overrightarrow{pq} \in W_1$ dela. Orduan, $W_1 \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala izanik, (7.1). ekuazioa eta 7.1.2. **i.** Propietateak erabiliz, honako hau lortzen dugu:

$$x \in p + W_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{px} \in W_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qx} \in W_1 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{qx} \in W_1 = W_2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in q + W_2.$$

□

Aurreko emaitza erabiliz, honako hau ondoriozta dezakegu.

7.2.6. Korolarioa. *Izan bitez $p, q, \in \mathbb{R}^n$, $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala eta $S = p + W \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina.*

i. $r, s \in S$ *bada, orduan* $\overrightarrow{rs} \in W$.

ii. $q \in S$*, baldin eta soilik baldin* $S = q + W$.

Frogapena. Ikusi 7.7.2. arikta. □

7.2.7. Oharra. Aurreko emaitzetatik honako hau ondorioztatzen da: azpiespazio afin bat deskribatzeko erabili dezakegun puntua ez da bakarra; aldiz, azpiespazio bektoriala bai. Hori dela eta, honako nozio hauek ondo definituta daude.

7.2.8. Definizioa. Izan bedi $S = p + W$ azpiespazio afina.

i. Esango dugu W azpiespazio bektoriala S azpiespazio afinaren *norabidea* dela, eta sarritan $\vec{S}$ ikurraz adieraziko dugu.

ii. Esango dugu *azpiespazio afin baten dimentsioa* bere norabidearen dimentsioa dela, hau da, $\dim S = \dim \vec{S}$.

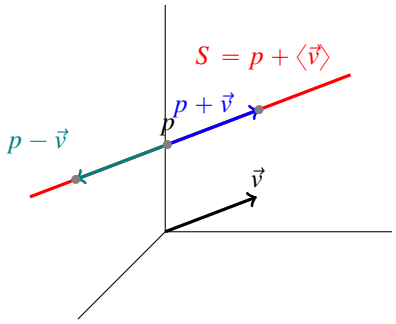
7.2.9. Adibidea. Izan bedi $S = s + \vec{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina.

i. Nolakoak izango dira zero dimentsioko azpiespazio afinak?

Badakigu $\dim S = \dim \vec{S} = 0$ denez, $\vec{S} = \{\vec{0}\}$ dela. Beraz, $S = \{p\}$ puntu bakar batez osaturiko multzoa da. Kasu horretan, S *atomo* bat dela esango dugu.

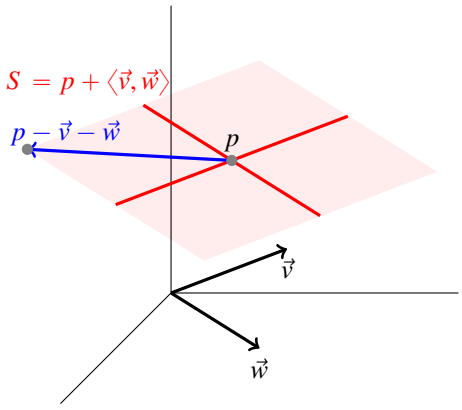
ii. Eta $\dim S = 1$ bada?

Badakigu, $\dim S = \dim \vec{S} = 1$ bada, existitzen dela $0 \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ non $\vec{S} = \langle \vec{v} \rangle$ den. Orduan, $S = p + \langle \vec{v} \rangle$ *zuzen afina* dela esango dugu.



iii. Eta $\dim S = 2$ bada?

Aurreko moduan, existituko dira $\mathbb{R}^n$-ko $\vec{v}$ eta $\vec{w}$ bektore ez-proportzional, non $\vec{S} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ den. Orduan, $S = p + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ *plano afina* dela esango dugu.



Orokorrean, $\dim S = n - 1$ bada, $S = p + \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{n-1} \rangle$ *hiperplano afina* dela esango dugu.

iv. Eta $\dim S = n$ bada?

Ohartu, $\dim \vec{S} = n$ bada, orduan $\vec{S} = \mathbb{R}^n$ denez, $S = \mathbb{R}^n$ beteko dela. Ondorioz, $\mathbb{R}^n$ bera da n dimentsioko $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio afin bakarra.

7.2.10. Oharra. $\mathbb{R}^n$-ko azpiespazio bektorialak $(0, \ldots, 0)$ puntutik igarotzen diren azpiespazio afinak besterik ez dira; hau da, $S = (0, \ldots, 0) + W = W$.

7.2.11. Proposizioa. *Izan bitez $p \in \mathbb{R}^n$ puntua, $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afinak eta $W_1, W_2 \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektorialak. Honako hauek betetzen dira:*

i. *$S_1 \subseteq S_2$ bada, orduan $\vec{S}_1 \subseteq \vec{S}_2$.*

ii. *$W_1 \subseteq W_2$ bada, orduan $p + W_1 \subseteq p + W_2$.*

Frogapena. Izan bitez $S_1 = s_1 + \vec{S}_1$ eta $S_2 = s_2 + \vec{S}_2$ azpiespazio afinak. Demagun $S_1 \subseteq S_2$ dela, eta hartu $\vec{v}_1 \in \vec{S}_1$ edozein. Orduan, $r_1 = s_1 + \vec{v}_1 \in S_1$ da. Gainera, $S_1 \subseteq S_2$ denez, $r_1 \in S_2$ da. Hortaz, $s_1, r_1 \in S_2$ dira, eta 7.2.6. **i.** korolarioa erabiliz, $\overrightarrow{s_1 r_1} = \vec{v}_1 \in \vec{S}_2$ da.

Definizioz, bigarren baieztapena berehalakoa da:

$$p + W_1 = \{p + \vec{v}_1 |\ \vec{v}_1 \in W_1\} \overset{W_1 \subseteq W_2}{\subseteq} \{p + \vec{v}_2 |\ \vec{v}_2 \in W_2\} = p + W_2.$$

□

Aurreko emaitza erabiliz, ondoriozta ezazu honako hau.

7.2.12. Korolarioa. *Izan bitez $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afinak. Orduan:*

i. *$S_1 \subseteq S_2$ bada,* $\dim S_1 \leqslant \dim S_2$ *da;*

ii. *$S_1 \subseteq S_2$ eta* $\dim S_1 = \dim S_2$ *badira, $S_1 = S_2$ dira.*

7.3 Azpiespazio afinen arteko posizio erlatiboak

Bektore-espazioen gaian ikusi dugu, $\mathbb{R}^n$-ko bi azpiespazio bektorial $U, W \leqslant \mathbb{R}^n$ emanda, multzo modura $U \cap W \neq \varnothing$ dela. Izan ere, $\vec{0}$ bektore nulua beti egongo dago azpiespazio bektorialetan eta, ondorioz, horien ebakiduran. Testuinguru afinean lan egitean, ordea, $\mathbb{R}^n$-ko bi azpiespazio afin emanda, gerta daiteke horien ebakidura hutsa izatea. Adibidez, hartu $\mathbb{R}^2$ espazio afinean, S_1 edozein zuzen afin eta S_1-ren barruan ez dagoen edozein puntuk definituriko atomoa $S_2 = \{P\}$. Argi eta garbi, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ izango da.

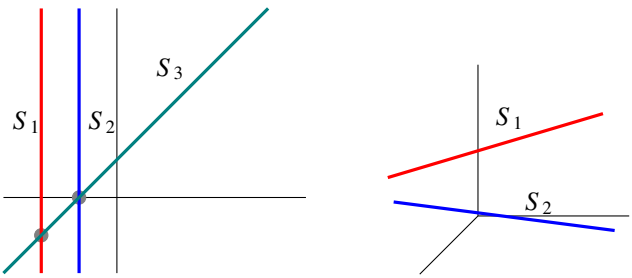
Atal honetan, bada, $\mathbb{R}^n$-ren bi azpiespazio afin emanda, horiek espazioan nola dauden kokatuta aztertuko da: ebakitzen diren ala ez, ebakitzen diren kasuan berdinak edo ezberdinak diren, etab. Has gaitezen nozio horiek definitzen.

7.3.1. Definizioa. Izan bitez S_1 eta S_2 azpiespazio afinak $\mathbb{R}^n$ espazioan.

i. Esango dugu S_1 eta S_2 azpiespazioek *elkar ebakitzen* dutela, baldin eta $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ bada. Bestela, *ez dutela elkar ebakitzen* esango dugu.

ii. Esango dugu S_1 eta S_2 *paraleloak* direla, baldin eta azpiespazio horien norabideen artean parte-kotasun-erlazioren bat badago; hau da, baldin eta $\vec{S}_1 \subset \vec{S}_2$ edo $\vec{S}_2 \subset \vec{S}_1$ edo $\vec{S}_1 = \vec{S}_2$ betetzen bada. Gainera, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ bada, S_1 eta S_2 *paralelo hutsak* direla esaten da.

iii. Esango dugu S_1 eta S_2 *gurutzatzen* direla, bi azpiespazio afin horiek mozten ez badira eta, horrez gain, paraleloak ez badira.



Ezker aldeko irudian, S_1 eta S_2 paraleloak (paralelo hutsak) dira, eta S_1 eta S_3 eta S_2 eta S_3, aldiz, ebakitzaileak. Eskuin aldeko irudian, berriz, gurutzatzen diren bi zuzen agertzen dira.

Aurretik aipatu bezala, gai honen helburuetako bat izango da, $\mathbb{R}^n$-ko bi azpiespazio afin emanda, horien posizio erlatiboa aztertzea. Emandako azpiespazio afinak paraleloak badira, horien azterketa honako proposizio hau erabiliz egin dezakegu.

7.3.2. Proposizioa. *Izan bitez S_1 eta S_2 bi azpiespazio afin paralelo $\mathbb{R}^n$ espazioan,* $\dim S_1 \leqslant \dim S_2$ *izanik.*

i. $\dim S_1 < \dim S_2$ *bada, orduan* $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ *ala* $S_1 \subset S_2$.

ii. $\dim S_1 = \dim S_2$ *bada, orduan* $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ *ala* $S_1 = S_2$.

Frogapena. Hipotesiz, S_1 eta S_2 paraleloak direnez, horien norabideen artean partekotasun bat emango da; $\vec{S}_1 \subseteq \vec{S}_2$ edo $\vec{S}_2 \subseteq \vec{S}_1$, alegia. Gainera, lehenenego baieztapenean, $\dim S_1 < \dim S_2$ denez, badakigu $\vec{S}_1 \subseteq \vec{S}_2$ beteko dela. Orain, demagun $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ eta hartu $r \in S_1 \cap S_2$. Orduan, 7.2.6. **ii.** Korolarioa erabiliz, honako hau lortuko dugu:

$$S_1 = r + \vec{S}_1 \subseteq r + \vec{S}_2 = S_2.$$

Bigarren baieztapenean, $\dim S_1 = \dim S_2$ betetzen denez, zuzenean $\vec{S}_1 = \vec{S}_2$ berdintza beteko da. Eta $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ bada, hartu $r \in S_1 \cap S_2$. Orduan, honako berdintza hau betetzen da: $S_1 = r + \vec{S}_1 = r + \vec{S}_2 = S_2$. □

Bi azpiespazio afin $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ emanda, nola erabaki dezakegu $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ den ala ez? Erabaki hori hartzeko, praktikan, honako emaitza hau erabiliko dugu.

7.3.3. Proposizioa. *Izan bitez $p, q \in \mathbb{R}^n$ puntuak eta $\mathbb{R}^n$-ren $S_1 = p + \vec{S}_1$ eta $S_2 = q + \vec{S}_2$ azpiespazio afinak. Orduan,*

$$S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \qquad \Leftrightarrow \qquad \overrightarrow{pq} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2.$$

Frogapena. Berehalakoa da honako baliokidetasun hauek betetzen direla ikustea:

$$\begin{aligned} S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \quad &\Leftrightarrow \quad \exists r \in S_1 \cap S_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rp} \in \vec{S}_1 \text{ eta } \overrightarrow{rq} \in \vec{S}_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rp} + \overrightarrow{rq} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{pq} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2. \end{aligned}$$

□

7.3.4. Adibidea. Har ditzagun $\mathbb{R}^3$ espazio afinean honako zuzen afin hauek:

$$S_1 = (1,0,1) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad S_2 = (0,1,1) + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{eta} \quad S_3 = (1,0,0) + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Azter ditzagun azpiespazio afin horien posizio erlatiboak.

Has gaitezen S_1-en eta S_2-ren posizio erlatiboarekin. Ohartu $\vec{S}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ eta $\vec{S}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ direla eta, beraz, ez da espazio bektorial horien artean inongo partekotasun-erlaziorik ematen. Beraz, ezin dira paraleloak izan. Ikus dezagun, 7.3.3. proposizioa erabiliz, ea S_1 eta S_2 multzoek elkar ebakitzen duten:

$$S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{s_1 s_2} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2.$$

Hartu $s_1 = (1,0,1)$ eta $s_2 = (0,1,1)$ eta lortu $\overrightarrow{s_1 s_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bektorea. Orduan,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

betetzen denez, $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ da. Ondorioz, S_1 eta S_2 ebakitzaileak dira. Are gehiago, $\vec{S}_1$-en eta $\vec{S}_2$-ren artean partekotasunik ez dagoenez, puntu bakar batean ebakiko dira.

Jarrai dezagun S_2 eta S_3-ren posizio erlatiboa aztertuz. Ohartu $\vec{S}_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \vec{S}_3$ berdintza betetzen dela. Hortaz, S_2 eta S_3 paraleloak dira. Paralelo hutsak diren ala ez aztertzea falta zaigu soilik. Horretarako, hartu $s_2 = (0,1,1)$ eta $s_3 = (1,0,0)$ puntuak, eta lortu $\overrightarrow{s_2 s_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bektorea. Orduan, $\vec{S}_2 + \vec{S}_3 = \vec{S}_2 = \vec{S}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ denez, $\overrightarrow{s_2 s_3} \notin \vec{S}_2 + \vec{S}_3$ da, eta, ondorioz, $S_2 \cap S_3 = \varnothing$. Hortaz, S_2 eta S_3 paralelo hutsak dira.

Azkenik, azter dezagun S_1 eta S_3-ren arteko posizio erlatiboa. Hasteko, azpiespazio horien norabideak $\vec{S}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ eta $\vec{S}_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ direnez, azpiespazio bektorial horien artean ez dago partekotasunik. Beraz, ikus dezagun ea ebakitzaileak, edo gurutzatzen diren. Horretarako, ohartu

$$\overrightarrow{s_1 s_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \vec{S}_1 + \vec{S}_3$$

dela, eta, beraz, $S_1 \cap S_3 = \varnothing$. Ondorioz, S_1 eta S_3 gurutzatzen dira.

7.4 Azpiespazio afinen arteko eragiketak eta Grassmann-en formulak

Atal honen helburua azpiespazio afinen arteko eragiketak definitzea izango da. Horrela, azpiespazio afin ezagunetatik abiatuz, berriak lortzeko gai izango gara.

Multzoen arteko eragiketen artean, *ebakidura* eta *bildura* aski ezagunak dira. Galde dezakegu, beraz, ea $\mathbb{R}^n$-ren bi azpiespazio afin emanda, horien ebakidura berriro ere azpiespazio afin bat izango den. Aurreko atalean ikusi dugu, bi azpiespazio afinen arteko ebakidura hutsa izan daitekeela, eta, definizioz, multzo hutsa ez da azpiespazio afina.

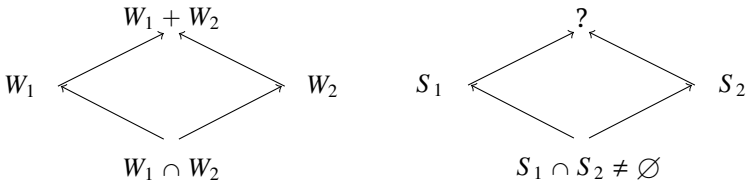
7.4.1. Proposizioa. *Izan bitez $\mathbb{R}^n$ espazio afinean S_1 eta S_2 azpiespazio afinak. Baldin eta $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ bada, orduan $S_1 \cap S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$-ren azpiespazio afina da, eta horren norabidea $\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2$ da.*

Frogapena. Demagun $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ dela, eta hartu $r \in S_1 \cap S_2$. Idatzi $S_1 = r + \vec{S}_1$ eta $S_2 = r + \vec{S}_2$. Orduan,

$$\begin{aligned} x \in S_1 \cap S_2 \quad &\Leftrightarrow \quad x \in S_1 \text{ eta } x \in S_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rx} \in \vec{S}_1 \text{ eta } \overrightarrow{rx} \in \vec{S}_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rx} \in \vec{S}_1 \cap \vec{S}_2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in r + \vec{S}_1 \cap \vec{S}_2 \end{aligned}$$

Ondorioz, $S_1 \cap S_2 = r + \vec{S_1} \cap \vec{S}_2$ da. □

Orain, demagun bi azpiespazio afinen arteko bildura hartu nahi dugula. Gogoratu bi azpiespazio bektorialen arteko bildura ez dela zertan berriro azpiespazio bektorial bat izan. Horregatik, azpiespazio bektorialen arteko batura definitu genuen; emandako bi azpiespazio bektorial horiek barnean dituen azpiespazio bektorialik txikiena, alegia.



Azpiespazio afinekin ere antzekoa gertatzen da. Hartu, adibidez, $S = \{p\}$ eta $T = \{q\}$ atomoak. Horien bildura, $S \cup T = \{p, q\}$, ez da $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio afina. Izan ere, $p, q \in S \cup T$ denez, 7.2.6. korolarioa erabiliz, $\overrightarrow{pq}$ bektoreak bildura horren norabidearen barruan egon beharko luke.

7.4.2. Definizioa. Izan bedi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ azpimultzo ez-hutsa. Definizioz, *A azpimultzoak sortutako azpiespazio afina* A parte duen azpiespazio afinik txikiena da. Azpiespazio hori $\langle A \rangle$ bidez adieraziko dugu, eta honako era honetan deskriba daiteke: $p \in A$ edozein finkatuz,

$$\langle A \rangle = p + \langle \{\overrightarrow{pq} : q \in A\} \rangle.$$

7.4.3. Adibidea. Ikus ditzagun pare bat adibide.

i. Demagun A azpiespazio afina dela; orduan, $\langle A \rangle = A$.

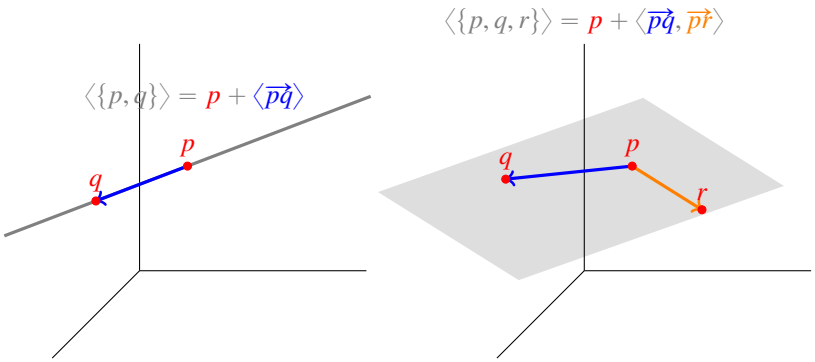
ii. Bi puntu ezberdinek sortutako azpiespazio afina puntu horietatik igarotzen den zuzen afina da:

$$\langle \{p, q\} \rangle = p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle = q + \langle \overrightarrow{qp} \rangle.$$

iii. Hiru puntu ez-lerrokatuk sortutako azpiespazio afina horietatik igarotzen den plano afina da:

$$\langle \{p, q, r\} \rangle = p + \langle \overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr} \rangle$$

Hiru puntuak ez daudenez lerrokaturik, badakigu $\overrightarrow{pq}$ eta $\overrightarrow{pr}$ linealki independenteak direla. Beraz, plano afina da. Bestela, zuzen afin bat lortuko genuke.



7.4.4. Oharra. Ohartu 1.2.21. teoreman eta 7.4.2. definizioan $\langle \cdot \rangle$ ikur berbera erabili dugula bi nozio ezberdin deskribatzeko. Izan ere, $A = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ bada, orduan, A puntu multzoak sortzen duen $\mathbb{R}^2$-ko azpiespazio afina

$$\langle A \rangle = (1,0) + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

zuzen afina da. Aldiz, A bektore multzo gisa hartuz gero, $\mathbb{R}^2$ espazio bektorialean sortzen duen azpiespazio bektoriala, $\mathbb{R}^2$ osoa da.

Hala ere, notazio berdina mantenduko dugu, testiunguruaren arabera ulertuko baitugu ikur horrek (puntu) multzo batek sortutako azpiespazio afina edo (bektore) multzo batek sortutako azpiespazio bektoriala adierazi nahi duen.

7.4.5. Definizioa. Izan bitez S_1 eta S_2 azpiespazio afinak $\mathbb{R}^n$ espazioan. Definizioz, S_1 eta S_2 *azpiespazio afinen batura* $S_1 \cup S_2$ azpimultzoak sortutako azpiespazio afina da, eta $S_1 + S_2$ bidez adieraziko dugu. Hau da, $S_1 + S_2 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$ da.

Hurrengo emaitzak $S_1 + S_2$ azpiespazio afinaren adierazpena lortzeko bidea emango digu.

7.4.6. Proposizioa. *Izan bitez $S_1 = p + \vec{S}_1$ eta $S_2 = q + \vec{S}_2$ azpiespazio afinak $\mathbb{R}^n$ espazioan. Orduan,*

$$S_1 + S_2 = p + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle)$$

da.

Frogapena. Ikus dezagun $p + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle)$ multzoak, alde batetik, S_1 eta S_2 barnean dituela eta, bestetik, $S_1 + S_2$-ren barnean dagoela. Orduan, $S_1 + S_2$ multzoa denez S_1 eta S_2 barnean dituen azpiespazio afinik txikiena, nahi dugun berdintza lortuko dugu.

Hasteko, $\vec{S}_1 \subset \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$ denez, $p + \vec{S}_1 = S_1 \subset p + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle)$ da. Bestalde, $\overrightarrow{pq} \in \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$ denez, $q \in p + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle)$ da, eta, beraz,

$$p + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle) = q + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle)$$

berdintza lortzen dugu. Beraz, $S_2 = q + \vec{S}_2 \subset p + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle)$ da.

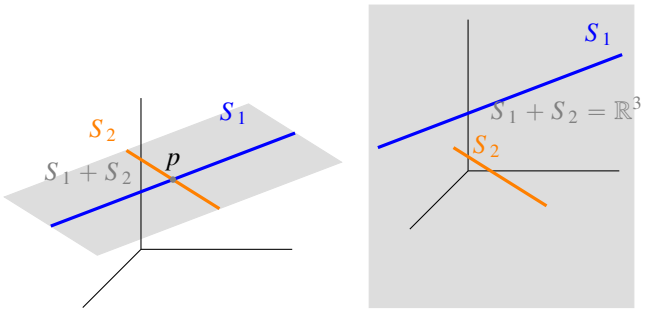
Orain, ikus dezagun $p + (\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle) \subset S_1 + S_2$ dela. Gogoratu, definizioz,

$$S_1 + S_2 = p + \langle \{ \overrightarrow{pq} \mid q \in S_1 \cup S_2 \} \rangle$$

da, eta, hortik, $\vec{S}_1, \langle \overrightarrow{pq} \rangle \subset \overrightarrow{S_1 + S_2}$ lortzen da. Baliokidea dena,

$$S_1 + S_2 = q + \langle \{ \overrightarrow{qp} \mid p \in S_1 \cup S_2 \} \rangle$$

da, eta, hortik, $\vec{S}_2 \subset \overrightarrow{S_1 + S_2}$ partekotasuna lortuko dugu. Ondorioz, $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle \subset \overrightarrow{S_1 + S_2}$ lortuko dugu. Hortaz, $p + \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle \subset S_1 + S_2$, nahi bezala. □



7.4.7. Oharra. Aurreko emaitza erabiliz, $S_1 + S_2$-ren norabidea $\overrightarrow{S_1 + S_2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$ da. Orain, 7.3.3. proposizioa erabiliz, $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ bada, $S_1 + S_2$ azpiespazio afinaren norabidea S_1-en eta S_2-ren norabideen batura besterik ez da. Hau da, $\overrightarrow{S_1 + S_2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ da.

7.4.8. Proposizioa (Grassmann-en formula). *Izan bitez S_1 eta S_2 azpiespazio afinak $\mathbb{R}^n$ espazioan. Orduan:*

i. $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ *bada,* $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$.

ii. $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ *bada,* $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2) + 1$.

Frogapena. Idatzi $S_1 = s_1 + \vec{S}_1$ eta $S_2 = s_2 + \vec{S}_2$ azpiespazio afinak. Definizioz, $\dim(S_1 + S_2) = \dim(\overrightarrow{S_1 + S_2})$ da, eta, 7.4.7. Oharra erabiliz, bi kasu bereziko ditugu. Demagun $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ dela. Orduan, $\overrightarrow{S_1 + S_2} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ da. Gainera, $S_1 \cap S_2$ azpiespazio afina da, eta horren norabidea $\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2$ da. Beraz, azpiespazio bektorialentzat ikusitako Grassmannen formulak erabiliz (ikusi 1.3.27. teorema), honako berdintza hau lortzen da:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) = \dim \vec{S}_1 + \dim \vec{S}_2 - \dim \vec{S}_1 \cap \vec{S}_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Bestalde, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ bada, $S_1 + S_2$-ren norabidea $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{s_1 s_2} \rangle$ da. Orduan, $\overrightarrow{s_1 s_2} \notin \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ denez, $(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) \cap \langle \overrightarrow{s_1 s_2} \rangle = \vec{0}$ da. Hortaz, berriro ere azpiespazio bektorialentzako Grassmannen formulak erabiliz, honako berdintza hau lortzen dugu:

$$\begin{aligned} \dim(S_1 + S_2) &= \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \langle \overrightarrow{s_1 s_2} \rangle) = \dim(\vec{S}_1 + \vec{S}_2) + 1 = \dim \vec{S}_1 + \dim \vec{S}_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2) + 1 \\ &= \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(\vec{S}_1 \cap \vec{S}_2) + 1. \end{aligned}$$

□

Ondorioa. Grassmannen formulak erabiliz, honako baieztapen hauek ondoriozta ditzakegu.

i. $\mathbb{R}^3$ espazio afinean ezinezkoa da bi plano afin puntu bakarrean moztea. Aldiz, $n \geqslant 4$ bada, $\mathbb{R}^n$ espazioan hori gerta daiteke.

ii. $\mathbb{R}^3$ espazio afinean ezinezkoa da zuzen eta plano afin bat gurutzatzea, edota bi plano afin gurutzatzea. Aldiz, $\mathbb{R}^n$ espazioan, $n \geqslant 4$ izanik, gerta daiteke hori.

7.5 Erreferentzi-sistema afinak

Aurreko gaietan ikusi dugu, $\mathbb{R}^n$-ko oinarri bat finkatuz, bektore bat oinarri horrekiko koordenatuen bitartez zehaztu daitekeela. Gainera, bektore hori eta horren osagaiak ez datoz bat (oinarri kanonikoarekiko lan egiten ez bada behintzat). Orain, puntuak zehazteko, horien osagaiak *erreferentzia-sistema afin* batekiko adieraziko dira. Atal honetan, erreferentzia-sistema afinaren definizioa emango da, eta erreferentzia-sistema afin batetik beste batera nola igarotzen den azalduko.

7.5.1. Definizioa. Izan bitez $p_0 \in \mathbb{R}^n$ puntua eta $\beta \subset \mathbb{R}^n$-ren oinarria. Esango dugu $\mathcal{R} = (p_0, \beta)$ bikotea $\mathbb{R}^n$ espazio afinaren *erreferentzi-sistema afina* dela. Bereziki, p_0 puntuari *erreferentzi sistemaren jatorria* esaten zaio, eta β oinarriari *erreferentzi- sistemaren oinarria*.

7.5.2. Adibidea. Erreferentzia-sistema afinen adibide pare bat ikusiko dugu.

i. Har dezagun, $\mathbb{R}^n$ espazio afinean, $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ puntua eta $\mathbb{R}^n$ bektore-espazioaren $\kappa = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ oinarri kanonikoa. Esango dugu $(\mathbf{0}, \kappa)$ bikotea $\mathbb{R}^n$ espazio afinaren *erreferentzia-sistema afin kanonikoa* dela.

ii. Har dezagun, $\mathbb{R}^2$ espazio afinean $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ puntua eta $\mathbb{R}^2$ espazio bektorialaren $\{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}\}$ oinarria. Orduan, $((1,1), \{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}\})$ bikotea $\mathbb{R}^2$ espazio afinaren erreferentzia-sistema afina da.

Nola zehaztu ditzakegu erreferentzia-sistema afin horiek puntu multzo batetik abiatuz? Horretarako, honako lema hau frogatuko dugu.

7.5.3. Lema. *Izan bitez $p_0,\dots,p_k\in\mathbb{R}^n$ puntuak. Orduan,*

$$\{\overrightarrow{p_0p_1},\dots,\overrightarrow{p_0p_k}\}\quad \textit{sistema askea da}\quad\Leftrightarrow\quad \forall j\in\{0,\dots,k\},\ \{\overrightarrow{p_jp_0},\dots,\overrightarrow{p_{j-1}p_0},\overrightarrow{p_{j+1}p_0},\dots,\overrightarrow{p_jp_k}\}\ \textit{sistema askea da.}$$

Frogapena. Nabaria da eskuineko baieztapenak ezkerrekoa inplikatzen duela, eta, hortaz, beste inplikazioa frogatuko dugu. Demagun, beraz, $\{\overrightarrow{p_0p_1},\dots,\overrightarrow{p_0p_k}\}$ sistema askea dela. Finkatu $j\in\{1,\dots,k\}$ eta hartu $I=\{0,\dots,j-1,j+1,\dots,k\}$. Izan bitez $\lambda_0,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\dots\lambda_k\in\mathbb{R}$ non

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{p_jp_i}=0$$

den, eta ikus dezagun, $i\in I$ guztietarako, $\lambda_i=0$ dela. Idatzi, $i\in I\backslash\{0\}$ guztietarako,

$$\overrightarrow{p_jp_i}=\overrightarrow{p_jp_0}+\overrightarrow{p_0p_i}$$

eta, hortaz,

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{p_jp_i}=\lambda_0\overrightarrow{p_jp_0}+\sum_{i\in I\backslash\{0\}}\lambda_i(\overrightarrow{p_jp_0}+\overrightarrow{p_0p_i})=\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{p_jp_0}+\sum_{l\in I\backslash\{0\}}\lambda_l\overrightarrow{p_0p_l}=0.$$

Hipotesiz, $\{\overrightarrow{p_0p_1},\dots,\overrightarrow{p_0p_k}\}$ sistema askea denez, $l\in I\backslash\{0\}$ guztietarako, $\lambda_l=0$ eta $\sum_{i\in I}\lambda_i=0$ dira. Ondorioz, $i\in I$ guztietarako, $\lambda_i=0$ da; nahi bezala. □

7.5.4. Definizioa. Izan bitez $p_0,p_1,\dots,p_k\in\mathbb{R}^n$. Esango dugu $p_0,p_1,\dots,p_k$ puntuak *afinki independenteak* direla, baldin eta $\overrightarrow{p_0p_1},\dots,\overrightarrow{p_0p_k}$ bektoreak linealki independenteak badira.

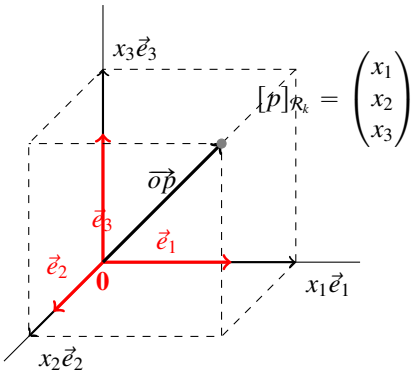
7.5.5. Oharra. Baliokidea da $\mathbb{R}^n$-ren erreferentzi-sistema afin bat edo afinki independenteak diren $n+1$ puntu ezagutzea. Izan ere, $p_0,\dots,p_n$ afinki independenteak badira, $\mathcal{R}=(p_0,\{\overrightarrow{p_op_1},\dots,\overrightarrow{p_0p_n}\})$ bikotea $\mathbb{R}^n$-ren erreferentzia-sistema afina da. Bestalde, $\mathcal{R}=(p_0,\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\})$ bikotea $\mathbb{R}^n$-ren erreferentzia-sistema afina emanda, $p_0,p_1=p_0+\vec{v}_1,\dots,p_n=p_0+\vec{v}_n$ puntuak afinki independenteak dira.

Bektore-espazioen gaian, bektore-espazio bateko oinarri bat finkatuta, bertako bektore orokor baten koordenatuak kalkulatzen ikasi genuen (ikusi 1.3.13. definizioa). Orain, $\mathbb{R}^n$-ko puntu eta bektoreen koordenatuak, aurrez finkaturiko $\mathbb{R}^n$-ren erreferentzia-sistema afin batekiko kalkulatzen ikasiko dugu.

7.5.6. Definizioa. Izan bitez $\mathcal{R}=(p_0,\beta)$ erreferentzi-sistema eta $p\in\mathbb{R}^n$. Definizioz, p *puntuaren $\mathcal{R}$ erreferentzia-sistemarekiko koordenatuak*, $[p]_{\mathcal{R}}$ bidez adieraziko ditugunak, $\overrightarrow{p_0p}$ bektorearen koordenatuak dira β oinarrian. Hau da,

$$[p]_{\mathcal{R}}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad[\overrightarrow{p_0p}]_\beta=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

7.5.7. Adibidea. $\mathbb{R}^n$ espazio afinean jatorritzat $\mathbf{0}=(0,\dots,0)$ puntua eta oinarritzat $\kappa=\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$ oinarri kanonikoa hartuz, $\mathcal{R}_\kappa=(\mathbf{0},\kappa)$ *erreferentzi- sistema afin kanonikoa* dugu. Ohartu, erreferentzi-sistema afin kanonikoan, puntu baten osagaiak bat datozela erreferentzi-sistema afin horrekiko koordenatuekin ($\mathbb{R}^n$-ko oinarri kanonikoarekiko bektoreen koordenatuekin gertatzen den moduan). Hau da, $p=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ bada, orduan $\overrightarrow{op}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ da, eta, beraz, $[\overrightarrow{op}]_\kappa=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ da. Ondorioz, $[p]_{\mathcal{R}_\kappa}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ da.



7.5.8. Adibidea. Har dezagun $\mathbb{R}^2$-ko $\mathcal{R} = ((1,1), \{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}\})$ erreferentzia-sistema afina. Kalkula ditzagun $p = (3,1) \in \mathbb{R}^2$ puntuaren koordenatuak $\mathcal{R}$-rekiko. Hartu $\overrightarrow{p_0p} = \binom{2}{0}$ bektorea, eta kalkula ditzagun horren koordenatuak $\mathbb{R}^2$-ren $\{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}\}$ oinarriarekiko:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_\kappa = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Ondorioz, p puntuaren koordenatuak $\mathcal{R}$-rekiko $\binom{2}{-4}$ dira; hau da, $[p]_{\mathcal{R}} = \binom{2}{-4}$. Baliokidea dena, $(3,1) = (1,1) + 2\binom{1}{2} - 4\binom{0}{1}$ betetzen da.

7.5.9. Oharra. Aldiz, $\mathbb{R}^n$ espazio afinean $\mathcal{R} = (p_0, \beta)$ erreferentzia-sistema afina finkatzen badugu, bektore baten $\mathcal{R}$-rekiko koordenatuak bat datoz bektore horren β-rekiko koordenatuekin.

7.5.10. Teorema. (Koordenatu-aldaketa). *Izan bitez $\mathcal{R} = (p_0, \beta)$ eta $\overline{\mathcal{R}} = (q_0, \overline{\beta})$ bi erreferentzi-sistema afin $\mathbb{R}^n$ espazioan. Orduan, $x \in \mathbb{R}^n$ puntu guztietarako, $[x]_{\overline{\mathcal{R}}} = M^{\beta}_{\overline{\beta}}[x]_{\mathcal{R}} + [p_0]_{\overline{\mathcal{R}}}$ betetzen da.*

7.6 Azpiespazio afinen ekuazioak

Gai honekin amaitzeko, $\mathbb{R}^n$ espazio afineko azpiespazio afinak ekuazioen bidez deskribatzen ikasiko dugu. Izan bedi $S = p + \vec{S}$ azpiespazio afina $\mathbb{R}^n$ espazioan. Demagun $\dim S = r \leqslant n$ dela eta $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r$ bektoreek $\vec{S}$ azpiespazio bektorialaren oinarri bat osatzen dutela. Jakina denez, S azpiespazio afineko edozein puntu honako era honetan adieraz daiteke:

$$x = p + \lambda_1\vec{w}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{w}_r, \quad \text{non} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} \quad \text{diren.} \tag{7.4}$$

7.6.1. Definizioa. Aurreko (7.4). ekuazioari S azpiespazio afinaren *ekuazio bektorial* deritzo.

7.6.2. Adibidea. Izan bedi $\mathbb{R}^4$ espazio afinean $S = (0,2,0,0) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ azpiespazio afina. Orduan, S-ren ekuazio bektoriala

$$S = (0,2,0,0) + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

da.

Demagun, orain, $\mathbb{R}^n$-ren $\mathcal{R} = (q_0, \beta)$ erreferentzi-sistema afina finkatzen dugula, eta erreferentzia-sistema afin horrekiko

$$[p]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \qquad [x]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad [\vec{w}_1]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad [\vec{w}_r]_\beta = \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{nr} \end{pmatrix}$$

direla. (7.4). ekuazio bektorialean koordenatuak ordezkatuz, honako ekuazio-sistema hau lortzen da:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + \lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_r a_{1r}, \\ x_2 = p_2 + \lambda_1 a_{21} + \ldots + \lambda_r a_{2r}, \\ \qquad \ddots \\ x_n = p_n + \lambda_1 a_{n1} + \ldots + \lambda_r a_{nr}. \end{cases} \tag{7.5}$$

7.6.3. Definizioa. Aurreko (7.5). ekuazioko sistemari S azpiespazio afinaren *ekuazio parametriko* deritzo.

7.6.4. Adibidea (Aurreko adibidearen jarraipena)**.** Finka dezagun $\mathbb{R}^4$ espazio afinean $\mathcal{R}_\kappa$ erreferentzia-sistema afina. Kasu horretan, bat datoz $\mathbb{R}^n$ espazioko puntu eta bektoreak eta horien koordenatuak. Idatzi $\mathbf{x} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Orduan, S-ren honako ekuazio parametriko hau lortuko dugu:

$$\begin{cases} x = \lambda_1, \\ y = 2 + 2\lambda_1 - \lambda_2, \\ z = \lambda_1 - \lambda_2, \\ t = 0. \end{cases}$$

Jarrai dezagun azpiespazio afin baten ekuazio desberdinak deskribatzen. Ohartu (7.4). ekuazioa erabiliz, $\overrightarrow{px}$ bektorea $\vec{w_1}, \ldots, \vec{w_r}$ bektoreen konbinazio lineala dela ondorioztatzen dugula. Orduan,

$$A = \begin{pmatrix} x_1 - p_1 & a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ x_2 - p_2 & a_{21} & \ldots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_n - p_n & a_{n1} & \ldots & a_{nr} \end{pmatrix}$$

matrizearen heina r da. Hortaz, linealki independenteak diren r errenkada finkatuta, A matrizeak guztira n errenkada dituenez, $n - r$ azpimatrize karratu desberdin eraiki ahal izango ditugu $r + 1$ ordenakoak, horien determinanteen balioa 0 izanik. Determinante horietako bakoitzetik ekuazio bana aterako da, eta lortutako ekuazioak linealki independenteak izango dira.

7.6.5. Definizioa. Deskribatu berri ditugun ekuazio horiei S azpiespazio afinaren *ekuazio inplizitu* deritze.

7.6.6. Adibidea (Aurreko adibidearen jarraipena)**.** Eraiki dezagun honako matrize hau

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y - 2 & 2 & -1 \\ z & 1 & -1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

eta ohartu A-ren heina 2 dela. Finkatu ditzagun linealki independenteak diren bigarren eta hirugarren errenkadak, eta sortu 3×3 tamainako bi matrize

$$B_1 = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ y-2 & 2 & -1 \\ z & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad B_2 = \begin{pmatrix} y-2 & 2 & -1 \\ z & 1 & -1 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

non B_1 eta B_2 matrizeen heinak bi direnez, horien determinanteak zero diren. Hortik, S-ren ekuazio inplizitua lortuko dugu:

$$S: \quad \begin{cases} x - y + z + 2 = 0, \\ t = 0. \end{cases}$$

7.6.7. Oharra. Azpiespazio afin baten eta bere norabidearen ekuazioak berdinak dira, termino independentea (aldagairik gabekoa) kenduta (ikusi 7.7.10. arikta).

7.6.8. Adibidea. Izan bedi $\mathbb{R}^2$-ren $\mathcal{R} = (p_0, \beta) = ((1,-1), \{\binom{1}{1}, \binom{0}{1}\})$ erreferentzia-sistema afina, eta demagun $\mathcal{R}$-rekiko $S \subseteq \mathbb{R}^2$ azpiespazio afinaren ekuazio inplizitua $x + y + 1 = 0$ dela. Kalkula ezazu S-ren ekuazio inplizitua $\mathcal{R}_\kappa$ erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko.

Ariketa hori bi modutan ebatziko dugu. Alde batetik, S-ren ekuazio bektoriala $\mathcal{R}$-rekiko $S = (0,-1) + \langle \binom{1}{-1} \rangle$ da. Orduan, $q \in S$ puntuaren $\mathcal{R}$-rekiko koordenatuak ezagututa (hau da, $[q]_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$), q puntua (eta, hortaz, bere koordenatuak $\mathcal{R}_\kappa$-rekiko) ezagutuko d(it)ugu:

$$[q]_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [\overrightarrow{p_0 q}]_\kappa = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eta, beraz

$$[q]_{\mathcal{R}_\kappa} = [p_0]_{\mathcal{R}_\kappa} + [\overrightarrow{p_0 q}]_\kappa = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Antzeko moduan, β oinarriarekiko $\vec{S} = \langle \vec{v} \rangle = \langle \binom{1}{-1} \rangle$ da, eta, hortaz,

$$\vec{v} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

denez, $\vec{v} = \binom{1}{0}$ da. Orduan, S-ren ekuazio bektoriala $\mathcal{R}_\kappa$ erreferentzia-sistema afinarekiko $(1,-2) + \langle \binom{1}{0} \rangle$ da. Ondorioz, S-ren ekuazio inplizitua $y + 2 = 0$ dela lortzen da.

Ikus dezagun ariketa hau ebazteko beste modu bat, 7.5.10. teorema erabiliz. Lor ditzagun teoreman agertzen diren $Q = [(0,0)]_\mathcal{R}$ eta $P = M_\beta^\kappa$ matrizeak. Izan ere,

$$[(0,0)]_\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{p\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}]_\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Gainera, P matrizea lortzeko, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ bektoreen β oinarriarekiko koordenatuak lortu behar ditugu. Hortaz,

$$\vec{e}_1 = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \vec{e}_2 = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

direnez,

$$[(0,0)]_\kappa = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad M_\beta^\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrizeak lortzen ditugu. Beraz, $\mathcal{R}$-rekiko $\binom{x}{y}$ koordenatuen eta $\mathcal{R}_k$-rekiko $\binom{x'}{y'}$ koordenatuen artean honako erlazio hau beteko da:

$$\begin{cases} x = x' - 1, \\ y = -x' + y' + 2. \end{cases}$$

Orain, $x + y + 1 = 0$ dugu, baldin eta soilik baldin $(x' - 1) + (-x' + y' + 2) + 1 = 0$, baldin eta soilik baldin $y' + 2 = 0$. Ondorioz, S -ren $\mathcal{R}_k$-rekiko ekuazio bera lortzen dugu; $y' + 2 = 0$, alegia.

7.7 Ariketak

7.7.1. Ariketa. Izan bitez $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina eta $p \in \mathbb{R}^n$ puntua. Zein da $S + \{p\} = \langle S \cup \{p\}\rangle$ azpiespazio afinaren dimentsioa?

7.7.2. Ariketa. Froga ezazu 7.2.6. Korolarioa.

7.7.3. Ariketa. Izan bitez $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afinak. Esango dugu S eta T azpiespazio afinak osagarriak direla, baldin eta $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus \vec{T}$ bada (hau da, horien norabideak azpiespazio bektorial osagarriak direnean). Frogatu bi azpiespazio afin osagarri puntu bakar batean ebakitzen direla.

7.7.4. Ariketa. Frogatu $\mathbb{R}^2$-ren bi zuzen ezberdin paraleloak direla, baldin eta soilik baldin ebakitzen ez badira.

7.7.5. Ariketa. Izan bitez S eta T plano afinak $\mathbb{R}^4$ espazio afinean.

i. Demagun S eta T gurutzatzen direla. Zein da $\dim(\vec{S} \cap \vec{T})$? Eman gurutzatzen diren $\mathbb{R}^4$-ren bi plano afinen adibide zehatz bat.

ii. Demagun S eta T puntu bakarrean mozten direla. Zein da $\dim(\vec{S} \cap \vec{T})$? Eman puntu bakarrean mozten diren $\mathbb{R}^4$-ren bi plano afinen adibide zehatz bat.

7.7.6. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^3$ espazio afineko $p_0 = (1,0,0)$, $q_0 = (0,1,0)$, $r_0 = (0,0,1)$ eta $s_0 = (2,0,0)$ puntuak. Existitzen al da lau puntu horietatik igarotzen den plano afinik? eta $s_0 = (1,1,-1)$ bada? Erantzuna baiezkoa bada, eman planoaren adierazpena.

7.7.7. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^3$-ren honako bi erreferentzia-sistema hauek:

$$\mathcal{R}_1 = (p_0, \{\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_3}\}) \qquad \mathcal{R}_2 = (q_0, \{\overrightarrow{q_0q_1}, \overrightarrow{q_0q_2}, \overrightarrow{q_0q_3}\})$$

$p_0 = (0,0,0)$, $p_1 = (1,0,0)$, $p_2 = (0,1,0)$, $p_3 = (0,0,1)$ eta $q_0 = (1,3,-1)$, $q_1 = (2,3,2)$, $q_2 = (2,4,-1)$, $q_3 = (2,5,-1)$ izanik. Eman $\mathcal{R}_1$-etik $\mathcal{R}_2$-rako eta $\mathcal{R}_2$-tik $\mathcal{R}_1$-erako erreferentzi-sistemaren aldaketen ekuazioak.

7.7.8. Ariketa. Kalkulatu $\mathbb{R}^3$-ren honako puntu hauek sortutako azpiespazio afinen ekuazio bektorialak, parametrikoak eta inplizituak ($\mathbb{R}^3$-ren erreferentzia-sistema kanonikoarekiko):

i. $(1,2,3)$ eta $(-1,3,1)$.

ii. $(1,2,3)$, $(-1,3,1)$ eta $(7,-1,9)$.

iii. $(1,2,3)$, $(-1,3,1)$ eta $(3,1,5)$.

iv. $(1,2,3)$, $(-1,3,1)$, $(3,1,5)$ eta $(5,0,6)$.

7.7.9. Ariketa. Aurreko ariketako azpiespazio afinak kontuan hartuz, bilatu azpiespazio afin horiekin paraleloak eta dimentsio berekoak diren eta honako puntu hauetatik igarotzen diren azpiespazio afinen ekuazio bektorialak, parametrikoak eta inplizituak:

i. $(9,-2,11)$.

ii. $(9,-2,0)$.

iii. $(4,-2,6)$.

iv. $(4,0,-2)$.

7.7.10. Ariketa. Froga ezazu $\mathbb{R}^n$ espazio afineko azpiespazio afin baten ekuazio inplizitua eta bere norabidearen ekuazio inplizitua bat datozela, gai askea salbu.

7.7.11. Ariketa. Izan bitez $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afinak, $\dim S = \dim T = d$ izanik. Froga ezazu

$$S \text{ eta } T \text{ paraleloak} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim(S+T) \leqslant d+1 \\ S = T \quad \text{edo} \quad S \cap T = \varnothing \end{cases}$$

7.7.12. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^3$ espazio afineko S eta T honako azpiespazio afin hauek:

$$S: \begin{cases} x_1 = 2+\lambda_1, \\ x_2 = 4-\lambda_1, \\ x_3 = 5-\lambda_1, \end{cases} \qquad T: \begin{cases} x_1 = 2+2\lambda_2, \\ x_2 = 4+\lambda_2, \\ x_3 = 5+2\lambda_2. \end{cases}$$

i. Eman $\vec{S}$ eta $\vec{T}$ azpiespazio bektorialen oinarri bana.

ii. Kalkulatu $S+T$ azpiespazio afinaren dimentsioa.

iii. Kalkulatu bere ekuazio parametrikoak eta inplizituak.

7.7.13. Ariketa. Izan bitez S eta T $\mathbb{R}^3$-ren honako azpiespazio afin hauek:

$$S: \begin{cases} x_1 = 3+\lambda_1, \\ x_2 = 2+\lambda_1, \\ x_3 = 2+2\lambda_1, \end{cases} \qquad T: \begin{cases} x_1 = 3+2\lambda_2, \\ x_2 = 2-\lambda_2, \\ x_3 = 4+3\lambda_2. \end{cases}$$

i. Kalkulatu $S+T$ azpiespazio afinaren ekuazio parametrikoak eta inplizituak.

ii. Kalkulatu $p = (3,2,1)$ puntutik igarotzen den eta S eta T zuzenekin paraleloa den planoaren ekuazioak.

7.7.14. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^4$-ren honako lau bektore hauek:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eta $p_0 = (1,0,2,0)$ puntua.

i. Frogatu $\mathcal{R} = (p_0, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\})$ bikotea $\mathbb{R}^4$-ren erreferentzi-sistema afina dela.

ii. Kalkulatu $q_0 = (5,5,4,-1)$ puntuaren eta $\vec{v}_1 = (0,-1,-1,0)^t$, $\vec{v}_2 = (0,-1,-2,-1)^t$ eta $\vec{v}_3 = (0,-2,-5,-3)^t$ bektoreen koordenatuak $\mathcal{R}$ erreferentzi-sistemarekiko.

iii. Kalkulatu $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ eta $\vec{v_3}$ bektoreek sortutako azpiespazio bektorialaren dimentsioa.

iv. Kalkulatu $T = q_0 + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle$ azpiespazio afinaren ekuazio inplizituak aurreko $\mathcal{R}$ erreferentzi-sistemarekiko.

v. Kalkulatu T-ren ekuazio inplizituak erreferentzi-sistema kanonikoarekiko.

7.7.15. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^3$ espazioko honako azpiespazio afin hauek:

$$S: \begin{cases} z+y-6=0, \\ x+z-7=0, \end{cases} \quad \text{eta} \quad T_a = (2,4,a) + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

i. Kalkulatu S eta T_a azpiespazioen dimentsioak, eta aztertu beren posizio erlatiboa a parametroaren arabera.

ii. Deskribatu $S + T_a$ azpiespazio afina a parametroaren arabera.

7.7.16. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^4$ espazio afinean $H\colon\ x - z - t = 0$ plano afina, $l = (0,0,1,1) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ zuzen afina eta

$$S_1\colon \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x + y - t = 0, \end{cases} \qquad \text{eta} \quad S_2\colon \begin{cases} x - z - t = 0, \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

plano afinak. Erantzun itzazu honako galdera hauek:

i. Aztertu l-ren eta H-ren arteko posizio erlatiboa. Eta S_1-en eta S_2-ren artekoa.

ii. Erabaki existitzen den l eta S_i azpiespazio afinak barruan dituen H_i hiperplano afinik, $i \in \{1,2\}$ izanik. Existitzen badira, bakarrak al dira?

iii. Aurkitu $p = (1,1,1,1)$ puntutik igaro eta H, l, S_1 eta S_2 ebakitzen dituzten zuzen guztiak.

8. kapitulua

Geometria euklidearra

Seigarren gaian dimentsio finituko $\mathbb{R}$-ren gaineko E bektore-espazio berezi batzuk aztertu ditugu; espazio bektorial euklidearrak. Horien ezaugarri nagusia da *biderketa eskalar* bat dutela eta, horri esker, bektoreen ortogonaltasuna nahiz norma defini ditzakegula. Espazio bektorial euklidearren adibide gisa $\mathbb{R}^n$ bera daukagu, eta kapitulu honen helburua izango da $\mathbb{R}^n$ espazio afina egitura hortaz hornitzea. Horrela, bada, $\mathbb{R}^n$-ko azpiespazio afinen arteko distantzia definituko dugu eta hori kalkulatzen ikasiko dugu.

8.1 $\mathbb{R}^n$-ren egitura afin euklidearra

Izan bitez $n \in \mathbb{N}$ eta $\mathbb{R}^n$ espazio afina. Gogoratu $\mathbb{R}^n$ espazio euklidear estandarra dela; hau da, $\mathbb{R}^n$ dimentsio finituko $\mathbb{R}$-ren gaineko bektore-espazioa da, eta biderketa eskalarra defini daiteke (printzipioz bat baino gehiago egon daitezke). Adibide gisa, $\mathbb{R}^n$-ko *biderketa eskalar estandarra* ikusi duzue, honako era honetan definitua: $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)^t, \vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)^t \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n.$$

8.1.1. Oharra. Hemendik aurrera, $\mathbb{R}^n$ espazio euklidearra idaztean, $\mathbb{R}^n$ biderketa eskalar estandarraz horniturik dagoela adierazi nahiko dugu.

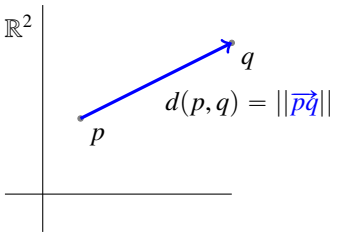
Bereziki, gogoratu biderketa eskalar estandarraren bidez bektoreen norma defini dezakegula,

$$\vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ guztietarako}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

izanik, eta nozio horrek $\mathbb{R}^n$-ko puntuen arteko 'hurbiltasuna' edo distantzia kalkulatzea ahalbidetuko digu.

8.1.2. Definizioa. Esango dugu $\mathbb{R}^n$ espazioaren *distantzia euklidearra* honako era honetan definitutako aplikazioa dela:

$$\begin{array}{rccc} d\colon & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n. \\ & (p, q) & \mapsto & \|\overrightarrow{pq}\| \end{array}$$



8.1.3. Definizioa. Har dezagun $\mathbb{R}^n$ espazio afina distantzia euklidearraz hornituta. Esango dugu $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, v_p, d)$ laukotea *espazio afin euklidearra* dela, eta, notazio sinplifikatzeko, $(\mathbb{R}^n, d)$ soilik idatziko dugu.

Honako emaitza hau $\mathbb{R}^n$-ko biderketa eskalar estandarrak definituriko normak betetzen dituen propietateetatik dator.

8.1.4. Proposizioa. *Izan bitez $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ puntuak. Distantzia euklidearrak honako propietate hauek betetzen ditu:*

i. $d(p,q) \geqslant 0$.

ii. $d(p,q) = 0$*, baldin eta soilik baldin* $p = q$.

iii. $d(p,q) = d(q,p)$.

iv. $d(p,q) \leqslant d(p,r) + d(r,q)$ (*Desberdintza triangeluarra*).

Frogapena. Egin frogapena, ariketa gisa. □

8.2 Perpendikulartasuna

Aurreko atalean ikusi dugu, edozein bi puntu $p, q \in \mathbb{R}^n$ emanda, bi puntu horien arteko distantzia kalkulatzeko, bi puntu horiek lotzen dituen bektorearen normaren balioa lortu behar dela.

Gai honen helburua, ordea, $\mathbb{R}^n$-ko edozein bi azpiespazio afin emanda, horien arteko distantzia kalkulatzea izango da. Noski, hasteko, nozio hori definitu beharko da (ikusi 8.3 atala). Horren aurretik, kalkuluak egiteko erabilgarria izango dugun nozio bat ikasiz hasiko gara.

8.2.1. Definizioa. Izan bitez $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afinak. Esango dugu S eta T azpiespazioak *perpendikularrak* (edo *elkarzutak*) direla baldin eta elkar ebakitzen badute eta horien norabideak ortogonalak badira; hau da, $S \cap T \neq \varnothing$ eta $\vec{S} \perp \vec{T}$ badira.

Hurrengo emaitza enuntziatu aurretik, gogoratu $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio baten osagarri ortogonala, honako era honetan adierazten eta deskribatzen den azpiesazio bektoriala dela:

$$W^{\perp} = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \forall \vec{w} \in W,\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0\}$$

eta $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{R}^n$ berdintza betetzen dela. Ikus ditzagun perpendikulartasunari lotutako oinarrizko propietate pare bat.

8.2.2. Proposizioa. *Izan bitez $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afinak, $p, q \in \mathbb{R}^n$ puntuak eta $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala. Baieztapen horiek betetzen dira:*

i. *S eta T perpendikularrak badira, orduan, S eta T puntu bakarrean mozten dira;*

ii. *$p + W$ eta $q + W^\perp$ azpiespazio afinak perpendikularrak dira.*

Frogapena. Lehenengo baieztapenarekin hasiko gara. Hipotesiz S eta T perpendikularrak direnez, $S \cap T \neq \varnothing$ da. Hortaz, $S \cap T$ azpiespazio afina da, non

$$S \cap T = p + \vec{S} \cap \vec{T}$$

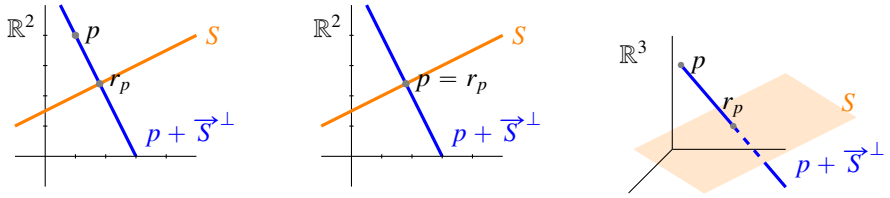
itxurakoa den. Orain, definizioz $\vec{S} \perp \vec{T}$ direnez, $\vec{S} \cap \vec{T} = \{\vec{0}\}$ da, eta, hortaz, $S \cap T = \{p\}$ puntu bat da.

Bigarren baieztapena frogatzeko, nahikoa da $(p + W) \cap (q + W^\perp) \neq \varnothing$ dela ikustea. Izan ere W eta $W^\perp$ elkarrekiko perpendikularrak dira. Gogora dezagun, 7.3.3. proposizioa erabiliz,

$$(p + W) \cap (q + W^\perp) \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{pq} \in W + W^\perp$$

dela. Orain, $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$ denez, $\overrightarrow{pq} \in W + W^\perp$ beteko da, eta, ondorioz, $(p + W) \cap (q + W^\perp) \neq \varnothing$ da. □

Ondorioa. Izan bedi $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina. Edozein $p \in \mathbb{R}^n$ puntu hartuta, $p + \overrightarrow{S}^\perp$ azpiespazioa S-rekin perpendikularra da, eta, ondorioz, bi azpiespazio horien ebakidura puntu bakarra da, r_p deituko dioguna. Aurreko r_p puntuari *p puntuaren S-ren gaineko proiekzio ortogonala* esaten zaio.



8.2.3. Proposizioa. *Edozein $\mathbb{R}^n$-ren bi azpiespazio afin emanda, beti existitzen da horiekin biekin aldi berean perpendikularra den $\mathbb{R}^n$-ren beste azpiespazio afin bat.*

Frogapena. Izan bitez $S = s + \vec{S}$ eta $T = t + \vec{T}$ azpiespazio afinak $\mathbb{R}^n$-n. Lor dezagun bi horiekin perpendikularra den $P = p + \vec{P}$ azpiespazio afina, hau da, $P \subseteq \mathbb{R}^n$ non

$$S \cap P \neq \varnothing, \quad T \cap P \neq \varnothing, \quad \vec{S} \perp \vec{P} \quad \text{eta} \quad \vec{P} \perp \vec{T} \tag{8.1}$$

betetzen diren. Hasteko, hartu $\vec{P} = (\vec{S} + \vec{T})^\perp = \vec{S}^\perp \cap \vec{T}^\perp$ espazio bektoriala, (8.1). adierazpeneko azken bi baldintzak betetzen dituena. Bereziki, $\vec{S} + \vec{T} = \mathbb{R}^n$ bada, $\vec{P} = \{\vec{0}\}$ da, eta, beraz, P azpiespazioa atomo bat izango da.

Orain, p puntua zehazteko, $S \cap T \neq \varnothing$ bada, hartu p puntutzat ebakidura horretan dagoen edozein puntu, eta jarri $P = \{p\}$. Azpiespazio afin horrek, proposizioko baldintzak betetzen dituenez, amaitu dugu.

Demagun $S \cap T = \varnothing$ dela, hau da, $\overrightarrow{st} \notin \overrightarrow{S} + \overrightarrow{T}$ dela. Idatzi $\mathbb{R}^n = (\vec{S} + \vec{T}) \oplus (\vec{S} + \vec{T})^\perp$ eta

$$\overrightarrow{st} = \vec{v} + \vec{u} \quad \text{non} \quad \vec{v} \in \vec{S} + \vec{T}, \vec{u} \in (S + T)^\perp.$$

Bereziki, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in \vec{S} + \vec{T}$ bada, hartu $p = s + \vec{v}_1$ eta $\tilde{t} = t - \vec{v}_2$ puntuak, eta jarri

$$P = p + (S + T)^\perp \quad \text{eta} \quad T = \tilde{t} + \vec{T}.$$

Orduan, berehalakoa da ikustea $\vec{S} \perp \vec{P}$ eta $\vec{T} \perp \vec{P}$ ortogonalak direla, eta $P \cap S = \{p\} \neq \varnothing$ betetzen dela. Gainera, $T \cap P = \{\tilde{t}\}$ da, honako berdintza hau erabiliz:

$$\tilde{t} = t - \vec{v}_2 = s + \overrightarrow{st} - \vec{v}_2 = s + \vec{v}_1 - \vec{u} = p + \vec{u} \in T \cap P.$$

□

8.2.4. Adibidea. Izan bitez $\mathbb{R}^2$-ko

$$S = (0,0) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{eta} \quad T = (-1,1) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

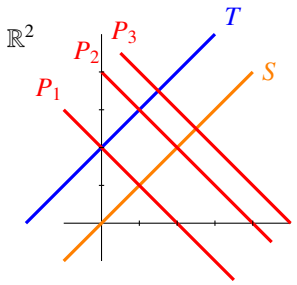
azpiespazio afinak. Eraiki dezagun S eta T azpiespazioekiko aldi berean perpendikularra den $\mathbb{R}^2$-ren azpiespazio afin bat. Hasteko, $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \vec{P}$ bada, $\langle \vec{v} \rangle \perp \vec{S}$ eta $\langle \vec{v} \rangle \perp \vec{T} = \vec{S}$ bete behar denez,

$$\vec{v} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0$$

bete behar da. Beraz, $P = p + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ da. Orain, $p \in P$ puntua zehazteko, $S \cap P \neq \varnothing \neq T \cap P$ baldintzak erabiliko ditugu. Alde batetik,

$$S \cap P \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ps} \in \vec{P} + \vec{S} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2,$$

eta, beraz, ez dago p puntuaren gaineko baldintzarik. Antzeko moduan, edozein puntu $p \in \mathbb{R}^2$ hartuta, $T \cap P \neq \varnothing$ beteko da. Adibide honetan, beraz, P azpiespazio afina eraikitzeko infinitu aukera ditugu.

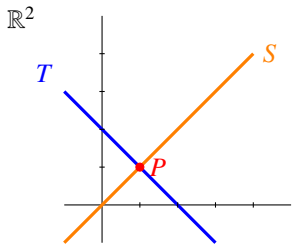


Adibidez, $P = (1,0) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ zuzena S eta$T$ azpiespazioekiko perpendikularra da.

8.2.5. Adibidea. Izan bitez $\mathbb{R}^2$-ren honako bi azpiespazio afin hauek:

$$S = (0,0) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{eta} \quad T = (2,0) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Kalkula ezazu S eta T azpiespazio afinekiko aldi berean perpendikularra den $\mathbb{R}^2$-ren azpiespazio afin bat.



Demagun $P = p + \langle \vec{v} \rangle$ itxurako azpiespazio afina eraiki nahi dugula. Hasteko, P-ren norabidea S-ren eta T-ren norabideekin ortogonala izan behar denez,

$$\vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad \vec{v} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

baldintzak bete behar dira. Jarri $\vec{v} = \binom{x}{y}$ eta, aurreko baldintzetatik, $x + y = 0$ eta $x - y = 0$ lortuko ditugu. Hau da, $\vec{P} = \vec{0}$ da. Beraz, P atomo bat da, eta S eta T ebaki behar dituenez, $P = \{(1,1)\} = S \cap T$ izango da. Kasu horretan, P eraikitzeko aukera bakarra izan dugu.

8.3 Azpiespazio afinen arteko distantzia

Dagoeneko ikusi dugu $\mathbb{R}^n$-ko biderketa eskalar estandarrak definitzen duen distantzia euklidearrari esker bi puntuen arteko distantzia kalkula dezakegula. Atal honetan, $\mathbb{R}^n$-ko S eta T azpiespazio afinak emanda, horien arteko distantzia definitu eta kalkulatzeko emaitzak ikusiko ditugu.

8.3.1. Definizioa. Izan bitez $\mathbb{R}^n$-ren A eta B azpimultzoak. Esango dugu *A eta B azpimultzoen arteko distantzia* honako zenbaki erreal hau dela:

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

Bereziki, $A = \{p\}$ puntu bakarreko multzoa denean, honako hau betetzen da:

$$d(p,B) = \inf\{d(p,b) : b \in B\}.$$

8.3.2. Oharra. Aurrera jarraitu aurretik, ohar pare bat.

i. Nabaria denez, $A \cap B \neq \varnothing$ bada, $d(A,B) = 0$ da.

ii. Erraz ikus daiteke $d(A,B) = \inf\{d(a,B) : a \in A\}$ dela.

8.3.3. Proposizioa. *Izan bitez $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina eta $p \in \mathbb{R}^n$ puntua. Orduan, r_p puntua p puntuaren S-ren gaineko proiekzio ortogonala bada, honako berdintza hau beteko da:*

$$d(p,S) = d(p,r_p).$$

Frogapena. Har ditzagun, 8.2.2. proposizioa erabiliz, perpendikularrak diren $S = s + \vec{S}$ eta $T = p + (\vec{S})^{\perp}$ azpiespazioak. Gogoratu, r_p puntua $S \cap T$ ebakiduran dagoen puntu bakarra dela. Orduan, alde batetik, $q \in S$ edozein puntu hartuta, $\overrightarrow{qr_p} \in \vec{S}$ beteko da. Bestalde, $p, r_p \in T$ direnez, $\overrightarrow{pr_p} \in \vec{T}$ beteko da. Beraz, $\overrightarrow{r_p p} \perp \overrightarrow{qr_p}$ dira eta, Pitagorasen teorema erabiliz,

$$d(p,q)^2 = d(p,r_p)^2 + d(r_p,q)^2 \geqslant d(p,r_p)^2$$

da. Hortik, $d(p,q) \geqslant d(p,r_p)$ desberdintza lortzen da $q \in S$ guztietarako. Ondorioz,

$$d(p,S) = \inf\{d(p,q) |\ q \in S\} = d(p,r_p).$$

□

8.3.4. Oharra. $\mathbb{R}^n$-ren erreferentzia-sistema afin baten oinarria ortonormala denean, *erreferentzia-sistema ortonormala* dugula esaten da. Adibidez, erreferentzia-sistema kanonikoa erreferentzia-sistema ortonormala da.

8.3.5. Adibidea. Izan bedi S erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko $2x - y + 4 = 0$ ekuazio inplizitua duen $\mathbb{R}^2$-ko zuzen afina eta $p = (1,1) \in \mathbb{R}^2$ puntua. Kalkula ezazu p puntutik S azpiespazio afinera dagoen distantzia.

Aurreko emaitza erabiliz, p puntuaren S gaineko proiekzioa kalkulatuko dugu, r_p deiturikoa. Orduan, $d(p,S) = d(p,r_p)$ izango da. Har dezagun $T = p + \vec{S}^{\perp}$, non $\dim \vec{S}^{\perp} = \dim \mathbb{R}^2 - \dim S = 1$ den. Orduan, $\vec{S}^{\perp}$ azpiespazio bektorialaren bektore sortzailea zehazteko bi modu daude:

- Alde batetik, $\vec{S}$-ren ekuazio inplizitua erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko (eta, beraz, biderketa eskalar estandarrarekiko erreferentzia-sistema afin ortonormala dena) $\vec{S}^\perp : 2x-y=0$ da. Hau da, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \vec{S}$ guztietarako, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right) = 0$ da. Beraz, $\vec{S}^\perp = \langle \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right) \rangle$ da zuzenean.
- Beste alde batetik, S-ren ekuazio bektoriala $S = (0,4) + \langle \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right) \rangle$ denez, $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \vec{S}^\perp$ guztietarako,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2y=0$$

bete behar da. Ondorioz, $\vec{S}^\perp = \langle \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right) \rangle$.

Bi kasuetan, $T = (1,1) + \langle \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\end{smallmatrix}\right) \rangle$ eraiki dugu, zeinaren ekuazio inplizitua $x+2y-3=0$ den. Orduan, $\{r_p\} = S \cap T = \{(-1,2)\}$ da. Azkenik, 8.3.3. proposizioaren arabera,

$$d(p,S) = d(p,r_p) = \|\overrightarrow{(1,1)(-1,2)}\| = \left\| \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}.$$

8.3.6. Adibidea. Izan bitez $p = (1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ puntua eta

$$S : \quad \begin{cases} x_1 = 0, \\ 2x_2 - x_3 + 3 = 0, \end{cases}$$

azpiespazio afina. Kalkula ezazu p puntutik S-ra dagoen distantzia.

Hasteko, kalkula dezagun p puntuaren proiekzio ortogonala S-ren gainean. Horretarako, eraiki dezagun $T = p + \vec{S}^\perp$ azpiespazio afina, non

$$\vec{S}^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \perp \vec{w},\ \forall \vec{w} \in \vec{S}\}$$

den. Lortu S-ren ekuazio bektoriala

$$S = (0,0,3) + \langle \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \rangle$$

eta, hortaz, $\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \in \vec{S}^\perp$ bada, orduan $\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\end{smallmatrix}\right) = 0$ bete behar da. Hau da, $x_2 + 2x_3 = 0$. Orduan,

$$\vec{S}^\perp = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \rangle$$

da. Hortik,

$$T = (1,-1,1) + \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad T : \{x_2 + 2x_3 - 1 = 0.$$

Orduan, $S \cap T = \{(0,-1,1)\}$ da, eta, hortaz,

$$d(p,S) = d((1,-1,1),(0,-1,1)) = \sqrt{1} = 1.$$

8.3.7. Korolarioa. *Izan bitez $p \in \mathbb{R}^n$ puntua, H hiperplano afina eta $\mathcal{R}$ erreferentzia-sistema ortonormala. Demagun $[p]_\mathcal{R} = (p_1,\dots,p_n)$ dugula, eta H-ren $\mathcal{R}$-rekiko ekuazio inplizitua $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0$ dela. Orduan,*

$$d(p,H) = \frac{|A_1p_1 + \cdots + A_np_n + B|}{\sqrt{(A_1)^2 + \cdots + (A_n)^2}}.$$

Frogapena. Izan bedi $H = a+\vec{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ hiperplanoa eta $p \in \mathbb{R}^n$ puntua. Ohartu p puntua H hiperplanoan badago, berdintzako bi aldeek zero balioa ematen dutela. Suposa dezagun, beraz, $p \notin H$ dela. Izan bitez p puntutik igarotzen den eta H-rekiko perpendikularra den $P = p + \vec{H}^{\perp}$ azpiespazio afina eta

$$\{r_p\} = H \cap (p + \vec{H}^{\perp}) \in \mathbb{R}^n$$

puntua (p puntuaren H gaineko proiekzio ortogonala, alegia). Aurreko emaitza erabiliz, badakigu $d(p,H) = d(p,r_p)$ berdintza betetzen dela. Froga dezagun $d(p,r_p)$ balioa enuntziatuko adierazpenarekin bat datorrela.

Ohartu $\mathbb{R}^n$-ren erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko $\vec{H}$-ren ekuazio inplizitua

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = 0$$

itxurakoa dela. Orduan, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \vec{H}$ guztietarako, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = 0$ betetzen denez, $\vec{H}^{\perp} = \left\langle \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \right\rangle$ da. Har dezagun honako bektore unitario hau

$$\vec{u} = \frac{(A_1, \ldots, A_n)^t}{\|(A_1, \ldots, A_n)^t\|}.$$

Orduan, $p, r_p \in P$ direnez, existitzen da $k \in \mathbb{R}$ balioa non $\overrightarrow{pr_p} = k\vec{u}$ den eta $d(p,r_p) = |k|$ izango da. Orain, $x \in H$ guztietarako, biderketa eskalarraren propietateak erabiliz eta $\overrightarrow{r_px} \in \vec{H}$ dela jakinik,

$$\overrightarrow{px} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{pr_p} + \overrightarrow{r_px}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{pr_p} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{r_px} \cdot \vec{u} = k\vec{u} \cdot \vec{u} = k$$

lortuko da. Beraz, definizioa erabiliz, honako berdintza honetatik

$$\overrightarrow{px} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\|(A_1, \ldots, A_n)^t\|}\big((x_1 - p_1)A_1 + \cdots + (x_n - p_n)A_n\big)$$

emaitza ondorioztatuko da:

$$d(p,H) = d(p,r_p) = |k| = |\overrightarrow{px} \cdot \vec{u}| = \frac{|A_1p_1 + \cdots + A_np_n + B|}{\sqrt{A_1^2 + \cdots + A_n^2}}.$$

□

8.3.8. Adibidea. Ohartu, 8.3.3. adibidean, $\mathbb{R}^2$-ko $p = (1,1)$ puntutik $2x - y + 4 = 0$ ekuazio inplizitua duen $S \subseteq \mathbb{R}^2$-ko hiperplanorako distantzia kalkulatu dugula. Orain, aurreko proposizioari esker, balio hori berehala kalkula dezakegu:

$$d(p,S) = \frac{|2.1 - 1.1 + 4|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

8.3.9. Proposizioa. *Izan bitez $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$-ren azpiespazio afinak $S \cap T = \varnothing$ izanik. Izan bedi $P \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina, S eta T azpiespazioekiko aldi berean perpendikularra dena, eta demagun $P \cap S = \{s\}$ eta $P \cap T = \{t\}$ direla. Orduan,*

$$d(S,T) = d(s,t).$$

Frogapena. Frogatu nahi dugu, $p \in S$ eta $q \in T$ guztietarako, $d(p,q) \geqslant d(s,t)$ desberdintza betetzen dela. Defini dezagun $\mathbb{R}^n$-ren honako puntu hau

$$r = s + \overrightarrow{sr} \overset{\text{def}}{=} s + \overrightarrow{tq}$$

eta ikus dezagun $\overrightarrow{rp} \perp \overrightarrow{rq}$ direla. Hasteko, $\overrightarrow{rq} = \overrightarrow{rt} + \overrightarrow{tq}$ eta $\overrightarrow{st} = \overrightarrow{sr} + \overrightarrow{rt}$ berdintzak erabiliz, honako hau beteko da:

$$\overrightarrow{sr} = \overrightarrow{tq} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{rq} = \overrightarrow{st}.$$

Orduan, $\overrightarrow{rs} \in \vec{T}$, $\overrightarrow{sp} \in \vec{S}$ eta $\overrightarrow{rq} \in \vec{P}$ direnez,

$$\overrightarrow{rp} \cdot \overrightarrow{rq} = \overrightarrow{rs} \cdot \overrightarrow{rq} + \overrightarrow{sp} \cdot \overrightarrow{rq} = 0$$

da, $P \perp T$ eta $S \perp P$ baitira. Beraz, Pitagorasen teorema erabiliz,

$$d(p,q)^2 = d(p,r)^2 + d(r,q)^2 \geqslant d(r,q)^2$$

desberdintzatik,

$$d(p,q) \geqslant d(r,q) = \|\overrightarrow{rq}\| = \|\overrightarrow{st}\| = d(s,t)$$

lortuko da; nahi bezala. □

8.3.10. Adibidea. Izan bitez $\mathbb{R}^3$ espazio afinean honako azpiespazio afina hauek:

$$S = (1,0,0) + \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{eta} \quad T = (0,0,0) + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Kalkula dezagun $d(S,T)$ balioa.

Hasteko, ikus dezagun ea $S \cap T \neq \varnothing$ den edo ez. Baiezko kasuan, $d(S,T) = 0$ izango da. Horretarako, 7.3.3. proposizioa erabiliko dugu:

$$S \cap T \neq \varnothing \Leftrightarrow \overrightarrow{(0,0,0)(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \vec{S} + \vec{T},$$

baina garbi dago $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \notin \vec{S} + \vec{T}$ dela, eta, beraz, S-ren eta T-ren arteko ebakidura hutsa da. Orain, $d(S,T)$ kalkulatzeko, S eta T azpiespazio afinekiko aldi berean perpendikularra den $R \subset \mathbb{R}^3$ azpiespazio afina kalkulatuko dugu. Horrela, $\{r_S\} = S \cap R$ eta $\{r_T\} = T \cap R$ badira, 8.3.9. proposizioa erabiliz,

$$d(S,T) = d(r_s, r_T) = \|\overrightarrow{r_S r_T}\|$$

beteko da. Hasteko, $R \perp S$ eta $R \perp T$ izan behar direnez, bereziki horien norabideak ortogonalak izan behar dira:

$$\vec{R} \perp \vec{S} \quad \text{eta} \quad \vec{R} \perp \vec{T}.$$

Beraz, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \vec{R}$, baldin eta soilik baldin

$$\begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = 0 \\ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{3}x \\ y = 0. \end{cases}$$

Beraz, $\vec{R} = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ da. Orain, R definitzeko puntua aukeratzea falta zaigu, eta, horretarako, honako bi baldintza hauek erabiliko ditugu: $R \cap S \neq \varnothing \neq R \cap T$. Orduan, 7.3.3. proposizioa erabiliz, $(a,b,d) \in R$ bada,

$$\begin{pmatrix} a-1 \\ b \\ d \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \rangle \text{ eta } \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \rangle$$

bete beharko dira. Hortaz,

$$\begin{vmatrix} a-1 & -2 & 3 \\ b & 2 & 0 \\ d & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ b & 1 & 0 \\ d & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4a+13b-6d-4=0, \\ 2a-3d=0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} d=\frac{2}{3}a, \\ b=\frac{4}{13}. \end{cases}$$

Beraz, $R=(1,4/13,2/3)+\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2/3\end{smallmatrix}\right)\rangle$ ekuazio bektorialetik,

$$R\colon \begin{cases} y=4/13, \\ 2x-3z=0 \end{cases}$$

ekuazioak lortuko ditugu. Jakinik, S-ren ekuazio inplizitua

$$S\colon \begin{cases} x+y-1=0, \\ 3x+2z=3 \end{cases}$$

dela, R-ren eta S-ren ekuazioez osaturiko sistema lineala ebatziz gero, $S\cap R=\{(9/13,4/13,6/13)\}$ puntua lortuko da.

Antzeko eran, jakinik T-ren ekuazio inplizitua

$$T\colon \begin{cases} x=0, \\ z=0 \end{cases}$$

dela, zuzenean $R\cap T=\{(0,4/13,0)\}$ lortzen da. Ondorioz,

$$d(S,T)=d\big((9/13,4/13,6/13),(0,4/13,0)\big)=\|(-9/13,0,-6/13)^t\|=\frac{\sqrt{117}}{13}$$

da.

8.3.11. Proposizioa. *Izan bitez $S,T\subseteq\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio afin paraleloak, eta demagun* $\dim S\leqslant\dim T$ *dela. Orduan,*

$$d(S,T)=d(p,T),$$

$p\in S$ edozein izanik.

Frogapena. Izan bitez $S=s+\vec{S}$ eta $T=t+\vec{T}$ espazio afinak $\mathbb{R}^n$-ren barruan. Demagun S eta T paraleloak direla, $\dim S\leqslant\dim T$ izanik. Hau da, demagun $\vec{S}\subseteq\vec{T}$ partekotasuna betetzen dela.

Eraiki dezagun $P=s+\vec{T}^{\perp}$ azpiespazio afina, zeina s puntuaren proiekzio ortogonala den T-ren gainean. Orduan, P eta T perpendikularrak dira, eta, $r_s=P\cap T$ bada, 8.3.3. proposizioari esker,

$$d(s,T)=d(s,r_s)$$

da. Bestalde, $s\in S\cap P\neq\varnothing$ eta $\vec{P}\perp\vec{S}$ ere betetzen dira, hau da, P eta S perpendikularrak dira. Ondorioz, P azpiespazioa S eta T azpiespazioekiko perpendikularra da aldi berean, eta, 8.3.9. proposizioa erabiliz, $d(S,T)=d(s,r_s)$ da. Hortaz, $d(S,T)=d(s,T)$ lortu dugu. □

8.3.12. Proposizioa. *Izan bitez $S,T\subseteq\mathbb{R}^n$ azpiespazio afinak,* $\dim S<\dim T$ *izanik. Demagun S eta T* **gurutzatzen** *direla. Izan bedi S azpiespazioarekin paraleloa den eta T azpiespazioa barruan duen $P\subseteq\mathbb{R}^n$ azpiespazio afinik txikiena; hau da, hartu $t_0\in T$ edozein eta $P=t_0+(\vec{S}+\vec{T})$ da. Orduan, $s\in S$ guztietarako, honako berdintza hau beteko da:*

$$d(S,T)=d(s,P).$$

Frogapena. Hasteko, S azpiespazioarekin paraleloa den P azpiespazio afina eraikitzeko, $\vec{S} \subseteq \vec{P}$ bete behar da. Gainera, P azpiespazioak $T = t + \overrightarrow{T}$ bere barnean izan behar duenez, $\vec{T} \subseteq \vec{P}$ eta $t \in P$ ere bete behar dira. Beraz, $P = t + \vec{T} + \vec{S}$ lortuko dugu eta hori da aurreko baldintzak betetzen dituen azpiespazio afinik txikiena.

Hipotesiz, S eta P azpiespazio paraleloen dimentsioek honako desberdintza hau $\dim S < \dim P$ beteko dute, eta, aurreko emaitza erabiliz, badakigu $d(S,P) = d(s,P)$ dela $s \in S$ guztietarako. Nahikoa da, beraz, $s_0 \in S$ baterako $d(s_0,P) = d(S,T)$ dela ikustea, emaitza frogatzeko.

Izan bedi R azpiespazio afina S eta T azpiespazio afinekiko aldi berean perpendikularra (ikus 8.2.3. proposizioa). Orduan, $S \cap R = \{s_0\}$ eta $T \cap R = \{t_0\}$ atomoak dira, eta $d(S,T) = d(s_0,t_0)$ da. Gainera, $\vec{R} \perp \vec{T}$ eta $\vec{S} \perp \vec{R}$ betetzen direnez, $\vec{R} \perp \vec{P}$ dira, eta $T \cap R \subseteq P \cap R$ partekotasuna beteko da. Beraz, $t_0 \in P \cap R$ da. Ondorioz, 8.2.3., 8.3.3. eta 8.3.11. proposizioak erabiliz, hurrenez hurren,

$$d(S,T) = d(s_0,t_0) = d(s_0,P) = d(s,P)$$

berdintza daukagu. □

8.3.13. Adibidea. Izan bitez $\mathbb{R}^4$ espazio afinean

$$S = (0,0,0,0) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{eta} \quad T = (0,1,0,1) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

azpiespazio afinak. Kalkula dezagun $d(S,T)$ balioa, 8.3.12. proposizioa erabiliz. Hasteko, $\dim T < \dim S$ denez, eraiki dezagun S barruan duen eta R-rekin paraleloa den $P \subseteq \mathbb{R}^4$ azpiespazio afina. Orduan, P azpiespazio afinak

$$P = (0,0,0,0) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ekuazio bektoriala dauka, eta, hortik, ekuazio inplizitua lor dezakegu; $t = 0$. alegia. Orain, 8.3.7. Korolarioari esker,

$$d(S,T) = d(P,t) = \frac{|1|}{\sqrt{1}} = 1$$

da.

8.4 Ariketak

8.4.1. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^2$-ren S_1, S_2 eta S_3 hiru zuzen:

i. Frogatu $S_1 \parallel S_2$ eta $S_3 \perp S_1$ badira, orduan $S_3 \perp S_2$ dela.

ii. Frogatu $S_1 \perp S_3$ eta $S_3 \perp S_2$ badira, orduan $S_1 \parallel S_2$ dela.

iii. Demagun $S_1 \parallel S_2$ eta $p, q \in S_1$ direla. Frogatu $d(p, S_2) = d(q, S_2)$ dela.

8.4.2. Ariketa. Izan bitez p, q eta r $\mathbb{R}^2$-ren hiru puntu ezberdin. Frogatu $d(r,p) = d(r,q)$ dela baldin eta soilik baldin r puntua $\overrightarrow{pq}$ zuzenkiaren erdibitzailean badago.

8.4.3. Ariketa. Izan bitez $p_0 = (1,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ puntua eta S apziespazio afina, $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$ ekuazio inplizitua daukana. Kalkulatu p_0 puntutik igarotzen den eta S-rekiko perpendikularra den zuzenaren ekuazioa.

8.4.4. Ariketa. Izan bedi $S \subset \mathbb{R}^3$-ren honako azpiespazio afin hau:

$$S : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Kalkulatu $o = (0,0,0)$ puntutik igarotzen den eta S-rekiko perpendikularra den zuzenaren ekuazioa.

8.4.5. Ariketa. Izan bedi $S \subset \mathbb{R}^4$-ren honako azpiespazio afin hau:

$$S : \begin{cases} x_1 - x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Kalkulatu $p = (1,1,1,1)$ puntuaren eta S azpiespazioaren arteko distantzia.

8.4.6. Ariketa. Izan bitez $S, T \subset \mathbb{R}^3$ erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko honako ekuazio hauek dituzten azpiespazio afinak:

$$\frac{x_1}{3} = \frac{x_2+2}{-4} = \frac{x_3-1}{4}, \qquad \frac{x_1-2}{5} = \frac{x_2+4}{3} = \frac{x_3+1}{-2},$$

hurrenez hurren. Kalkulatu S eta T azpiespazioen arteko distantzia.

8.4.7. Ariketa. Izan bitez $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$-ren honako azpiespazio afin hauek:

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\} \qquad T : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Aztertu S eta T azpiespazioen arteko posizio erlatiboa, eta kalkulatu haien arteko distantzia.

8.4.8. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^4$ espazio euklidearreko honako azpiespazio afina hauek:

$$S : \begin{cases} z - t = -1, \\ x + y - t = 1, \end{cases} \qquad T : (x,y,z,t) = (1,2,0,0) + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

i. Aztertu bi azpiespazio afinen arteko posizio erlatiboa.

ii. Kalkulatu $S + T$ azpiespazio afinaren ekuazio inplizituak.

iii. Lortu $(0,2,1,-1)$ puntutik S eta $S + T$ azpiespazioetara dagoen distantzia.

8.4.9. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^3$ espazio euklidearreko honako azpiespazio afina hauek:

$$S : \begin{cases} y+z-6=0, \\ x+z-7=0, \end{cases} \quad \text{eta} \quad T_a = (2,4,a) + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Lortu S eta T_a azpiespazioen arteko distantzia a parametroaren arabera.

8.4.10. Ariketa. Izan bitez $S, T \subseteq \mathbb{R}^4$-ren honako azpiespazio afina hauek:

$$S : \begin{cases} x_1+x_3+x_4=0, \\ x_2-x_3-x_4=-1, \end{cases} \qquad T = \{(x_1,\dots,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1-x_3-2x_4=1\}$$

eta $p_0 = (1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4$. Kalkulatu $d(p_0,S)$, $d(p_0,T)$ eta $d(S,T)$ distantziak.

8.4.11. Ariketa. Izan bitez $P, T \subseteq \mathbb{R}^4$-ren honako bi azpiespazio afin hauek:

$$P : \begin{cases} x-y-1=0, \\ z=t, \end{cases} \qquad T : \begin{cases} x=0, \\ t=0, \\ y=z. \end{cases}$$

i. Kalkulatu koordenatu jatorritik igarotzen den S azpiespazio afinaren ekuazio inplizituak, jakinik bere norabidea P eta T azpiespazioen norabideekin ortogonala dela.

ii. Aztertu S azpiespazioaren posizio erlatiboa P azpiespazioarekiko, nahiz T azpiespazioarekiko.

iii. Zein da $d(S,P)$ distantziaren balioa? Eta $d(S,T)$ distantziarena?

iv. Lortu P eta T azpiespazioekiko aldiberean perpendikularra den R azpiespazio afin bat.

v. Zein da $d(P,T)$ distantziaren balioa?

8.4.12. Ariketa. Izan bitez $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$ espazioko honako bi azpiespazio afin hauek:

$$S : \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \text{eta} \quad T = (0,-1,1) + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

i. Aurkitu S eta T azpiespazioekiko perpendikularra den P zuzen afinaren ekuazio inplizituak.

ii. Kalkulatu $d(S,T)$ eta $d((0,0,0),T)$ distantziak.

8.4.13. Ariketa. Izan bitez $\mathbb{R}^4$-ko erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko honako era honetan emandako $\mathbb{R}^4$-ren azpiespazio afinak

$$S = (1,0,0,0) + \langle \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{eta} \quad T = (1,4,0,5) + \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle,$$

non $a \in \mathbb{R}$ parametroa den. Erantzun itzazu honako galdera hauek.

i. Azter ezazu S eta T-ren arteko posizio erlatiboa a parametroaren balioen arabera.

ii. Azter ezazu S eta T-rekin aldi berean perpendikularra den azpiespazioaren bakartasuna a parametroaren arabera.

iii. Hartu $a=-1$ balioa, eta kalkulatu $d(S,T)$ balioa.

9. kapitulua

Aplikazio afinak, mugimendu, eta antzekotasunak

Bektore-espazioen gaian, horien arteko aplikazioak definitzean, aplikazio linealak kontsideratu ziren; nolabait, aplikazio linealek bektore-espazioen egitura «gordetzen» baitute. Gai honetan, espazio afinen eta espazio afin euklidearren arteko aplikazioak definitu nahiko ditugu, eta berriro aplikazio horiek espazio afin eta espazio afin euklidearren (bereziki, distantzia) egitura «gordetzea» nahiko da. Gai honetako nozio berri nagusiak *aplikazio afinak, transformazioak* eta *isometria afinak (edo mugimenduak)* izango dira.

9.0.1. Oharra. Gai honetan zehar, $\mathbb{R}^n$ espazio afin euklidearrean erreferentzia-sistema kanonikoarekin egingo dugu lan.

9.1 Aplikazio afinak

Has gaitezen espazio afinen arteko aplikazioak definituz.

9.1.1. Definizioa. Izan bitez $n, m \in \mathbb{N}$ zenbaki arruntak, $\mathbb{R}^n$ eta $\mathbb{R}^m$ espazio afinak eta $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazioa. Demagun $X \in \mathrm{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ matrizea $x \in \mathbb{R}^n$ puntu orokor baten osagaien zutabe-matrizea dela eta $Y \in \mathrm{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ matrizea $f(x)$ puntuaren osagaiena. Esango dugu f *aplikazio afina* dela, baldin eta, $x \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, existitzen badira $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ eta $B \in \mathrm{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})$ matrizeak, non $Y = AX + B$ berdintza betetzen den.

9.1.2. Adibidea. Ikus ditzagun oinarrizko adibide batzuk.

i. Identitate aplikazioa $1_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina da ($A = I_n$ identitate matrizea eta $B \equiv 0$ zutabe-matrize nulua izanik).

ii. Aplikazio konstanteak aplikazio afinak dira ($A = 0$ matrizea $m \times n$ ordenako matrize nulua izanik).

iii. Edozein $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio lineal aplikazio afina da, $B = 0$ hartuta.

9.1.3. Oharra. Aurreko definizioa aztertuta, berehalakoa da ikustea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio afin bakoitzak $\vec{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ erako aplikazio lineal bat zehazten duela, A matrizeak *oinarri kanonikoekiko* zehazten duen aplikazio lineala, hain zuzen ere.

9.1.4. Proposizioa. *Izan bitez $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio afina, $\vec{f}$ horri elkartutako aplikazio lineala eta $x \in \mathbb{R}^n$ edozein.*

i. *Idatzi $o = (0,\dots,0)$ eta finkatu $b \in \mathbb{R}^m$; orduan, $f(x) = b + \vec{f}(\overrightarrow{ox})$.*

ii. *Edozein $p_0 \in \mathbb{R}^n$ hartuta, $f(x) = f(p_0) + \vec{f}(\overrightarrow{p_0x})$ da.*

iii. *Edozein $p, q \in \mathbb{R}^n$ hartuta, $\vec{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$ da.*

Frogapena. Lehenengo propietatea aplikazio afinaren definiziotik lortzen da (ikusi 9.1.3. Oharra). Bigarren propietaterako, lehenengo propietatea erabiliz, idatzi

$$f(p_0) = b + \vec{f}(\overrightarrow{op_0})$$

eta ohartu $\vec{f}(\overrightarrow{p_0x}) = \vec{f}(\overrightarrow{p_0o} + \overrightarrow{ox}) = -\vec{f}(\overrightarrow{op_0}) + \vec{f}(\overrightarrow{ox})$ dela. Orduan,

$$f(p_0) + \vec{f}(\overrightarrow{p_0x}) = b + \vec{f}(\overrightarrow{op_0}) - \vec{f}(\overrightarrow{op_0}) + \vec{f}(\overrightarrow{ox}) \overset{\text{i.}}{=} f(x).$$

Azkenik, $q \in \mathbb{R}^n$ bada, lehenengo propietatetik, $f(q) = f(p) + \vec{f}(\overrightarrow{pq})$ da. Baliokidea dena, $\vec{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$. □

9.1.5. Oharra. Aurreko propietateen ondorioz, aplikazio afin bat guztiz zehaztuta geratuko da puntu baten irudia eta elkartutako aplikazio lineala ezagunak direnean. Bestalde, aplikazio linealen gaian ikusi genuenez, aplikazio lineal bat guztiz zehaztuta geratuko da eremuko oinarri bateko bektoreen irudia ezagututa. Hori dela eta, n dimentsioko espazio afin batetik ateratzen den aplikazio afin bat guztiz zehaztuta geratuko da afinki independenteak diren $n+1$ punturen irudia ezagutuz gero. Hori da, hain zuzen ere, honako proposizio honek dioena.

9.1.6. Proposizioa. *Izan bitez $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^n$ afinki independenteak diren $n+1$ puntu eta $q_0, q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^m$ edozein $n+1$ puntu. Orduan, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ erako aplikazio afin bakarra dago, non $f(p_i) = q_i$ den $i \in \{0,\dots,n\}$ guztietarako.*

Frogapena. Izan bitez $p_0, p_1, \dots p_n$ afiniki independenteak diren $\mathbb{R}^n$-ko puntuak. Beste era batera esanda, $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n} \in \mathbb{R}^n$ bektoreak linealki independenteak dira, eta, beraz, $\mathbb{R}^n$-ko oinarri bat osatzen dute. Bereziki, $\mathcal{R} = (p_0, \{\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}\})$ bikotea $\mathbb{R}^n$-ren erreferentzia-sistema afina da. Orduan, $i \in \{1,\dots,n\}$ guztietarako, $\vec{f}(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{f(p_0)f(p_i)} = \overrightarrow{q_0q_i}$ ezagunak dira.

Orain, A matrizea eraikitzeko, oinarri kanonikoko bektoreen $\vec{f}$ bitartezko irudiak ezagutu nahiko ditugu. Horretarako, nahikoa da $i \in \{1,\dots,n\}$ guztietarako, oinarri kanonikoko bektoreak

$$\vec{e_i} = \lambda_{i,1}\overrightarrow{p_0p_1} + \dots + \lambda_{i,n}\overrightarrow{p_0p_n}$$

eran deskonposatzea, eta, $\vec{f}$-ren linealtasunari esker,

$$\vec{f}(\vec{e_i}) = \lambda_{i,1}\overrightarrow{q_0q_1} + \dots + \lambda_{i,n}\overrightarrow{q_0q_n}$$

guztiz zehaztea. Hortik, A matrizea zehaztuko dugu, eta, beraz, o puntuaren irudia zehaztea faltako da. Horretarako, nahikoa da o puntua $\mathcal{R}$ erreferentzia-sistemarekiko idaztea eta, aurreko informazioa erabiliz, bere irudia zehaztea.

Azkenik, f-ren bakartasuna frogatzeko, suposa dezagun $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio afinak direla, non, $i \in \{1,\dots,n\}$ guztietarako, $f(p_i) = q_i = g(p_i)$ betetzen diren. Orduan, $x \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p_0) + \vec{f}(\overrightarrow{p_0x}) = f(p_0) + \mu_1\vec{f}(\overrightarrow{p_0p_1}) + \dots + \mu_n\vec{f}(\overrightarrow{p_0p_n}) \\ &= f(p_0) + \mu_1\overrightarrow{f(p_0)f(p_1)} + \dots + \mu_n\overrightarrow{f(p_0)f(p_n)} = g(p_0) + \vec{g}(\overrightarrow{p_0x}) = g(x) \end{aligned}$$

betetzen denez, $f = g$ da. □

9.1.7. Oharra. Bereziki $p_0 = o, p_1 = e_1, \ldots, p_n = e_n$ badira, f aplikazio afin bakar horren adierazpena berehalakoa da. Izan ere, $Y = AX + B$ berdintza betetzen duen A matrizea zutabeka $\overrightarrow{q_0q_1}, \ldots, \overrightarrow{q_0q_n}$ bektoreen osagaiak dituen matrizea da, eta B matrizea q_0 puntuaren osagaiak dituena.

9.1.1. Talde afina

Dagoeneko ikusi dugu aplikazio linealen arteko konposaketak berriro ere aplikazio linealak direla. Orain, aplikazio afinek propietate berbera betetzen dutela ikusiko dugu.

9.1.8. Proposizioa. *Aplikazio afinen konposaketa aplikazio afina da. Are gehiago, konposaketari elkartutako aplikazio lineala, aplikazio afin bakoitzari elkartutako aplikazio linealen konposaketa da.*

Frogapena. Izan bitez $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eta $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ aplikazio afinak, non erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko adierazpen matrizialak honako modu honetan emanda dauden:

$$Y_f = A_f X + B_f \quad \text{eta} \quad Y_g = A_g X + B_g.$$

Orduan, aplikazioen arteko konposaketa matrizeen arteko biderketa denez, $g \circ f$ aplikazioaren adierazpen matriziala (erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko), honako hau da:

$$Y = A_g(A_f X + B_f) + B_g = (A_g A_f)X + (A_g B_f + B_g).$$

Beraz, $g \circ f$ aplikazio afina da, eta horri elkartutako aplikazio linealaren adierazpen matriziala $A_g A_f$ denez, $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ berdintza dugu. □

9.1.9. Proposizioa. *Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio afina. Orduan, f injektiboa, suprajektiboa edota bijektiboa da, baldin eta soilik baldin $\vec{f}$ injektiboa, suprajektiboa edota bijektiboa bada.*

Frogapena. Ikus dezagun f injektiboa dela, baldin eta soilik baldin $\vec{f}$ injektiboa bada. Demagun $\vec{f}$ injektiboa dela, eta izan bitez $p, q \in \mathbb{R}^n$ non $f(p) = f(q)$ den. Orduan,

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \vec{f}(\overrightarrow{pq}) = \vec{o}$$

berdintzatik, $\overrightarrow{pq} \in \ker \vec{f} = \{\vec{o}\}$ dela lortuko dugu. Hau da, $p = q$ da, eta, beraz, f injektiboa da. Demagun orain f injektiboa dela. Hartu $\vec{v} = \overrightarrow{ov}, \vec{w} = \overrightarrow{ox} \in \mathbb{R}^n$ edozein, non $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{f}(\vec{w})$ betetzen den. Orduan,

$$\vec{f}(\overrightarrow{ov}) = \overrightarrow{f(o)f(v)} = \overrightarrow{f(o)f(w)} = \vec{f}(\overrightarrow{ow}) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = f(w) \quad \Leftrightarrow \quad v = w \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ov} = \overrightarrow{ow},$$

eta, hortaz, $\vec{f}$ injektiboa da. □

9.1.10. Oharra. Bereziki, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio afina bijektiboa bada, orduan nahitaez $n = m$ berdintza beteko da.

9.1.11. Korolarioa. *Izan bedi $Y = AX + B$ adierazpena duen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina. Orduan, f bijektiboa da, baldin eta soilik baldin* $\det A \neq 0$.

Frogapena. Ikusi dugu f bijektiboa dela, baldin eta soilik baldin $\vec{f}$ bijektiboa bada. Eta aplikazio linealen kasuan, ikusi dugu $\vec{f}$ bijektiboa dela, baldin eta soilik baldin A matrizearen heina n bada, hau da, A-ren determinantea desberdin zero bada. □

9.1.12. Proposizioa. *Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afin bijektiboa. Orduan, f^{-1} alderantzizko aplikazioa ere aplikazio afina da. Are gehiago, $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$.*

Frogapena. Demagun f-ren adierazpen matriziala $Y = AX + B$ erakoa dela. Hipotesiz f bijektiboa da, hau da, $\vec{f}$ bijektiboa da eta baliokidea dena, A matrize alderanzgarria da. Orduan,

$$A^{-1}Y = A^{-1}(AX + B) = A^{-1}AX + A^{-1}B \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}Y - A^{-1}B$$

adierazpen matrizialak $f^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina definitzen du. Ohartu, $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R}^n} = f \circ f^{-1}$ berdintzak betetzen direla (**ariketa**). Beraz, f^{-1} aplikazio afina f-ren alderantzizkoa da non $\overrightarrow{f^{-1}} = (\vec{f})^{-1}$ den. □

9.1.13. Definizioa. Aplikazio afin bijektiboei *transformazio afin* deritze.

9.1.14. Korolarioa. $\mathbf{TA}(\mathbb{R}^n) = \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ transformazio afina}\}$ *multzoak talde-egitura du aplikazioen ohiko konposaketarekiko, eta* $\mathbb{R}^n$ *espazio afinaren* talde afina *deritzo.*

9.1.2. Aplikazio afinak eta azpiespazio afinak

Gai honen hasieran esan dugun bezala, aplikazio afinek espazio afinen egitura «gordetzen» dute, hau da, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina bada, aplikazio afin baten bidezko S-ren irudia berriro ere azpiespazio afina izango da. Honako emaitza honek irudi hori nola lortu azaltzen du.

9.1.15. Proposizioa. *Izan bitez* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *aplikazio afina eta* $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *azpiespazio afina. Orduan,* $f(S)$ *multzoa* $\mathbb{R}^m$ *espazioaren azpiespazio afina da, eta horren norabidea* $\overrightarrow{f(S)} = \vec{f}(\vec{S})$ *da. Horrez gain,* $\dim(f(S)) \leqslant \dim S$ *desberdintza betetzen da.*

Frogapena. Idatz dezagun $S = s + \vec{S}$ moduan. Orduan, $p \in S$ guztietarako, $p = s + \vec{v}$ da, non $\vec{v} \in \vec{S}$ den eta, beraz, $f(p) = f(s) + \vec{f}(\vec{v})$ da. Orduan,

$$\begin{aligned} f(S) &= \{f(p) \mid p \in S\} = \{f(s) + \vec{f}(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \vec{S}\} \\ &= f(s) + \{\vec{f}(\vec{v}) \mid \vec{v} \in \vec{S}\} = f(s) + \vec{f}(\vec{S}), \end{aligned}$$

eta, hortaz, $f(S)$ azpiespazio afina da. Gainera, $\overrightarrow{f(S)} = \vec{f}(\vec{S})$ berdintza daukagu, eta berehalakoa da $\dim f(S) \leqslant \dim S$ betetzen dela ohartzea. □

9.1.16. Korolarioa. *Izan bitez* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *aplikazio afina eta* $\mathbb{R}^n$*-ren* S_1 *eta* S_2 *azpiespazio afinak. Demagun* S_1 *eta* S_2 *paraleloak direla; orduan,* $f(S_1)$ *eta* $f(S_2)$ *ere paraleloak dira.*

Frogapena. Gogoratu S_1 eta S_2 paraleloak direla, baldin eta $\vec{S}_1 \subseteq \vec{S}_2$, $\vec{S}_2 \subseteq \vec{S}_1$ edo $\vec{S}_1 = \vec{S}_2$ bada. Demagun, $\vec{S}_1 \subseteq \vec{S}_2$ partekotasuna betetzen dela. Orduan, $\overrightarrow{f(S_1)} = \vec{f}(\vec{S}_1) \subseteq \vec{f}(\vec{S}_2) = \overrightarrow{f(S_2)}$ partekotasuna beteko da eta, hortaz, $f(S_1)$ eta $f(S_2)$ paraleloak dira. □

9.1.17. Proposizioa. *Izan bitez* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *aplikazio afina eta* $p, q, r \in \mathbb{R}^n$ *lerrokatuta dauden hiru puntu. Orduan,* $f(p), f(q), f(r) \in \mathbb{R}^m$ *puntuak ere lerrokatuta daude.*

Frogapena. Definizioz, p, q, r puntuak lerrokatuta daude, baldin eta existitzen bada $\lambda \in \mathbb{R}$ non $\overrightarrow{pq} = \lambda\overrightarrow{pr}$ den. Orduan,

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{pq} = \vec{f}(\lambda\overrightarrow{pr}) \underset{\substack{\uparrow \\ \vec{f}\text{ lineala}}}{=} \lambda\vec{f}(\overrightarrow{pr}) = \lambda\overrightarrow{f(p)f(q)}$$

betetzen da, hots, $f(p), f(q), f(r)$ puntuak lerrokatuta daude. □

9.1.18. Definizioa. Izan bitez X edozein multzo eta $f\colon X \to X$ aplikazioa. Esango dugu $x \in X$ puntua *f aplikazioaren puntu finkoa* dela, baldin eta $f(x) = x$ betetzen bada. Gainera, f-ren puntu finkoen multzoa honako era honetan idatziko dugu:

$$\mathbf{PF}_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}.$$

9.1.19. Proposizioa. *Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina. Orduan, $\mathbf{PF}_f \neq \varnothing$ bada, $\mathbf{PF}_f$ multzoa $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio afina da, horren norabidea*

$$\overrightarrow{\mathbf{PF}}_f = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}\} = \ker(\vec{f} - 1_{\mathbb{R}^n})$$

izanik.

Frogapena. Hipotesiz $\mathbf{PF}_f$ multzo ez-hutsa denez, existitzen da $x_0 \in \mathbf{PF}_f$ puntu finko bat gutxienez. Beste punturik ez badago, amaitu dugu, atomoak $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio afinak direla ikusi baitugu. Orduan, $x \in \mathbf{PF}_f$ guztietarako,

$$\begin{aligned} x = f(x) = f(x_0) + \vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) = x_0 + \vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{x_0x} = \vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) \Leftrightarrow 1_{\mathbb{R}^n}(\overrightarrow{x_0x}) = \vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) \Leftrightarrow (\vec{f} - 1_{\mathbb{R}^n})(\overrightarrow{x_0x}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Beraz, $x \in \mathbf{PF}_f$ bada, $x = x_0 + \vec{f}(\overrightarrow{x_0x}) \in x_0 + \ker(\vec{f} - 1_{\mathbb{R}^n})$ beteko da. Hots, $\mathbf{PF}_f \subseteq \ker f(\vec{f} - 1_{\mathbb{R}^n})$ da. Beste partekotasuna, berriz, nabaria da: hartu $x_0 + \vec{v} \in x_0 + \ker(\vec{f} - 1_{\mathbb{R}^n})$ edozein. Orduan,

$$f(x_0 + \vec{v}) = f(x_0) + \vec{f}(\vec{v}) = x_0 + \vec{v}$$

betetzen da, hau da, $x_0 + \ker(\vec{f} - 1_{\mathbb{R}^n}) \subseteq \mathbf{PF}_f$ da. □

9.2 Aplikazio afin motak

Atal honetan ikusiko ditugun adibide guztiak $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erako aplikazio afinak izango dira. Datozen azpiataletan, aplikazio afin mota desberdinak ikusiko ditugu, eta, horien propietate nagusiak ere.

9.2.1. Translazioak

9.2.1. Definizioa. Esango dugu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina *translazioa* dela, baldin eta horren zati lineala $\vec{f} = 1_{\mathbb{R}^n}$ identitate aplikazioa bada.

9.2.2. Oharra. Translazio baten adierazpena, beraz, $f(x) = x + \vec{v}$ erakoa da $x \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ finkoa izanik. Aurreko $\vec{v}$ bektoreari *translazio-bektorea* deritzo. Sarritan, $f = t_{\vec{v}}$ adieraziko dugu. Ohartu bereziki $t_{\vec{0}} = 1_{\mathbb{R}^n}$ dela.

9.2.3. Proposizioa. *Propietate hauek betetzen dira:*

i. *Translazioak transformazio afinak dira.*

ii. *Translazioen alderantzizkoak translazioak dira, $(t_{\vec{v}})^{-1} = t_{-\vec{v}}$ izanik.*

iii. *Translazioen konposaketa translazioa da, $t_{\vec{w}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{w}+\vec{v}}$ izanik.*

iv. *$\vec{v} \neq \vec{0}$ bada, $t_{\vec{v}}$ translazioak ez du puntu finkorik.*

v. *Edozein $p, q \in \mathbb{R}^n$ emanda, $d(p,q) = d(t_{\vec{v}}(p), t_{\vec{v}}(q))$ beteko da.*

Frogapena. Izan bedi $t_{\vec{v}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ translazioa. Orduan, $\overrightarrow{t_{\vec{v}}} = 1_{\mathbb{R}^n}$ denez, $t_{\vec{v}}$ bijektiboa da, hau da, transformazio afina. Orduan, hartu $t_{-\vec{v}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ translazioa, eta ez da zaila ikustea

$$t_{\vec{v}} \circ t_{-\vec{v}} = 1_{\mathbb{R}^n} = t_{-\vec{v}} \circ t_{\vec{v}}$$

betetzen dela. Ondorioz, $t_{\vec{v}}^{-1} = t_{-\vec{v}}$ da. Demagun $g = t_{\vec{v'}}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ beste translazio bat dela. Orduan,

$$(t_{\vec{v'}} \circ t_{\vec{v}})(x) = t_{\vec{v'}}(x + \vec{v}) = x + \vec{v} + \vec{v'}$$

da, eta, beraz, konposaketa hori berriro ere translazioa da. Orain, $f(p) = p \Leftrightarrow p + \vec{v} = p$ denez, nabaria da $\vec{v} \neq \vec{0}$ bada, ez dagoela $p \in \mathbb{R}^n$ punturik baldintza hori betetzen duenik. Azkenik, $p, q \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

$$d(t_{\vec{v}}(p), t_{\vec{v}}(q)) = \|\overrightarrow{(p+\vec{v})(q+\vec{v})}\| = \|\overrightarrow{pq}\| = d(p,q)$$

betetzen da. □

9.2.2. Homoteziak

9.2.4. Definizioa. Izan bedi $\lambda \in \mathbb{R}$ desberdin zero. Esango dugu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina *λ arrazoiko dilatazioa* dela, baldin eta $\vec{f} = \lambda 1_{\mathbb{R}^n}$ bada. Bereziki, $\lambda \neq 1$ denean, λ arrazoiko dilatazioari *λ arrazoiko homotezia* deritzo.

Ohartu $\lambda = 1$ arrazoiko dilatazioak bat datozela translazioekin .

9.2.5. Oharra. Suposa dezagun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina λ arrazoiko homotezia dela; orduan, $Y = \lambda X + B$ erako adierazpen matriziala du, edo baliokidea dena, $f(x) = \lambda x + \vec{v}$ erako aplikazioa da.

9.2.6. Proposizioa. *Propietate hauek betetzen dira:*

- **i.** *Homotezien konposaketa ez da zertan homotezia izan. Hala ere, dilatazioen konposaketa dilatazioa da.*
- **ii.** *Homoteziak transformazio afinak dira.*
- **iii.** *Homotezien alderantzizkoak homoteziak dira.*
- **iv.** *Homoteziek puntu finko bakarra dute.*
- **v.** *Homoteziek ez dituzte distantziak gordetzen.*

Frogapena. Izan bitez $g, f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ homoteziak, μ eta λ arrazoikoak, hurrenez hurren. Orduan,

$$(g \circ f)(x) = \mu(\lambda x + \vec{v}_1) + \vec{v}_2$$

da. Hau da, $g \circ f$ homotezia izateko $\mu\lambda \neq 1$ bete behar da, eta, printzipioz, baldintza hori ez du zertan bete behar. Horregatik, dilatazioen konposaketak berriro dilatazioak dira. Homoteziak transformazio afinak dira, $\vec{f} = \lambda I_n$ bijektiboa delako, eta alderantzizkoa,

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}\vec{v}$$

aplikazioa da. Ohartu $\lambda \neq 0$ izateagatik, $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$ dela.

Orain, kakula dezagun f homoteziaren puntu finkoen multzoa:

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \lambda x + \vec{v} = x \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 1)x = \vec{v} \quad \overset{\lambda \neq 1}{\Leftrightarrow} \quad x = \frac{\vec{v}}{\lambda - 1}.$$

Beraz, $\mathbf{PF}_f = \{\frac{\vec{v}}{\lambda-1}\}$ da. Azkenik, homoteziek ez dituzte distantziak mantentzen, $x, y \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, honako hau betetzen baita:

$$d(f(x), f(y)) = \|\overrightarrow{(\lambda x + \vec{v})(\lambda y + \vec{v})}\| = \|\lambda\overrightarrow{xy}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{xy}\| = |\lambda| d(x, y).$$

□

9.2.7. Definizioa. Homotezia baten puntu finko bakarrari *homoteziaren zentroa* deritzo. Horrela, λ arrazoiko eta c zentroko homotezia $h_{\lambda,c}$ bidez adieraziko dugu.

9.2.8. Oharra. Izan bedi λ arrazoiko eta c zentroko $h_{\lambda,c}$ homotezia. Orduan, $x \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, 9.1.4. proposizioa **ii.** erabiliz,

$$h_{\lambda,c}(x) = h_{\lambda,c}(c) + \overrightarrow{h_{\lambda,c}}(\overrightarrow{cx}) = c + \lambda\overrightarrow{cx}$$

da.

9.2.9. Proposizioa. *Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afin ez-konstantea. Orduan, f dilatazioa da, baldin eta soilik baldin edozein $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afinetarako S eta $f(S)$ paraleloak badira.*

Frogapena. Demagun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dilatazioa dela; hau da, $x \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, $f(x) = \lambda x + \vec{v}$ erako aplikazioa dela, $\lambda \in \mathbb{R}$ eta $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ izanik. Orduan, $S = s + \vec{S} \subseteq R^n$ azpiespazio afina bada, $f(S) = f(s) + \vec{f}(\vec{S})$ da, non $\vec{f}(\vec{S}) = \lambda\vec{S} = \vec{S}$ den. Beraz, S eta $f(S)$ paraleloak dira.

Demagun $\mathbb{R}^n$-ren azpiespazio guztietarako, S eta $f(S)$ paraleloak direla. Hasteko, demagun $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afinaren dimentsioa 1 dela; orduan, existitzen dira $s_0 \in \mathbb{R}^n$ eta $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ non $S = s_0 + \langle\vec{v}\rangle$ den. Orduan, $f(S) = f(s_0) + \langle\vec{f}(\vec{v})\rangle$ da, non $\vec{f}(\vec{v}) \in \langle\vec{v}\rangle$ den. Hipotesiz, f ez denez aplikazio konstantea, existitzen da $\lambda \in \mathbb{R}$ non $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ den. Baldintza hori, $\mathbb{R}^n$-ko bektore guztientzat bete behar da, eta ikus dezagun, $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ bete behar dela $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ guztietarako. Demagun, existitzen direla $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ eta $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, non $\vec{f}(\vec{v}_1) = \lambda_1\vec{v}_1$ eta $\vec{f}(\vec{v}_2) = \lambda_2\vec{v}_2$ diren. Orduan, $S = s_0 + \langle\vec{v}_1 + \vec{v}_2\rangle$ hartuta,

$$f(S) = f(s_0) + \langle\vec{f}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)\rangle = f(s_0) + \langle\vec{f}(\vec{v}_1) + \vec{f}(\vec{v}_2)\rangle = f(s_0) + \langle\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\rangle$$

izango litzateke. Noski, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ balitz, orduan $\langle\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2\rangle \neq \langle\vec{v}_1 + \vec{v}_2\rangle$ genuke, kontraesan batera iritsiz. Hortaz, $\mathbb{R}^n$-ren $\vec{v}$ bektore guztietarako, $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ bete behar da; hau da, f dilatazioa da. □

9.2.3. Proiekzioak

9.2.10. Definizioa. Esango dugu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina *proiekzio afina* dela baldin eta $f \circ f = f$ bada.

9.2.11. Adibidea. Aplikazio konstanteak eta identitate aplikazioa proiekzioak dira.

9.2.12. Proposizioa. *Demagun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ proiekzioa dela; orduan,*

$$\mathbf{PF}_f = \mathbf{Im} f = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \exists q \in \mathbb{R}^n \text{ non } f(q) = p\}.$$

Frogapena. Izan bedi $p \in \mathbf{FP}_f$; hau da, $p = f(p)$. Beraz, $p \in \operatorname{Im} f$ eta $\mathbf{PF}_f \subseteq \operatorname{Im} f$ betetzen dira. Beste partekotasuna betetzen dela frogatzeko, izan bedi $p \in \operatorname{Im} f$. Orduan, existitzen da $q \in \mathbb{R}^n$ non $f(q) = p$ den. Gainera, f proiekzioa denez, $f(f(q)) = f(q)$ da, eta, $f(f(q)) = f(p)$ berdintza erabiliz, $f(q) = f(p)$ da, hau da, $p = f(p)$ da. Hortaz, $p \in \mathbf{PF}_f$ betetzen da. □

9.2.13. Lema. *Izan bitez $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ proiekzio afina, $S = \mathbf{Im} f$ azpiespazio afina eta $W = \ker \vec{f}$ azpiespazio bektoriala. Orduan, $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$.*

Frogapena. Ariketa: froga ezazu aurreko emaitza.
Argibidea: ikusi ezazu $\operatorname{Im} f \subseteq \mathbb{R}^n$ *azpiespazio afina dela, non* $\overrightarrow{\operatorname{Im} f} = \operatorname{Im} \vec{f}$ *den. Erabili honako isomorfismo hau* $\mathbb{R}^n \cong \ker \vec{f} \oplus \operatorname{Im} \vec{f}$ *emaitza ondorioztatzeko.* □

9.2.14. Teorema. *Izan bedi* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *aplikazio afina. Orduan,* f *proiekzioa da, baldin eta soilik baldin existitzen badira* S *azpiespazio afina eta* W *azpiespazio bektoriala,* $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$ *izanik, non* $p \in \mathbb{R}^n$ *guztietarako honako hau betetzen den:*

$$f(p) = S \cap (p + W).$$

Kasu horretan, $S = \mathbf{PF}_f$ *eta* $W = \ker \vec{f}$ *dira.*

Frogapena. Demagun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina, $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina eta $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala ezagunak direla, eta $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

$$f(p) = S \cap (p + W) \tag{9.1}$$

berdintza betetzen dela. Ikus dezagun f proiekzioa dela; alegia, $f \circ f = f$ betetzen dela. Ohartu (9.1). ekuaziotik, $f(p) \in p + W$ lortzen dugula, eta, beraz, $p + W = f(p) + W$ berdintza daukagu. Orduan, $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, $f(f(p)) = (f(p) + W) \cap S = (p + W) \cap S = f(p)$ da.

Bestalde, f proiekzioa emanda, definitu $S = \mathbf{FP}_f = \operatorname{Im} f$ moduan, eta hartu $W = \ker \vec{f} \leqslant \mathbb{R}^n$ non $\mathbb{R}^n = \vec{S} + W$ den. Gainera, $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathbf{FP}}_f \cap \ker \vec{f}$ bada, $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$ eta $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{0}$ bete behar dira aldi berean. Hortaz, $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$. Ikusi nahi dugu, $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, $f(p) \in S$ eta $f(p) \in p + W$ betetzen dela. Garbi dago, $f(p) \in S$ betetzen dela. Orain, $f(p) = f(f(p))$ denez, $f(p) - f(f(p)) = \vec{0}$ da, hau da, $\overrightarrow{f(p)f(f(p))} = \vec{0}$ da. Baliokidea dena, $\vec{f}(\overrightarrow{pf(p)}) = \vec{0}$ da, hots, $\overrightarrow{pf(p)} \in \ker \vec{f} = W$ da. Hortaz, $f(p) \in p + W$ betetzen da. □

9.2.15. Oharra. Aurreko teoremaren arabera, f proiekzioa bada, $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, $f(p) \in S$ eta $\overrightarrow{pf(p)} \in W$ dira. Hori dela eta, f aplikazioari honela esaten zaio: *S azpiespazioaren gaineko proiekzio afina W azpiespazioaren norabidean*.

9.2.16. Definizioa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazioa S azpiespazioaren gaineko proiekzio afina W azpiespazioaren norabidean. Bereziki, $\vec{S}$ eta W azpiespazio bektorialak ortogonalak direnean, f aplikazioa *S-ren gaineko proiekzio ortogonala* dela esango dugu.

9.2.4. Simetriak

9.2.17. Definizioa. Esango dugu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina *simetria* dela, baldin eta $f \circ f = 1_{\mathbb{R}^n}$ bada.

9.2.18. Oharra. Aurreko definiziotik berehala ondorioztatzen da f simetria bada, orduan $f^{-1} = f$ dela. Ondorioz, simetriak transformazio afinak dira.

9.2.19. Lema. *Izan bitez* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *simetria afina,* $W = \ker(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n}) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : \vec{f}(\vec{v}) = -\vec{v}\}$ *azpiespazio bektoriala eta* $S = \mathbf{PF}_f$ *azpiespazio afina. Orduan,* $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$.

Frogapena. Ikusi dezagun $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ emanda, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ dela, $\vec{v}_1 \in \vec{S}$ eta $\vec{v}_2 \in W$ bakarrak izanik. Ohartu, $\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ere $\mathbb{R}^n$-ren endomorfismoa denez,

$$\mathbb{R}^n = \ker(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n}) + \operatorname{Im}(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n})$$

dela eta, beraz, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ guztietarako, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ da, $\vec{v}_1 \in \ker(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n})$ eta $\vec{v}_2 \in \mathrm{Im}(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n})$ direlarik. Orain, ikus dezagun $\overrightarrow{\mathbf{PF}}_f = \mathrm{Im}(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n})$ dela. Demagun $\vec{v}_2 \in \mathrm{Im}(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n})$ dela; orduan, $\vec{v}_2 = \vec{f}(\vec{w}) + \vec{w}$ idatz dezakegu, $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ batentzat, eta

$$\vec{f}(\vec{v}_2) = \vec{f}(\vec{f}(\vec{w})) + \vec{f}(\vec{w}) = \vec{w} + \vec{f}(\vec{w}) = \vec{v}_2$$

beteko da. Ondorioz, $\vec{v}_2 \in \overrightarrow{\mathbf{PF}}_f$ beteko da. Beste partekotasuna $\overrightarrow{\mathbf{PF}}_f \subseteq \mathrm{Im}(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n})$ berehalakoa da.

Azkenik, ikus dezagun $\vec{S} \cap W = \{\vec{0}\}$ dela $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$ ondorioztatzeko. Ohartu, $\vec{v} \in \vec{S}$ izateagatik, $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{v}$ eta $\vec{v} \in W$ izateagatik, $\vec{f}(\vec{v}) = -\vec{v}$ aldi berean bete behar direla. Beraz, $\vec{v} = \vec{0}$ da. □

9.2.20. Teorema. *Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina. Orduan, f simetria da, baldin eta soilik baldin existitzen badira $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina eta $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala non $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$ den, eta g aplikazioa S azpiespazioaren gaineko W azpiespazioaren norabideko proiekzio afina bada, orduan $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako honako berdintza hau betetzen bada:*

$$f(p) = p + 2\overrightarrow{pg(p)} = g(p) + \overrightarrow{pg(p)}. \tag{9.2}$$

Kasu horretan, $S = \mathbf{PF}_f$ eta $W = \ker(\vec{f} + 1_{\mathbb{R}^n})$ dira.

Frogapena. Aurreko 9.2.19. lemari esker, f simetria afina bada, dagoeneko frogatu dugu existitzen direla teoremako baldintzak betetzen dituzten S azpiespazio afina eta W azpiespazio bektoriala. Gainera, geometrikoki, simetria eta proiekzio baten arteko erlazioa zein den frogatuz gero, (9.2). ekuazioko berdintza lortzen da.

Beste inplikazioa frogatuko dugu. Demagun existitzen direla $S \subseteq \mathbb{R}^n$ azpiespazio afina eta $W \leqslant \mathbb{R}^n$ azpiespazio bektoriala, non $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$ den, eta $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako (9.2). ekuazioko berdintza betetzen dela, g aplikazioa S azpiespazioaren gaineko W azpiespazioaren norabideko proiekzio afina izanik. Ikus dezagun, g proiekzioa dela erabiliz (hots, $g \circ g = g$ dela), f simetria afina dela, hau da, $f \circ f = 1_{\mathbb{R}^n}$ dela: $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(p) = f(g(p) + \overrightarrow{pg(p)}) &= g(g(p) + \overrightarrow{pg(p)}) + \overrightarrow{(g(p) + \overrightarrow{pg(p)})(g(g(p) + \overrightarrow{pg(p)}))} \\
&= g(p) + \overrightarrow{g(p)g^2(p)} + \overrightarrow{(g(p) + \overrightarrow{pg(p)})(g^2(p) + \vec{g}(\overrightarrow{pg(p)}))} \\
&= g(p) + \overrightarrow{g(p)g(p)} + \overrightarrow{(g(p) + \overrightarrow{pg(p)})(g(p) + \overrightarrow{g(p)g^2(p)})} \\
&= g(p) + \overrightarrow{\overrightarrow{g(p)g^2(p)} - \overrightarrow{pg(p)}} \\
&= g(p) - \overrightarrow{pg(p)} = p.
\end{aligned}$$

Beraz, f simetria afina da. □

9.2.21. Oharra. Izan bedi f simetria, eta idatzi p' bidez p eta $f(p)$ puntuen erdiko puntua. Aurreko teoremaren arabera, $p \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

$$p' = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{pf(p)} = g(p) \in S \quad \text{eta} \quad \overrightarrow{pf(p)} \in W$$

betetzen da. Hori dela eta, f aplikazioari honela esaten zaio: *S azpiespazioaren bitarteko simetria afina W azpiespazioaren norabidean*.

9.2.22. Definizioa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazioa S azpiespazioaren bitarteko simetria afina W azpiespazioaren norabidean. Bereziki, $\vec{S}$ eta W azpiespazio bektorialak ortogonalak direnean, f aplikazioa *S-ren bitarteko simetria ortogonala* dela esango dugu.

9.2.14. teoremaren ondorio batzuk ikusiko ditugu orain.

9.2.23. Korolarioa. *Izan bitez $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simetria afina W azpiespazioaren norabidean eta $S = \mathbf{PF}_f$. Orduan, $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$ espazioaren β oinarria existitzen da, non $\vec{f}(u+w) = u - w$ betetzen den $u \in \vec{S}$ eta $w \in W$ bektore guztietarako.*

Frogapena. Izan bedi $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s\}$ multzoa $\vec{S}$ azpiespazioaren oinarria, eta $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ multzoa W-ren oinarria. Beraz, $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ multzoa $\mathbb{R}^n = \vec{S} \oplus W$ espazioaren oinarria da.

Oinarri horretan, $\vec{f}(v_i) = v_i$ eta $\vec{f}(w_j) = -w_j$ betetzen dira, indize $i = 1, \dots, s$ eta $j = 1, \dots, m$ guztietarako. □

9.2.24. Korolarioa. *Baldin eta $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simetria ortogonala bada, orduan f isometria afina da.*

Frogapena. Finka ditzagun $\vec{S}$-ren eta W-ren $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s\}$ eta $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_t\}$ oinarriak, hurrenez hurren. Demagun, orokortasunik galdu gabe, aurreko oinarriak ortonormalak direla (ikusi 6.3.2. teorema). Orduan, $\beta = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ oinarri ortonormala da, $\vec{S} \cap W = \{\vec{0}\}$ eta $\vec{u} \in \vec{S}$ eta $\vec{w} \in W$ guztietarako, $\vec{u} \perp \vec{w}$ betetzen direlako. Gainera, $\mathrm{M}_\beta(\vec{f})$ matrize diagonala da, bertan 1ak eta -1ak agertzen direlarik (s aldiz 1 eta t aldiz -1, hain zuzen ere). Hortaz, $\mathrm{M}_\beta(\vec{f})$ matrize ortogonala da, eta 6.5.7. teoremaren arabera, $\vec{f}$ isometria lineala da. Ondorioz, f isometria afina da. □

9.2.5. Biraketak

9.2.25. Definizioa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio afina.

i. Esango dugu *f jatorrian zentratutako biraketa* dela, baldin eta existitzen bada $\theta \in [0, 2\pi)$ non f-ren adierazpen matriziala honako era honetakoa den

$$Y = A_\theta X, \qquad A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ izanik.}$$

Kasu horretan, f aplikazioa *jatorrian zentratutako eta θ angeluko biraketa* dela esango dugu, eta $f = b_\theta$ idatziko dugu.

ii. Esango dugu *f biraketa* dela, baldin eta existitzen badira $p_0 \in \mathbb{R}^2$ eta $\theta \in [0, 2\pi)$ non

$$f = t_{\overrightarrow{op_0}} \circ b_\theta \circ t_{-\overrightarrow{op_0}} \quad \text{den.}$$

Kasu horretan, f aplikazioa p_0 puntuan zentratutako eta θ angeluko biraketa dela esango dugu eta $f = b_{\theta,p_0}$ idatziko dugu.

9.2.26. Oharra. Ohartu, bereziki $\theta = 0$ denean, $b_{\theta,p_0} = 1_{\mathbb{R}^2}$ dela.

9.2.27. Proposizioa. *Honako propietate hauek betetzen dira:*

i. *Biraketak transformazio afinak dira.*

ii. *Zentro bereko bi biraketen konposaketa ere biraketa da. Are gehiago, $b_{\theta_2,p_0} \circ b_{\theta_1,p_0} = b_{(\overline{\theta_1+\theta_2}),p_0}$; non $\overline{\theta_1+\theta_2} \equiv \theta_1 + \theta_2 \mod 2\pi$ den.*

iii. *Biraketen alderantzizkoak biraketak dira. Are gehiago, $(b_{\theta,p_0})^{-1} = b_{2\pi-\theta,p_0}$;*

iv. *$\theta \neq 0$ bada, b_{θ,p_0} biraketak puntu finko bakarra du, zentroa, hain zuzen ere.*

v. $p, q \in \mathbb{R}^n$ *guztietarako,* $d(p,q) = d(b_{\theta,p_0}(p), b_{\theta,p_0}(q))$.

Frogapena. Hasteko, b_{θ,p_0} biraketari elkartutako zati linealaren adierazpen matriziala $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ da, eta $\det A = 1 \neq 0$ denez, b_{θ,p_0} transformazio afina da. Izan bitez, b_{θ_1,p_0} eta b_{θ_2,p_0} zentro bereko biraketak. Deitu p_0 puntuaren osagaien zutabe-matrizeari B. Orduan, $b_{\theta_2,p_0} \circ b_{\theta_1,p_0}$ aplikazioaren zati linealaren adierazpen matriziala

$$\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} X \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{pmatrix} X \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix} X \end{aligned}$$

Definizioz, $b_{\theta_2,p_0} \circ b_{\theta_1,p_0}$ biraketa izateko, $\theta_1 + \theta_2 \in [0, 2\pi)$ bete behar denez, hartu $\alpha \equiv \overline{\theta_1 + \theta_2} \mod 2\pi$ balioa eta biraketa da. Bereziki, $b_{\theta,p_0} \circ b_{2\pi-\theta,p_0} = b_{2\pi,p_0} = b_{0,p_0} = 1_{\mathbb{R}^2}$ betetzen da, eta, era berean, $b_{2\pi-\theta,p_0} \circ b_{\theta,p_0} = b_{0,p_0} = 1_{\mathbb{R}^2}$ da. Hortaz, $b_{\theta,p_0}^{-1} = b_{2\pi-\theta,p_0}$ da.

Orain, ikus dezagun b_{θ,p_0} biraketa baten zati linealak puntu finko bakarra duela, hau da,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} X = X$$

betetzen duen X zutabe-bektore bakarra existitzen dela. Horretarako, Rouché Frobenius-ren teorema arabera,

$$\operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \sin\theta & \cos\theta & 1 \end{pmatrix}\right) = 2$$

denez, sistema bateragarria da, eta 3.2.7. korolarioaren arabera, bateragarri determinatua. Ez da zaila ikustea, b_{θ,p_0} biraketan jatorria puntu finkoa dela, eta, beraz, amaitu dugu. Azkenik, biraketek distantziak gordetzen dituztela ikusi behar da. Gogoratu translazioek distantzia gordetzen dituztela, eta, hortaz, nahikoa da jatorrian zentratutako biraketek distantziak gordetzen dituztela ikustearekin. Har ditzagun $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ eta $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ edozein $\mathbb{R}^2$-ko bektore. Orduan,

$$d(b_\theta(\mathbf{x_1}), b_\theta(\mathbf{x_2})) = \|\overrightarrow{b_\theta(\mathbf{x_1})b_\theta(\mathbf{x_2})}\| = \left\| \begin{pmatrix} (x_1-x_2)\cos\theta - (y_1-y_2)\sin\theta \\ (x_1-x_2)\sin\theta + (y_1-y_2)\cos\theta \end{pmatrix} \right\|$$

daukagu, eta balio hori,

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2\cos^2\theta + (y_1-y_2)^2\sin^2\theta - 2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\theta\sin\theta + (x_1-x_2)^2\sin^2\theta + (y_1-y_2)^2\cos^2\theta + 2(x_1-x_2)(y_1-y_2)\cos\theta\sin\theta}$$

da, hau da,

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + (y_1-y_2)^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = d(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2})$$

betetzen da. Ondorioz, biraketek distantziak gordetzen dituzte. □

9.3 Mugimendu eta antzekotasunak

Aurreko atalean aplikazio afin motak aurkeztu ditugu, eta, horien propietateen artean, distantziak gordetzen dituzten edo ez aztertu dugu. Orain ikusiko dugun bezala, aplikazio afin horiek izen berezi bat dute.

9.3.1. Definizioa. Esango dugu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ aplikazio afina *isometria afina* dela, baldin eta $p,q \in \mathbb{R}^n$ guztietarako $d(p,q) = d(f(p),f(q))$ betetzen bada. Bereziki, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erako isometria afinari *mugimendu* deritzo.

9.3.2. Adibidea. Translazioak, biraketak eta simetria ortogonalak mugimenduak dira.

9.3.3. Proposizioa. *Aplikazio afin bat mugimendua da, baldin eta soilik baldin elkartutako aplikazio lineala isometria lineala bada.*

Frogapena. Emaitza frogatzeko, nahikoa da honako berdintza hauez jabetzea: $p,q \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

$$d(f(p),f(q)) = \|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|\vec{f}(\overrightarrow{pq})\| \quad \text{eta} \quad d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\|.$$

□

9.3.4. Oharra. Aurrera egin aurretik, ikus ditzagun ohar pare bat.

i. Mugimenduak transformazio afinak dira.

ii. Demagun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mugimenduaren adierazpen matriziala $Y = AX + B$ dela. Orduan, 6. gaian ikusi genuenez, $\vec{f}$ isometria lineala denez, A matrizea ortogonala da (A matrizea oinarri kanoniko ortonormalarekiko adierazi baitugu). Are gehiago, A matrizearen balio propio posible bakarrak 1 eta -1 dira.

9.3.5. Definizioa. Esango dugu $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina *antzekotasuna* dela, baldin eta existitzen bada $r > 0$ non $d(f(p),f(q)) = rd(p,q)$ betetzen den $p,q \in \mathbb{R}^n$ guztietarako. Aurreko r zenbaki erreala *antzekotasunaren arrazoia* da.

9.3.6. Adibidea. Mugimendu guztiak antzekotasunak dira ($r = 1$). Horrez gain, λ arrazoiko homotoziak ere antzekotasunak dira ($r = |\lambda|$).

9.3.7. Oharra. **i.** Antzekotasunak transformazio afinak dira.

ii. Antzekotasunen konposaketa ere antzekotasuna da. Bereziki, mugimenduen konposaketa mugimendua da.

9.3.8. Proposizioa. *Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina. Orduan, f antzekotasuna da* **($r \neq 1$ *izanik*),** *baldin eta soilik baldin f homotezia baten eta mugimendu baten arteko konposaketa bada.*

Frogapena. Hasteko, f aplikazio afina r arrazoiko antzekotasuna bada, orduan $g = h_{r^{-1}} \circ f$ konposaketa mugimendua da. Izan ere, $p,q \in \mathbb{R}^n$ guztietarako,

$$d(g(p),g(q)) = d((h_{r^{-1}} \circ f)(p),(h_{r^{-1}} \circ f)(q)) = r^{-1}d(f(p),f(q)) = r^{-1}rd(p,q) = d(p,q)$$

betetzen da. Beraz, $f = h_r \circ g$ homotezi baten eta mugimendu baten arteko konposaketa da. Bestalde, definizioz, homotezia baten eta mugimendu baten arteko konposaketa antzekotasuna izango da. □

9.4 Mugimenduak planoan eta espazioan

Kapitulu honetako azken atalean mugimenduen sailkapena eman nahiko dugu $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazio afin euklidearretan. Horren aurretik, sailkapena egiteko beharko dugun datu bat aplikazio afin baten puntu finkoen multzoa denez, honako propietate hau erabiliko dugu. Demagun $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplikazio afina dela, $Y = AX + B$ adierazpen matriziala duena; orduan,

$$X_0 \in \mathbf{PF}_f \quad \Leftrightarrow \quad AX_0 + B = X_0 \quad \Leftrightarrow \quad (A - I_n)X_0 + B = 0.$$

Beraz, $A - I_n$ matrizearen eta $(A - I_n|B)$ matrize hedatuaren heinek puntu finkoen multzoaren tamainaren inguruko informazioa emango digute. Izan ere, aurreko sistemak soluzioa izango du, baldin eta soilik baldin heinen balioak bat badatoz eta, gainera, hein horien balioa k bada; orduan, puntu finkoen multzoaren dimentsioa $n - k$ da.

Has gaitezen $\mathbb{R}^2$ espazio afineko mugimenduak aztertuz. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio afina; hau da, $\vec{f}$ aplikazio lineala isometria da. Espazio euklidearren gaian ikusi genuenez, $\vec{f}$ isometria lineala bada, orduan $A = M_{\beta_k}(\vec{f})$ matrizea bi eratara deskriba daiteke:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = B(\theta) \quad \text{edo} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = R(\theta),$$

non $\theta \in [0, 2\pi)$ den. Orduan, honako hau betetzen zela ikusi genuen:

$$\vec{f} \text{ isometria lineala} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{f} \begin{cases} \text{identitatea,} \\ \text{biraketa (edo simetria zentrala),} \\ \text{edo zuzen bektorial batekiko erreflexioa.} \end{cases}$$

Orain, $Y = AX + B$ erako adierazpena duen aplikazio afina daukagu. Beraz,

i. $A = B(0) = I_2$ bada, $Y = X + B$ erako adierazpen matriziala lortuko dugu, eta, beraz, f aplikazioa *translazioa* da. Ohartu balio propio bakarra 1 dela (bikoitza); $B = \binom{0}{0}$ bada, f *identitate aplikazioa* da, $\mathbf{PF}_f = \mathbb{R}^2$ izanik, eta; aldiz, $B \neq \binom{0}{0}$ bada, $\mathbf{PF}_f = \varnothing$ da.

ii. $A = B(\theta)$ bada, $\theta \neq 0$ izanik, orduan $\mathbf{PF}_f = \{z\}$ atomoa da (ohartu $\operatorname{rg}(A - I_2) = \operatorname{rg}(A - I_2|B) = 2$ dela). Bi kasu daude: $\theta = \pi$ bada, $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ denez, z *zentroko simetria* da eta balio propio bakarra -1 da (bikoitza). Aldiz, $\theta \neq \pi$ bada, A matrizeak ez du balio propiorik eta z *zentroko biraketa* da.

iii. $A = R(0)$ bada, demagun $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$ dela. Orduan,

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

adierazpen matriziala du f aplikazioak. Orduan, balio propioak 1 eta -1 dira, eta puntu finkoen multzoa $\mathbf{PF}_f = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = \frac{b_2}{2}\}$ da. Hortaz, f aplikazioa $y_2 = \frac{b_2}{2}$ zuzenarekiko *simetria ortogonala* da (ikusi $f \circ f = 1_{\mathbb{R}^2}$ dela).

iv. Demagun $A = R(0)$ eta $B = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$ direla, $b_1 \neq 0$ izanik. Orduan, f aplikazioaren adierazpen matriziala honako era honetan idatz daiteke:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hortaz, *zuzen batekiko simetria ortogonala eta translazio baten arteko konposaketa* da. Kasu horretan, f-ren balio propioak 1 eta -1 dira, eta puntu finkoen multzoa, berriz, multzo hutsa.

Ondorioz, honako emaitza hau lortuko da.

9.4.1. Teorema. *Baldin eta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mugimendua bada, orduan f mota hauetako aplikazio bat da:*

i. *f translazioa da, edo,*

ii. *f biraketa da, edo,*

iii. *f simetria ortogonala da (puntu edota zuzen baten bitartekoa), edo,*

iv. *f zuzen baten bitarteko simetria ortogonal baten eta translazio baten konposaketa da.*

Aurreko metodo bera jarraituko genuke $\mathbb{R}^3$-ko mugimenduak sailkatzeko. Hau da, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mugimendua da, baldin eta soilik baldin $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ isometria lineala bada. Dagoeneko $\mathbb{R}^3$-ko isometrien sailkapena ezaguna denez, teorema hartako frogapeneko kasu bakoitza aztertuz, mugimenduen sailkapena lortuko genuke. Horregatik, datorren teoremaren froga ez jartzea erabaki dugu, 6.6.5. teoremaren frogan guztiz oinarritzen baita.

9.4.2. Teorema. *Baldin eta $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mugimendua bada, orduan f mota hauetako aplikazio bat da:*

i. *f translazioa da, edo,*

ii. *f zuzen baten inguruko biraketa da, edo,*

iii. *f simetria ortogonala da (puntu, zuzen edota plano baten bitartekoa), edo,*

iv. *f zuzen baten inguruko biraketa baten eta translazio baten konposaketa da (mugimendu helikoidala), edo,*

v. *f plano baten bitarteko simetria ortogonal baten eta zuzen baten inguruko biraketa baten konposaketa da, edo,*

vi. *f plano baten bitarteko simetria ortogonal baten eta translazio baten konposaketa da.*

9.5 Ariketak

9.5.1. Ariketa. Izan bitez $p_0 = (-2,-2)$, $p_1 = (0,1)$ eta $p_2 = (-1,0)$ eta $q_0 = (0,0)$, $q_1 = (0,1)$ eta $q_2 = (-1,0)$ planoko puntuak.

i. Aurkitu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio afina, non $f(o) = p_0$, $f(e_1) = p_1$ eta $f(e_2) = p_2$ diren. f transformazio afina al da?

ii. Aurkitu $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio afina, non $g(o) = q_0$, $g(e_1) = q_1$ eta $g(e_2) = q_2$ diren. g transformazio afina al da?

iii. Aurkitu $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio afina, non $h(p_0) = q_0$, $h(p_1) = q_1$ eta $h(p_2) = q_2$ diren. h transformazio afina al da?

iv. Izan bedi $S = p_0 + \langle \vec{v} \rangle$, non $\vec{v} = (1,1)^t$ den. Kalkulatu $h(S)$.

v. Kalkulatu h aplikazioaren puntu finkoen multzoa.

9.5.2. Ariketa. Izan bitez $p_0 = (1,1)$, $p_1 = (2,0)$ eta $p_2 = (1,-1)$ eta $q_0 = (1,2)$, $q_1 = (3,0)$ eta $q_2 = (1,-2)$ planoko puntuak.

i. Frogatu p_0, p_1 eta p_2 puntuak afinki independenteak direla. Gauza bera q_0, q_1 eta q_2 puntuetarako.

ii. Aurkitu (p_0, p_1, p_2) erreferentzia-sistema (q_0, q_1, q_2) erreferentzia-sisteman bihurtzen duen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio afina. f transformazio afina al da?

iii. Kalkulatu f aplikazioaren puntu finkoen multzoa.

iv. Zein motatako aplikazio afina da f?

9.5.3. Ariketa. Izan bitez $p_0 = (-1,2)$, $p_1 = (0,4)$ eta $p_2 = (1,5)$ eta $q_0 = (0,-1)$, $q_1 = (0,0)$ eta $q_2 = (2,-2)$ planoko puntuak.

i. Frogatu p_0, p_1 eta p_2 puntuak afinki independenteak direla. Gauza bera q_0, q_1 eta q_2 puntuetarako.

ii. Aurkitu $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazio afina, non $f(p_0) = q_0$, $f(p_1) = q_1$ eta $f(p_2) = q_2$ diren. f transformazio afina al da? Horrela bada, eman bere alderantzizkoaren adierazpena.

iii. Kalkulatu f aplikazioaren puntu finkoen multzoa.

iv. Izan bedi $S = r_0 + \langle \vec{v} \rangle$, non $r_0 = (-1,0)$ eta $\vec{v} = (2,1)^t$ diren. Kalkulatu $f(S)$.

9.5.4. Ariketa. Izan bitez $y = 0$ ekuazio inplizitua duen $\mathbb{R}^3$-ren S azpiespazio afina eta $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazioak, $f(x,y,z) = \big(x+1, y, 0\big)$ eta $g(x,y,z) = \big(x+2y+2z-1, y, y+z\big)$ izanik.

i. f eta g aplikazio afinak al dira? Eta transformazio afinak? Kalkulatu $f(S)$ eta $g(S)$ azpiespazioak eta haien dimentsioak.

ii. Lortu $g \circ f$ aplikazioaren adierazpena, eta kalkulatu aplikazio horren puntu finkoen multzoa. Zein dimentsiotako azpiespazio afina da?

9.5.5. Ariketa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2z-1, 2y-1, 2x-1)$ aplikazioa eta $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zentroa $p_0 = (1,a,1)$ eta arrazoia $\lambda = \frac{1}{2}$ dituen homotezia.

i. Eman h homoteziaren adierazpena aplikazio afin modura.

ii. f aplikazio afina al da? Eta transformazio afina?

iii. Lortu $f \circ h$ konposaketa, eta zehaztu zein izan behar den a parametroaren balioa aurreko konposaketa horrek puntu finkorik izan dezan. Kasu horretan, zein da puntu finkoen azpiespazioa? Zein dimentsiotakoa da?

9.5.6. Ariketa. Izan bitez S eta T multzoak, hurrenez hurren, $y = x$ eta $x = 0$ ekuazioak dauzkaten $\mathbb{R}^2$-ren azpiespazio afinak. Kalkulatu «T azpiespazioaren gaineko $\mathbb{R}^2$-ren proiekzio afina $\vec{S}$ azpiespazioaren norabidean» aplikazio afinaren adierazpena. Gauza bera «S azpiespazioaren gaineko $\mathbb{R}^2$-ren proiekzio afina $\vec{T}$ azpiespazioaren norabidean» aplikazio afinaren kasurako.

9.5.7. Ariketa. Aurreko ariketako datu berak erabiliz, kalkulatu «T azpiespazioaren bitarteko $\mathbb{R}^2$-ren simetria afina $\overrightarrow{S}$ azpiespazioaren norabidean» eta «S azpiespazioaren bitarteko $\mathbb{R}^2$-ren simetria afina $\overrightarrow{T}$ azpiespazioaren norabidean» aplikazio afinen adierazpena.

9.5.8. Ariketa. $\mathbb{R}^3$-n, izan bedi honako ekuazio inplizitu hau duen T planoa:

$$3x - 2y + z = 11.$$

i. Kalkulatu aurreko planoarekiko perpendikularra den eta $(0, 1, -1)$ puntutik igarotzen den S zuzenaren ekuazioa.

ii. Kalkulatu «T azpiespazioaren bitarteko $\mathbb{R}^3$-ren simetria ortogonala».

iii. Kalkulatu «S azpiespazioaren bitarteko $\mathbb{R}^3$-ren simetria ortogonala».

iv. Frogatu aurreko bi simetrien konposaketa edozein ordenatan eginik ere emaitza bera lortzen dela. Zein da lortutako emaitza hori?

9.5.9. Ariketa. $\mathbb{R}^3$ espazio euklidearrean, izan bitez $2x + y - 2z = 9$ ekuazioa duen P plano afina eta $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ puntua.

i. Zehaztu p_1 puntuaren (x_1, y_1, z_1) koordenatuak, honako hau jakinik: p_1 puntua P planoan dago eta $\overrightarrow{p_0p_1}$ bektorea P-ren norabidearekin ortogonala da (hau da, p_1 puntua P planoaren gaineko p_0 puntuaren proiekzio ortogonala da). Idatzi lortutako emaitza aplikazio afin modura.

ii. Zehaztu p_2 puntuaren (x_2, y_2, z_2) koordenatuak, p_1 puntua p_0 eta p_2 puntuen erdiko puntua izateko (hau da, p_2 puntua p_0 puntuaren simetrikoa izateko P planoarekiko). Idatzi lortutako emaitza aplikazio afin modura.

iii. Zein da $p_0 = (1, 0, 1)$ puntutik P planora dagoen distantzia? Eta S koordenatu-jatorritik igarotzen den eta P planoarekiko perpendikularra den zuzena bada, zein da p_0 puntutik S azpiespaziora dagoen distantzia?

9.5.10. Ariketa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ modu honetan definitutako aplikazioa:

$$f(x, y, z) = \big(\frac{1}{2}(x + y + z + 1), -x + 2y + z + 1, \frac{1}{2}(3x - 3y - z - 3)\big).$$

i. f aplikazio afina al da? Eta transformazio afina?

ii. Kalkulatu f-ren puntu finkoen multzoa.

iii. Kalkulatu $f \circ f$, eta ondorioztatu f proiekzio bat dela. Zein da proiekzioaren norabidea?

9.5.11. Ariketa. Izan bedi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ modu honetan definitutako aplikazioa:

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\big(\sqrt{3} + x + \sqrt{3}\,y, -3 + \sqrt{3}\,x - y\big).$$

i. Frogatu f simetria afina dela.

ii. Kalkulatu f-ren puntu finkoen multzoa eta simetriaren norabidea.

iii. Kalkulatu $x = 0$ ekuazioko azpiespazio afinaren irudia aurreko simetriaren bidez.

9.5.12. Ariketa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ honakoa aplikazio afin hau:

$$f(x) = A\,x, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ izanik.}$$

i. Aurkitu f aplikazioaren puntu finkoek osatutako azpiespazio afina, T izendatuko duguna, eta $W = \{\vec{v} \mid \vec{f}(\vec{v}) = -\vec{v}\}$ azpiespazio bektoriala.

ii. Egiaztatu f aplikazioa T azpiespazioaren bitarteko simetria afina dela, W simetriaren norabidea izanik.

iii. Izan bedi $x + y + t = 1$ eta $z = 1$ ekuazio inplizituak dituen H azpiespazio afina. Kalkulatu T azpiespazioaren bitarteko simetria afina $\overrightarrow{H}$ azpiespazioaren norabidean.

9.5.13. Ariketa. Izan bedi $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ honako hau betetzen duen aplikazio afina:

$$f((0,0,0)) = (2,2,2), \quad f((1,0,0)) = (3,2,2), \quad f((0,1,0)) = (2,3,2), \quad f((0,1,1)) = (0,1,1).$$

i. f transformazio afina al da? Eman f aplikazioaren adierazpena.

ii. Aurkitu f aplikazioaren puntu finkoen multzoa. Zein dimentsiotako azpiespazio afina da?

iii. Izan bedi $x - y = -1$ eta $y - z = -1$ ekuazio inplizituak dituen H azpiespazio afina. Kalkulatu $f(H)$.

iv. Kalkulatu $f \circ f$ eta ondorioztatu f simetria bat dela. Zein da simetriaren norabidea?

9.5.14. Ariketa. Izan bitez $p_0 \in \mathbb{R}^2$ puntua eta honako era honetan definitutako $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazioa:

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f(p) = p + (\overrightarrow{p_0 p} \cdot \overrightarrow{e_2}) \cdot \overrightarrow{e_1},$$

non $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} \subseteq \mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoa eta $\cdot$ biderketa eskalar estandarra diren.

i. Frogatu f aplikazio afina dela. Transformazio afina al da?

ii. Kalkulatu $PF = \{p \in \mathbb{R}^2 : f(p) = p\}$ puntu finkoen multzoa. Zein dimentsiotako azpiespazioa da?

iii. Existitzen al da PF ez den beste azpiespazio afinen bat, T, non $q \in T$ guztietarako $f(q) \in T$ den?

iv. Kalkulatu p_0-tik igarotzen den eta $\overrightarrow{e_2}$ bektorearen norabidea duen zuzen afinaren irudia. Egia al da S_1 eta S_2 bi zuzen perpendikular badira, orduan $f(S_1)$ eta $f(S_2)$ ere perpendikularrak direla?

9.5.15. Ariketa. Izan bitez $p_0 \in \mathbb{R}^2$ puntua eta honako era honetan definitutako $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplikazioa:

$$\forall p \in \mathbb{R}^2 \quad f(p) = p + \lambda(\overrightarrow{p_0p} \cdot \overrightarrow{e_2}) \cdot \overrightarrow{e_2}$$

non $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\} \subseteq \mathbb{R}^2$-ren oinarri kanonikoa eta $\cdot$ biderketa eskalar estandarra diren.

i. Frogatu f aplikazio afina dela. Transformazio afina al da?

ii. Kalkulatu f aplikazioaren puntu finkoen multzoa PF.

iii. Existitzen al da PF ez den beste azpiespazio afinen bat, T, non $q \in T$ guztietarako $f(q) \in T$ den?

iv. λ eskalarraren zein baliotarako izango da $f \circ f = f$? Esan zein motatako aplikazio afina den kasu bakoitzean.

9.5.16. Ariketa. Sailkatu eta deskribatu planoko edota espazioko mugimendu hauek:

i. $f(x,y) = (\frac{-1}{5}(3x+4y)+3, \frac{1}{5}(-4x+3y)+1)$.

ii. $f(x,y,z) = (z,x,y)$.

iii. $f(x,y,z) = (-z-2,-y,-x-2)$.

iv. $f(x,y,z) = (y+2,x,z+1)$.

v. $f(x,y,z) = (\frac{1}{2}(x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}), \frac{1}{2}(\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}), z+1)$.

vi. $f(x,y,z) = (\frac{1}{3}(x-2y+2z)+4, \frac{1}{3}(-2x+y+2z)+4, \frac{1}{3}(2x+2y+z))$.

9.5.17. Ariketa. Izan bedi honako adierazpen matrizial hau duen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio afina:

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

i. Egiaztatu f aplikazio afinak puntu finko bakarra duela, p_0.

ii. Eman p_0 zentroko eta $\lambda = 3$ arrazoiko h homoteziaren adierazpena.

iii. Aurkitu g aplikazio afina, non $f = h \circ g$ den.

iv. Egiaztatu g mugimendua dela. Ondorioztatu f antzekotasuna dela.

v. Aurreko g mugimenduaren balio propioak 1 (bikoitza) eta -1 direla jakinik, esan zein motatako mugimendua den.

10. kapitulua

Konika eta koadriken sarrera

Eskuliburuko azken kapitulu honetan, $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ espazio afin euklidearretako azpimultzo berezi batzuk aztertu nahiko ditugu. Alde batetik, $\mathbb{R}^2$-n bigarren mailako polinomio errealen soluzioen multzoak aztertuko ditugu, *konikak* deritzenak. Beste alde batetik, $\mathbb{R}^3$-ko bigarren mailako polinomioen soluzioen multzoak, *koadrikak* deiturikoak.

Gai honen helburu nagusia $\mathbb{R}^2$-ko konikak eta $\mathbb{R}^3$-ko koadrikak sailkatzea izango da. Horretarako, konika eta koadrika orok *ekuazio laburtu* bat onartzen duela ikusiko dugu, eta, horren arabera, konikak eta koadrikak zehazteko gai izango gara.

Ekuazio laburtua lortzeko egiten dugun eraldaketa bakoitza, ordea, $\mathbb{R}^2$ eta $\mathbb{R}^3$ erreferentzia-sistema afinak aldatzea besterik ez da. Baina, noski, gure espazioek espazio afin eta espazio afin euklidear egitura dute. Horregatik, erreferentzia-sistema aldaketak bi testuingurutan egingo ditugu: *testuinguru afin* eta *testuinguru afin euklidearrean*. Lehenengo kasuan, edozein erreferentzia-sistema afin kontsidera dezakegu; bigarren kasuan, aldiz, eraikiko ditugun erreferentzia-sistema afin guztiak (biderketa eskalar estandarrarekiko) ortonormalak izango dira.

10.1 Sarrera eta definizioa

Has gaitezen konika baten definizioarekin.

10.1.1. Definizioa. Izan bitez $\mathbb{R}^2$ plano afin estandarra $\mathbb{R}$ gorputzaren gainean, eta $\mathcal{R} = (p_0, \beta)$ horren erreferentzia-sistema afina. Demagun $P \in \mathbb{R}^2$ puntu bat dela, eta idatzi (x, y) bikotearen bidez puntu horren koordenatuak $\mathcal{R}$-rekiko. Esango dugu honako puntu multzo hau

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\}$$

non $a_{ij} \in \mathbb{R}$ diren, a_{11}, a_{12}, a_{22} batera zero izan gabe, $\mathbb{R}^2$ *planoko konika afina* dela.

10.1.2. Adibidea. Finka dezagun $\mathbb{R}^2$ espazio afinean, $\mathcal{R}_k$ erreferentzia-sistema afina. Hartu

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0\}$$

konika. Ezagutzen al duzue konika hori?

10.1.3. Oharra. Antzeko moduan, edozein K gorputz hartuta, K^n espazio afin estandarreko konikak definitu daitezke.

Idatz dezagun aurreko definizioko ekuazioa

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

matrizialki. Horretarako, hartu

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{10.1}$$

orduan $\tilde{X}^t A\tilde{X} = 0$ bete dadin. Aurreko A matrize simetrikoa *konikari elkartutako matrizea* da. Are gehiago, edozein 3x3 tamainako matrize simetriko errealek konika bat zehaztuko du $\mathbb{R}^2$ espazio afin estandarrean.

10.1.4. Definizioa. Izan bedi C konika A matrizeaz zehaztua. Esango dugu konika *ez-endekatua* dela, baldin eta $\det A \neq 0$ bada. Bestela, konika *endekatua* dela esango dugu.

Demagun $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformazio afin bat dela; hau da, $\mathcal{R}$ erreferentzia-sistema afinerako, existitzen dira X_0 zutabe-puntua eta $P \in GL_2(\mathbb{R})$ matrize alderanzgarria, non ϕ aplikazioa, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ guztietarako, matrizialki

$$X \mapsto X_0 + PX$$

eran definituta dagoen. Bereziki, hartu $\tilde{P} = \begin{pmatrix} P & X_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ eta idatzi, $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformazio afinaren adierazpen matriziala honako era honetan:

$$\tilde{X} \mapsto \tilde{X}' = \tilde{P}\tilde{X} \quad \text{non} \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{den.} \tag{10.2}$$

10.1.5. Lema. *Izan bitez C konika $X^tAX = 0$ bidez emana, $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformazio afina* (10.2)*. ekuazioaren bidez definitua, eta idatzi $X' = \Phi(X)$. Orduan, $\Phi(C)$ berriro ere konika bat da $(X')^t(\tilde{P}^{-1})^tA\tilde{P}^{-1}X' = 0$ ekuazioaz zehaztua. Bereziki, C ez-endekatua bada, $\Phi(C)$ ere ez-endekatua da.*

Frogapena. Hasteko, $X' = \tilde{P}X$ denez, badakigu $X = \tilde{P}^{-1}X'$ dela. Orduan, C konikaren ekuazioan X hori ordezkatuz,

$$\Phi(C) : (\tilde{P}^{-1}X')^tA(\tilde{P}^{-1}X') = (X')^t(\tilde{P}^{-1})^tA\tilde{P}^{-1}X' = 0$$

lortuko da, nahi bezala. □

10.1.6. Definizioa. Esango dugu bi konika *baliokideak* direla, baldin eta existitzen bada transformazio afin bat zeinak konika bat bestera pasatzen duen.

Horrela, bada, gai honetan koniken baliokidetasun klase guztiak ezagutu nahiko ditugu, horiek $\mathbb{R}^2$ espazio afin estandarrean guztiz sailkatuta egon daitezen.

10.1.7. Oharra. Atal honen hasieratik, $\mathbb{R}^2$ espazio afin euklidearrean lan egin dezakegu, eta, kasu horretan, naturala da aurrez aukeratutako erreferentzia-sistema afin euklidearra ortonormala izatea. Bereziki, bi konika baliokideak direla esango dugu, baldin eta $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ isometria afina existitzen bada, konika bat bestera eramaten duena.

10.1.8. Definizioa. Izan bitez $\mathbb{R}^3$ plano afin estandarra $\mathbb{R}$ gorputzaren gainean, eta $\mathcal{R} = (p_0, \beta)$ horren erreferentzia-sistema afina. Demagun $P \in \mathbb{R}^3$ puntu bat dela, eta idatzi (x, y, z) hirukotearen bidez puntu horren koordenatuak $\mathcal{R}$-rekiko. Esango dugu honako puntu multzo hau

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a_{11}x^3 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0\}$$

non $a_{ij} \in \mathbb{R}$ diren, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}$ batera zero izan gabe, $\mathbb{R}^3$*-ko koadrika afina* dela.

Konikekin gertatzen den moduan, koadrika hauek ere matrizialki adieraz daitezke; (10.1). ekuazioan bezala,

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad A = (a_{ij}) \quad \text{eraikiz;} \; a_{ij} = a_{ji}, \; \forall i > j, \quad \text{izanik,}$$

orduan, $C : \tilde{X}^t A X = 0$ da. Esango dugu A matrizea C koadrikari elkartuta dagoela eta C *ez-endekatua* dela, baldin eta $\det A \neq 0$ bada. Bestela, C *endekatua* dela esango dugu.

Gainera, 10.1.5. lema koadriken kasurako ere orokortu daiteke. Beraz, esango dugu bi koadrika *baliokideak* direla, baldin eta existitzen bada $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ transformazio afina zeinak lehenengo koadrika bigarrenera eramaten duen. Horrela bada, koadriken sailkapena aztertu daiteke $\mathbb{R}^3$ espazio afin estandarrean. Are gehiago, hasieratik $\mathbb{R}^3$ espazio afin euklidearra eta horren erreferentzia-sistema ortonormal bat hartuz gero, koadriken sailkapen *metrikoa* aztertu daiteke. Kasu horretan, bi koadrika baliokideak izango dira, baldin eta isometria afin bat existitzen bada, bat bestera daramana.

10.1.9. Oharra. Orokorrago, bigarren mailako ekuazio bat betetzen duten puntuen multzoak azter daitezke $\mathbb{R}^n$ espazio afin(euklidear)ean.

10.1.10. Oharra. Zer da, bereziki, transformazio afin batek edo isometria afin batek egiten dutena? Lehenengo kasuan, erreferentzia-sistema afin bat beste batera eramango du, eta bigarrenean, berriz, erreferentzia-sistema afin ortonormal bat beste batera.

Gai honen helburua izango da konika eta koadriken sailkapen afina eta metrikoa ematea, sailkapen horretan agertzen diren ekuazio laburtuak lortzeko metodoa azalduz.

10.2 Ekuazio laburtua lortzeko metodoa

Izan bedi $\mathcal{R} = (p_0, \beta)$ erreferentzia-sistema afina $\mathbb{R}^n$ espazio afin estandarrean, eta idatzi puntu orokor baten koordenatuak $\mathcal{R}$-rekiko $(x_1, \ldots, x_n)$ bidez. Izan bedi C honako bigarren mailako polinomio honen

$$a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + a_{nn}$$

soluzioen (edo erroen) multzoa. Deitu C multzoa deskribatzen duen polinomioaren zati koadratikoari

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n.$$

Hemendik aurrera, C multzoa deskribatzeko ekuazio laburtua lortzeko metodoa azalduko da.

10.2.1. Zati koadratikoa

Atal honen helburua izango da aurreko zati koadratikoa

$$Q(x'_1,\dots,x'_n) = \lambda_1(x'_1)^2 + \cdots + \lambda_n(x'_n)^2$$

itxuran transformatzea. Testuinguru afinean, forma bilineal eta koadratikoen teoria erabiliz egingo dugu. Testuinguru metrikoan, berriz, endomorfismo autoadjuntuen teoria erabiliz.

Defini dezagun $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma koadratikoa non

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto Q(x_1,\dots,x_n)$$

den, eta har dezagun horren jatorrizko forma bilineal simetrikoa $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ non,

$$u \in \mathbb{R}^n \quad \text{guztietarako,} \quad f(u,u) = Q(u)$$

betetzen duen. Har dezagun f-ri elkartutako matrizea β oinarriarekiko $A = (a_{ij})$, non

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u_1 \dots u_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

den. Gure helburua A matrizea diagonalizatzea izango da.

a) Testuinguru afinean

10.2.1. Oharra. Gogoratu B matrizea f-ri elkartuta badago, orduan A eta B kongruenteak direla, hau da, existitzen dela $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ non

$$B = P^t A P$$

den. Baliokidea dena, existitzen da $\mathbb{R}^n$ espazio bektorialaren β' oinarria, non $M_{\beta'}(f) = B$ den. Gainera, aurreko P matrizea β' oinarriko bektoreen koordenatuak β-rekiko zutabeka jarriz lortuko da.

Orain, f simetrikoa denez, hau da, A simetrikoa denez, existitzen da $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ matrizea non $M_\beta(f) = PDP^t$ den, eta D, P matrizeak kalkulatzea izango da gure helburua. Lehenengoa, nahi dugun itxurako forma koadratikoa lortzeko erabiltzen da, eta bigarrenak, erreferentzia-sistema afin aldaketaren matrizea emango digu.

10.2.2. Adibidea. Izan bedi $\mathbb{R}^3$ espazio afinean bigarren mailako polinomio batek definituriko C multzoa, non $\mathcal{R}_k$ erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko bere zati koadratikoa

$$Q(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$$

den. Orain, jarri

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

eta $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, non $(u,v) \mapsto u^t A v$ den. Orduan, egin lerro eta zutabekako eraldaketak A matrizeari, diagonala izan dadin (hau da, aplikatu Gaussen metodoa zutabeka eta lerroka).

10.2.3. Oharra. Gogoratu A matrizeari egindako zutabekako eraldaketa berberak egingo ditugula lerroka, baina zutabekakoak soilik aplikatuko dizkiogula identitatetik abiatzen den matrizeari.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{z_2\mapsto z_2-z_1 \\ l_2\mapsto l_2-l_1 \\ l_3\mapsto l_3+l_1}]{z_3\mapsto z_3+z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & -2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[l_3+3l_3+2l_2]{z_3\mapsto 3z_3+2z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Hortaz,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

izanik, $\mathbb{R}^3$ espazio afin estandarraren erreferentzia-sistema afin berria $\mathcal{R} = ((0,0,0),\beta)$ da, non $\beta = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ den. Horrela, $\mathbb{R}^3$ espazio afin estandarreko edozein punturen koordenatuak $\mathcal{R}$-rekiko (x',y',z') koordenatuen bidez adierazten baditugu, C koadrikaren forma koadratikoa:

$$Q(x',y',z') = (x',y',z')D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 2(x')^2 + 3(y')^2 + 15(z')^2$$

izango da. Ohartu honako erreferentzia-sistema aldaketa hau egin dugula:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

b) Testuinguru (afin) metrikoan

Gai honen sarreran aipatu bezala, testiunguru metrikoan finkatuko dugun $\mathbb{R}^n$ espazio afin estandar euklidearraren $\mathcal{R}$ erreferentzia-sistema afina ortonormala izango da, eta, beraz, A matrizeari kongruentea den $D = P^tAP$ matrize diagonala lortzeko erabiliko dugun P matrizea ortogonala izan beharko da.

Endomorfismo autoadjuntuen teoriatik, badakigu existitzen dela $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ matrize ortogonala non $D = P^{-1}AP$ den. Gainera, P ortogonala denez, $P^t = P^{-1}$ berdintza betetzen da, eta, beraz, A matrizearen antzekoa den matrize diagonala lortuko dugu.

10.2.4. Adibidea. Izan bedi $\mathbb{R}^3$ espazio afinean C koadrika, non $\mathcal{R}_k$ erreferentzia-sistema afin kanonikoarekiko bere zati koadratikoa

$$Q(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz$$

den. Orduan, jarri

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

eta $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, non $(u,v) \mapsto u^tAv$ den. Defini dezagun $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aplikazio afina, non $M_{\beta_k}(g) = A$ den. Orduan, A simetrikoa denez eta β_k ortonormala, g endomorfismo autoadjuntua da, eta, beraz,

diagonalgarria. Ez da zaila ikusten $\chi_g(x) = \chi_A(x) = (x-1)^2(x-10)$ dela, eta, beraz, existitzen da $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ non

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$$

den. Badakigu P matrizea lortzeko $\lambda_1 = 1$ eta $\lambda_2 = 10$ balio propioen azpiespazio propioen oinarri bana lortu behar dugula, eta, noski, P ortogonala izan dadin, azpiespazio propio bakoitzeko oinarriak ortonormalak izan beharko direla.

Has gaitezen $V(10)$ azpiespazio propioaren oinarri bat finkatuz. Ohartu $V(10) = \langle (1,2,-2) \rangle$ dela, eta, hortaz, hartu

$$v_3 = \frac{(1,2,-2)}{\|(1,2,-2)\|} = (1/3, 2/3, -2/3).$$

Bestalde, $V(1) = \langle (-2,1,0), (2,0,1) \rangle$ dela kalkula dezakegu, eta, Grand-Schmidt-ren metodoa erabiliz, lortu:

$$\begin{aligned} w_1 &= (-2,1,0), \\ w_2 &= (2,0,1) - \frac{(2,0,1)\cdot(-2,1,0)}{(-2,1,0)\cdot(-2,1,0)}(-2,1,0) = (2/5, 4/5, 1). \end{aligned}$$

Orduan, hartu

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{w_1}{\|w_1\|} = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0) \\ v_2 &= \frac{w_2}{\|w_2\|} = (3/2\sqrt{5}, 4/3\sqrt{5}, 5/3\sqrt{5}). \end{aligned}$$

Horrela, $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ oinarria ortonormala da, eta

$$M_\beta(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = D,$$

$P = M^{\beta}_{\beta_k}$ izanik.

10.2.2. Zati lineala

Aurreko pausoa egin ondoren, hasierako C multzoa deskribatzen duen ekuazioak honako itxura hau du:

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 + b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n + d = 0.$$

Atal honen helburua zati koadratikoa duten x_i aldagaien zati lineala «ezabatzea/desagertaraztea» izango da. Demagun $\lambda_i \neq 0$ dela $i \in \{1, \ldots, n\}$ batentzat, $b_i \neq 0$ izanik. Orduan, idatzi

$$\lambda_i x_i^2 + b_i x_i = \lambda_i (x_i^2 + \frac{b_i}{\lambda_i} x_i) = \lambda_i \left[\left(x_i + \frac{b_i}{2\lambda_i} \right)^2 - \frac{b_i^2}{4\lambda_i} \right].$$

Orduan, honako aldagai-aldaketa hau egin dezakegu:

$$\begin{cases} x_i' = x_i, & \lambda_i = 0 \text{ bada} \\ x_i' = x_i + \frac{b_i}{2\lambda_i}, & \lambda_i \neq 0 \text{ bada.} \end{cases}$$

Bereziki, honako erreferentzia-sistema afin honen aldaketa egiten ari gara

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \text{ edo } -\frac{b_1}{2\lambda_1} \\ 0 \text{ edo } -\frac{b_2}{2\lambda_2} \\ \vdots \\ 0 \text{ edo } -\frac{b_n}{2\lambda_n} \end{pmatrix} + I_n \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

eta, beraz, ez dugu $\mathcal{R}$ erreferentzia-sistema afineko oinarria aldatu; jatorria soilik. Horregatik, pauso hori testuinguru afin nahiz euklidearrean burutu dezakegu.

10.2.5. Adibidea. Finkatu $\mathcal{R}_k$ erreferentzia-sistema afina $\mathbb{R}^4$ espazio afinean. Izan bedi $C \subset \mathbb{R}^4$ espazio afinean honako bigarren mailako ekuazio honek definitzen duen azpimultzoa:

$$2x^2 + y^2 + 3x + 4y + z + 2t = 0.$$

Hasteko, osa ditzagun karratuak:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x = 2(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{8} \\ y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4 \end{cases}$$

eta, beraz, honako aldagai-aldaketa hau egingo dugu:

$$\begin{cases} x' = x + 3/4 \\ y' = y + 2 \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + I_4 \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}.$$

Ondorioz, $\mathbb{R}^4$ espazio afinaren $\mathcal{R} = ((-3/4, -2, 0, 0), \beta_k)$ erreferentzia-sistema afinarekiko C multzoaren ekuazioa

$$2(x')^2 + (y')^2 + z' + 2t' - 41/8 = 0$$

da.

Demagun, orain, $\lambda_i \neq 0$ duten aldagaiak berrordenatu ditugula eta, orduan, ekuazioa honako itxura honetakoa dela:

$$\lambda_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda_r (x'_r)^2 + b_{r+1} x'_{r+1} + \cdots + b_n x'_n + d = 0.$$

Zati lineala sinplifikatzeko, bi testuingurutan egingo dugu lan.

a) Testuinguru afinean.

Egin honako aldagai-aldaketa hau:

$$\begin{cases} x''_1 = x'_1 \\ \vdots \\ x''_r = x'_r \\ x''_{r+1} = b_{r+1} x'_{r+1} + \cdots + b_n x'_n \\ x''_{r+2} = x'_{r+2} \\ \vdots \\ x''_n = x'_n \end{cases}$$

Ohartu, kasu horretan, aldagai-aldaketa matrizialki idazten dugunean, oinarri-aldaketa ematen digun matrizea, ez duela zertan ortogonola izan (eta, horregatik, metodo hori ezin da testuinguru metrikoan erabili):

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{b_{r+1}} & \dots & \frac{-b_n}{b_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix}.$$

Hortik,

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \cdots + \lambda_n(x_r'')^2 + x_{r+1}'' + d = 0$$

itxurako ekuazioa lortuko dugu.

b) Testuinguru (afin) euklidearrean.

Kasu honetan, egingo dugun aldagai-aldaketa aurrekoaren oso antzekoa da, baina bermatu behar dugun gauza bakarra da, lortzen dugun oinarri-aldaketa matrizea P ortogonala izatea. Beraz, honako hau egingo dugu:

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' \\ \vdots \\ x_r'' = x_r' \\ x_{r+1}'' = \alpha(b_{r+1}x_{r+1}' + \cdots + b_n x_n') \\ x_{r+2}'' = \gamma_{r+2}(x_1', \dots, x_r') \\ \vdots \\ x_n'' = \gamma_n(x_1', \dots, x_r') \end{cases}$$

non $\alpha \in \mathbb{R}$ eta γ_i horiek $x_1', \dots, x_r'$ aldagaien konbinazio linealak diren. Balio eta funtzio horien aukeraketa kasu bakoitzaren araberakoa izango da, P ortogonala izatea bermatuko dutelarik (adibideetan ikusiko dugu).

10.2.6. Adibidea. Har dezagun aurreko adibideko multzoa, non $\mathcal{R} = ((-3/4, -2, 0, 0), \beta_k)$ erreferentzia-sistema afinarekiko C multzoaren ekuazioa

$$2(x')^2 + (y')^2 + z' + 2t' - 41/8 = 0$$

den. Orain, zati lineala sinplifikatu dugu, bi testuingurutan:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' + 2t' \\ t'' = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x'' \\ y' = y'' \\ z' = z'' - 2t'' \\ t' = t'' \end{cases}$$

eta hortik, honako oinarri-aldaketa matrizea hau lortuko dugu

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

zeina ez den ortogonala; ekuazio laburtua $2(x'')^2 + (y'')^2 + z'' - \frac{41}{8} = 0$ da, paraboloide eliptiko bat.

Testuinguru euklidearrean: egin dezagun honako aldagai-aldaketa hau:

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' \\ z'' = \alpha(z' + 2t') \\ t'' = ax' + by' + dz' + et' \end{cases} \quad \text{non} \quad \alpha, a, b, d, e \in \mathbb{R} \quad \text{diren.}$$

Aukera ditzagun balio erreal horiek P oinarri-aldaketa matrizea ortogonala izan dadin, hau da, $P^t = P^{-1}$. Ohartu,

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ t'' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

berdintzan,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 2\alpha \\ a & b & d & e \end{pmatrix} = P^t$$

daukagula, eta, P-ko zutabe bektoreek oinarri ortonormala osatu behar dutenez, honako ekuazio hauek ditugu:

$$\begin{cases} z_3 \cdot z_3 = 1 \leftrightarrow \alpha^2 + 4\alpha^2 = 0 \leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{5}/5 \\ z_4 \cdot z_4 = 1 \leftrightarrow a^2 + b^2 + d^2 + e^2 = 1 \leftrightarrow (-2e)^2 + e^2 = 1 \\ z_1 \cdot z_4 = 0 \leftrightarrow a = 0 \\ x_2 \cdot z_4 = 0 \leftrightarrow b = 0 \\ z_3 \cdot z_4 = 0 \leftrightarrow \alpha d + 2\alpha e = 0 \underset{\alpha \neq 0}{\leftrightarrow} d = -2e \end{cases}$$

Aukera bat baino gehiago daude, eta $\alpha = 1/\sqrt{5}$ hartuz,

$$a = 0 = b, \quad d = 2/\sqrt{5}, \quad e = -1/\sqrt{5}$$

lortuko ditugu. Beraz, C-ren ekuazio berria

$$2(x'')^2 + (y'')^2 + \sqrt{5}z'' - \frac{41}{8} = 0$$

da,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = P^t$$

izanik.

10.3 Ekuazio laburtua eta sailkapena

Laburbilduz, C multzoa zehazteko $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + b_{r+1} x_{r+1} + d = 0$ itxurako ekuazioa lortu dugu, non

(1) $b_{r+1} = 0$ bada, $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + d = 0$ ekuazioa daukagun, eta

(1.1) $d = 0$ bada, $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = 0$ lortuko dugun.

(1.2) $d \neq 0$ bada, berriz, $\lambda'_1 x_1^2 + \cdots + \lambda'_r x_r^2 = 1$ dugu (ekuazioa $-d$ zenbakiaz zatituz).

(2) $b_{r+1} \neq 0$ bada, $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + b_{r+1} x_{r+1} + d = 0$ ekuazioa b_{r+1} zenbakiaz zatitu dezakegu, eta

$$\lambda'_1 x_1^2 + \cdots + \lambda'_r x_r^2 + x_{r+1} + d' = 0$$

ekuazioa lortu. Orduan, honako aldagai-aldaketa hau eginez:

$$x'_i = x_i, \quad i \neq r+1 \text{ bada eta} \quad x'_{r+1} = -(x_{r+1} + d'),$$

honako $\lambda'_1 (x'_1)^2 + \cdots + \lambda'_r (x'_r)^2 = x'_{r+1}$ ekuazio hau lortuko da.

10.3.1. Oharra. Ekuazioei egindako azken aldaketetan, erreferentzia-sistema afin ortonormal batetik abiatuz gero, beste erreferentzia-sistema afin ortonormal bat lortuko da.

Azkenik, honako emaitza hauek ditugu:

10.3.2. Teorema. *Izan bedi C multzoa $\mathbb{R}^n$ espazio afin euklidearrean bigarren mailako ekuazio batek zehaztutako azpimultzoa. Orduan, C-ren ekuazio laburtuak honako itxura hau izango du:*

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ x_{r+1} \end{cases} \qquad \textit{non} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R} \quad \textit{diren.}$$

10.3.3. Teorema. *Izan bedi C bigarren mailako ekuazio baten bidez zehaztutako multzoa $\mathbb{R}^n$ espazio afinean. Orduan, C multzoaren ekuazio laburtua, ondoko erakoa da:*

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ x_{r+1} \end{cases} \qquad \textit{non} \quad \lambda_i = \pm 1 \quad \textit{diren, } i \in \{1, \ldots, r\} \textit{ guztietarako.}$$

Emaitza horiek erabiliz, $\mathbb{R}^2$ espazio afin euklidearreko koniken sailkapena eman dezakegu:

10.3.4. Korolarioa. *Izan bedi $\mathbb{R}^2$ espazio afin euklidearrean C konika. Orduan,*

1. *Konika endekatua bada, orduan hori puntu bat, zuzen bat edo bi zuzenen multzoa da.*
2. *Konika ez-endekatua bada, orduan elipse (zirkunferentzia barne), hiperbola edo parabola bat da.*

Frogapena. Erabili dezagun 10.3.2. teorema, emandako konikaren ekuazio laburtua

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ x_3 \end{cases}$$

dela ondorioztatzeko, aurrez finkaturiko $\mathcal{R}$ erreferentzia-sistema afin ortonormal batekiko. Orduan,

(1) $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ badira, orduan $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ da. Demagun $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0$ dela. Orduan,

(1.i) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ badira, $x_1 = x_2 = 0$ puntu bat da.

(1.ii) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ badira, orduan $(\sqrt{\lambda_1}x_1 + \sqrt{-\lambda_2}x_2)(\sqrt{\lambda_1}x_1 - \sqrt{-\lambda_2}x_2) = 0$ puntu batean ebakitzen diren bi zuzen dira.

Demagun, orain, $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 1$ dela; orduan

(1.iii) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ badira, idatzi $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ elipsea da (zirkunferentzia $\lambda_1 = \lambda_2$ bada).

(1.iv) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ badira, orduan $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ hiperbola da.

(2) Demagun $\lambda_1 \neq 0$ eta $\lambda_2 = 0$ direla. Orduan, $\lambda_1 x_1^2 = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ x_2 \end{cases}$ da. Orduan,

(2.i) $\lambda_1 x_1^2 = 0$ bada, zuzen bat da.

(2.ii) $\lambda_1 x_1^2 = 1$ bada, bi zuzen dira.

(2.iii) $\lambda_1 x_1^2 = x_2$ bada, parabola bat da.

□

10.4 Ariketak

10.4.1. Ariketa. Sailkatu ondoko konikak testuinguru afin eta euklidearrean:

i. $x^2 + 2y^2 = \pm 1$,

ii. $x^2 + y^2 + 4xy = \pm 1$,

iii. $x^2 + 2y^2 + 4x = \pm 1$,

iv. $x^2 + 2y^2 + 4x + y = \pm 1$.

10.4.2. Ariketa. Ikus dezagun $\mathbb{R}^3$ espazio afin *euklidear* gisa. Ondoren agertzen diren $\mathbb{R}^3$-ren koadriketarako (erreferentzia-sistema kanonikoarekiko adierazita daude), lortu ekuazio laburtua eta esan zein koadrika mota den. Horrez gain, eman koordenatu-aldaketaren formulak eta erreferentzia-sistema *ortonormal* berria.

i. $8x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy + 4xz - 8yz - 2x - 20y + 10z + 13 = 0$.

ii. $4x^2 + 9y^2 + 4yz + 6z^2 + 8x + 40y + 20z + 34 = 0$.

iii. $4xy + z^2 - 1 = 0$.

iv. $4xy - z^2 - 1 = 0$.

v. $2x^2 + 4xy - 4xz + y^2 - 6yz + z^2 - 2y - 2z = 0$.

vi. $x^2 + x + 4y + 3z - 1 = 0$.

vii. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2z^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 8z - 8 = 0$.

viii. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2x + y + z = 0$.

ix. $18x^2 - 50y^2 + 32z^2 - 48xz + 20x + 5y + 15z = 0$.

10.4.3. Ariketa. Aurreko ariketa errepikatu $\mathbb{R}^3$ espazio afin gisa hartuz. Hau da, $\mathbb{R}^3$-ren koadrika horietarako (erreferentzia-sistema kanonikoarekiko adierazita daude), lortu ekuazio laburtua eta eman koordenatu-aldaketaren formulak eta erreferentzia-sistema berria *testuinguru afinetik* begiratuta.

10.4.4. Ariketa. Esan, $\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren balioaren arabera, zein motatako koadrika den (testuinguru afinean) ondoko bakoitza:

i. $2x^2 + (\alpha^2 - 1) + y?2 + z^2 + 2x + 5y - 2z + 1 = 0$,

ii. $x^2 + \alpha y^2 + x + 2y + (\alpha - 1)z + 1 = 0$,

iii. $\alpha x^2 + (\alpha^2 - \alpha)y^2 + \alpha^3 z^2 + x + 4y - 1 = 0$.

Eranskina: oinarrizko sinbolo matematikoak

Esaldi matematikoak eraikitzeko, honako ikurrak eta adierazpenak erabiliko ditugu:

1. Ondoko taulan agertzen diren ikurrak eskuliburuan zehar behin eta berriz ager daitezke:

Oinarrizko sinbolo batzuk	
Matematikoki	Esanahia
$\forall$	guztietarako edo edozein
$\exists$	existitzen da
$:$ edo $\mid$	non
$\wedge$	eta
$\vee$	edo
$\neg$	esaldi baten ukapena
$\neq$	desberdin
$\exists$	existitzen da
$\exists!$	existitzen da bakar bat
$\nexists$	ez da existitzen

   Har ditzagun esaldi pare bat eta matematikoki idatzi:

   Edozein zenbaki natural emanda, existitzen da (hertsiki) handiagoa den beste zenbaki arrunt bat.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \mid \quad m > n$$

   Ez da existitzen zenbaki osorik zeina aldi berean bikoitia eta bakoitia den.

$$\nexists x \in \mathbb{Z} \quad \mid x = 2k \wedge x = 2k+1 \text{ den } k \in \mathbb{Z} \text{ batentzat}$$

   Edozein zenbaki erreal emanda beste zenbaki erreal bakar bat existitzen da non horien biderketa bat zenbaki erreala den.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \exists! y \in \mathbb{R} \mid xy = 1 = yx$$

2. Multzo bateko elementuak eta azpimultzoak: A multzo bat emanda, x elementu bat A multzoan dagoela adierazteko, $x \in A$ idatziko dugu eta elementu hori A multzoan ez dagoela esateko, berriz, $x \notin A$. Bestalde, existitzen bada B beste multzo bat non $x \in B$ guztietarako, $x \in A$ dena (hau da, B-ko elementu guztiak A-n badaude), orduan $B \subseteq A$ idatziko dugu. Aldiz, existitzen bada, $b \in B$ non $b \notin A$ den, orduan $B \not\subseteq A$ idatziko dugu.

3. Hipotesia batek propietate bat inplikatzea edo antzeko esaldiak osatzeko, honako ikurrak erabiliko ditugu:

   - A betetzen bada, orduan B betetzen da: $A \Rightarrow B$;
   - A betetzeeak ez du inplikatzen B betetzea: $A \nRightarrow B$;
   - A betetzen bada, orduan B betetzen da eta alderantziz, B betetzen bada A ere bai, edo A betetzen da baldin eta soilik baldin B betetzen bada: $A \Leftrightarrow B$.

   Amaitzeko, adibide batzuk ikusiko ditugu:

   - Euria egiten badu (A), zerua grisa dago (B) ($A \Rightarrow B$).
   - Zerua grisa egoteak (A) ez du euria ari duela inplikatzen (B) ($A \nRightarrow B$).
   - Zenbaki oso bat bikoitia da (A) baldin eta soilik baldin bi zenbakiaz zatitu badaiteke (B) ($A \Leftrightarrow B$).

Kontzeptuen aurkibidea

adjuntu, 90
afinki independente, 167
antzekotasuna, 97
aplikazio, 3
    afin, 187
    identitate, 50
    lineal, 49
    nulu, 50
aplikazio afin
    antzekotasun, 198
    dilatazio, 192
    homotezia, 192
    proiekzio afin, 193
    proiekzio ortogonal, 194
    simetria afin, 194
    simetria ortogonal, 195
    transformazio, 190
    translazio, 191
    biraketa, 196
automorfismo lineal, 62
azpiespazio, 24
    ortogonal, 118
    osagarri, 29
    sortutako, 31
azpiespazio afin, 158
    ebakitzaile, 161
    gurutzatu, 161
    paralelo, 161
    batura, 165
    multzoak sortutako, 164
    perpendikular, 176
azpimatrize, 89

balio propio, 98
baliokidetasun
    konika, 206
baliokidetasun-erlazio, 3
batura
    azpiespazioen, 27
    zuzena, 29
bektore, 22
    isotropo, 118
    ortogonal, 118
    propio, 98
    puntuak loturiko, 155
    translazio, 191
bektore-espazio, 21
    finituki sortu, 32
biderketa
    eskalar estandarra, 113
    kartesiar, 2
bildura, 2

Cramerren erregela, 92

determinante, 86
diferentzia, 2
dimentsio, 39
    azpiespazio afin baten, 159
distantzia
    euklidear, 175
    multzoen artean, 179

ebakidura, 2
ekuazio
    bektorial, 168
    inplizitu, 169
    parametriko, 169
elkartutako matrize
    aplikazio lineal bati, 56
    forma bilineal bati, 114
endomorfismo lineal, 62
erditalde, 7
eremu, 3
erreferentzia sistema afina, 166
errenkada, 12
eskalar, 22

espazio afin, 156
  euklidear, 176

forma bilineal, 113
  endekatu, 119
  hertsiki positiboki definitu, 123
  positiboki definitu, 123
  simetriko, 117
forma koadratiko, 124
funtzio, 3
  baten aurreirudi, 3
  baten irudi, 3
  baten murrizketa, 5
  bijektibo, 4
  injektibo, 4
  supraiektibo, 4

Grassmann-en formula
  azpiespazio afin, 165
  azpiespazio bektorial, 41

heina
  aplikazio linealaren, 70
  errenkaden, 68
  forma bilinealaren, 122
  zutabeen, 68
  matrizearen, 69
hiperplano, 46
homotezia, 192

isometria
  afin, 198
  lineal, 145
isomorfismo lineal, 59

karakteristika, 9
koadrika afin, 207
  endekatu, 207
koeremu, 3
konbinazio lineal, 30
konika afin, 205
  endekatua, 206
konposaketa
  funtzioen, 4
koordenatu
  oinarriarekiko, 36
  erreferentzia sistemarekiko, 167

linealki
  dependente, 33
  independente, 33

matrize, 11
  adjuntu, 90
  adjuntu irauli, 90
  alderantzizko, 15
  alderanzgarri, 15
  azpitriangeluar, 12
  baliokide, 67
  diagonal, 12
  goi-triangeluar, 12
  hedatu, 77
  irauli, 14
  karratu, 12
  kongruente, 116
  oinarri aldaketaren, 42
  simetriko, 117
monoide, 7

norabidea, 159
nukleo, 51

oinarri, 35
  Hamel-en, 35
  kanoniko, 35
  ortogonal, 120
  ortonormal, 120
oinarrizko aldaketa, 73

parteen multzo, 2
permutazio, 81
Polarizazio identitatea, 127
polinomio karakteristiko
  endomorfismo baten, 101
  matrize baten, 101
proiekzio
  afin, 193
  azpiespazio baten gaineko, 194
  ortogonal, 194
puntu finko, 191

signatura
  forma bilineal baten, 123
  forma koadratiko baten, 126
  permutazio baten, 85
simetria
  afin, 194
  azpiespazio baten bitarteko, 195
  ortogonal, 195
sistema

bateraezin, 10
bateragarri, 10
bateragarri determinatu, 10
bateragarri indeterminatu, 10
ekuazio linealetako, 10
homogeneo, 10
sortzaile, 32

talde
abeldar, 7
afin, 190
simetriko, 81
tamaina, 1
transformazio afin, 190
translazio, 191
trasposizio, 82

unitate irudikari, 6

zenbaki
arrazional, 5
arrunt, 5
erreal, 6
irudikari, 6
konplexu, 6
oso, 5
zentru
homotezia baten, 193
zutabe, 12

Bibliografia

[1] J. M. Arregi, A. Vera, *Aljebra Lineala eta Geometria I*, Ed. AVL, Bilbao 1998.

[2] R. Benavent, *Cuestiones sobre Álgebra Lineal*, Paraninfo, 2011.

[3] M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra Lineal y Geometría*, Reverté, 2000.

[4] S. Chang, M. Eie, *A first course in linear algebra*, World Scientific, 2016.

[5] J. De Burgos, *Álgebra lineal y Geometría cartesiana*, MacGraw-Hill, 2006.

[6] J. De Burgos, *Test y Problemas Álgebra*, García-Maroto Editores, 2011.

[7] D. S. Dummit, R.M. Foote, *Abstract Algebra*, 3rd Edition, Wiley, 2003.

[8] J. González Meneses, *Álgebra Lineal*, Apuntes de Álgebra Lineal.

[9] J. L. Hernando, A. Vera, F.J. Vera, *Problemas de Algebra I*, Ed. Ellacuria, Bilbao 1986.

[10] I.Lankham, B. Nachtergaele, A. Schilling, *Linear Algebra as an Introduction to abstract Mathematics*, World Scientific, 2016.

[11] P. Petersen, *Linear Algebra*, Springer-Verlage, 2012.

[12] A. Sheldon, *Aljebra Lineala ondo egina*, Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua, UPV/EHU, 2017.

[13] A.Sheldon, *Linear Algebra Done Right*, Springer International Publishing, 2015.

[14] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 5th ed. Wellesley-Cambridge Press, 2016.

[15] D. Lay, S. Lay, J. McDonald, *Linear Algebra and its applications*, Pearson, 2014.

Unibertsitateko eskuliburuak
Manuales universitarios

ISBN: 978-84-1319-628-2

UPV/EHUko Argitalpen Zerbitzua
argitaletxea@ehu.eus • 94 601 2227
Biblioteka eraikuntza, 1. solairua
Sarriena auzoa z/g. Bizkaiko campusa
www.ehu.eus/argitalpenak

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Servicio Editorial de la UPV/EHU
editorial@ehu.eus • 94 601 2227
Edificio Biblioteca, 1ª planta
Bº Sarriena s/n. Campus de Bizkaia
www.ehu.eus/argitalpenak