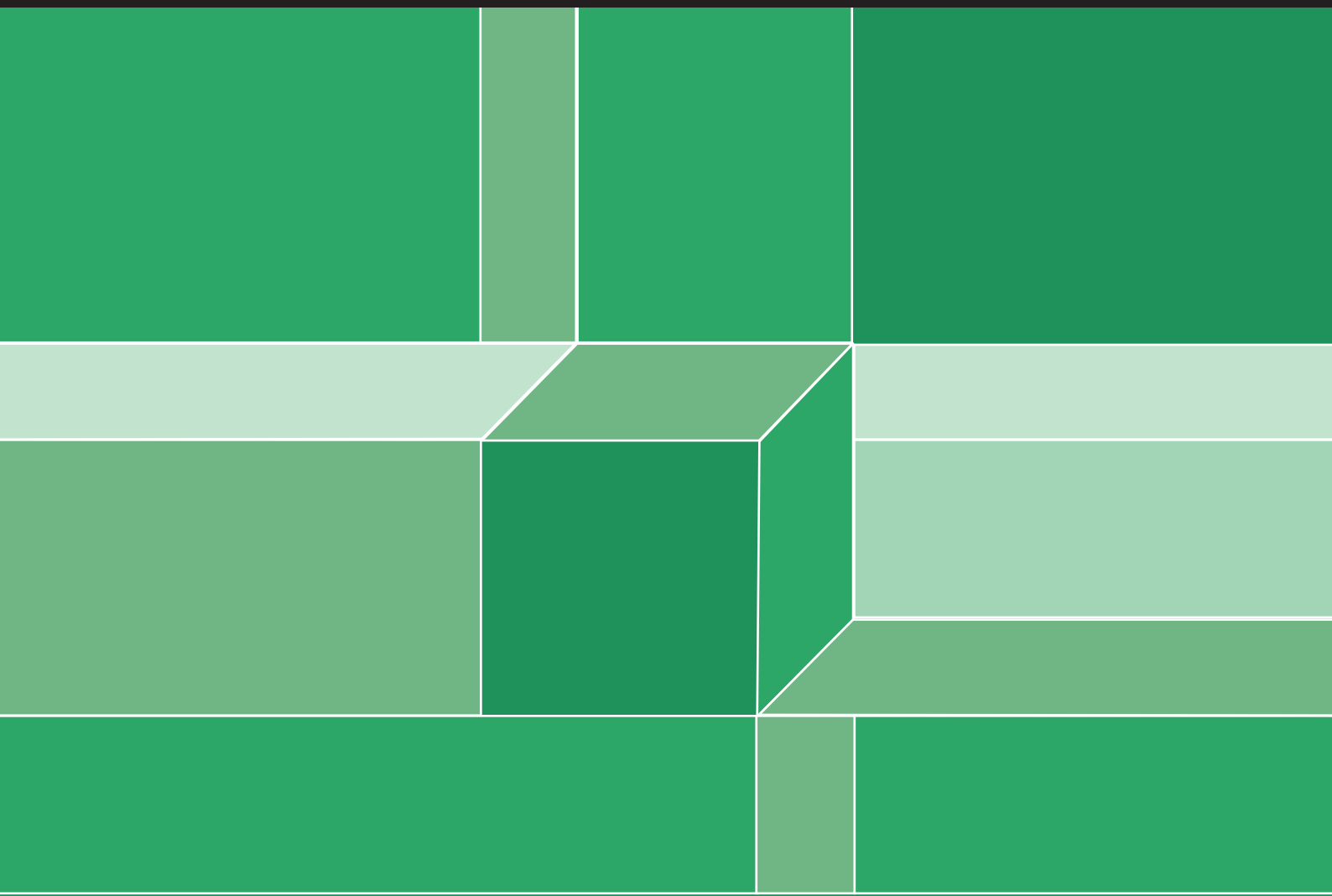
Exámenes resueltos de Álgebra Lineal y Matemáticas I 1996-2000

Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicación
Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao

Eugenio Bravo Sevilla · Ana Gloria González López · M. Esther Gutiérrez Orrantia · F. Javier Molinuevo Fano · C. Mónica Rebollo Gómez · Josu Sagastagoitia Monasterio · M. Verónica Valdenebro Villar



EHU

EXÁMENES RESUELTOS DE
ÁLGEBRA LINEAL Y MATEMÁTICAS I
1996-2000

EXÁMENES RESUELTOS DE ÁLGEBRA LINEAL Y MATEMÁTICAS I

1996-2000

Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicación
Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao

Eugenio Bravo Sevilla, Ana Gloria González López, M. Esther Gutiérrez Orrantia, F. Javier Molinuevo Fano, C. Mónica Rebollo Gómez, Josu Sagastagoitia Monasterio, M. Verónica Valdenebro Villar

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
servicio editorial

Euskal Herriko Unibertsitatea
argitalpen zerbitzua

CIP. Biblioteca Universitaria

Exámenes resueltos de álgebra lineal y matemáticas I [Recurso electrónico]: 1996-2000 : Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicación, Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao / Eugenio Bravo Sevilla... [et al.]. – Datos. – [Leioa] : Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua = Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, [2026]. – 1 recurso en línea: PDF (198 p.)
Ed. electrónica de la ed. impresa (2002)
Modo de acceso: World Wide Web.
ISBN: 978-84-1319-845-3

1. Álgebra lineal – Problemas y ejercicios. I. Bravo Sevilla, Eugenio, coaut.

(0.034) 512.64(076)

© Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua
Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco

Argitalpen Zerbitzua • Servicio Editorial
editorial@ehu.eus - 94 601 2227
www.ehu.eus/argitalpenak
Edificio Biblioteca, 1.ª planta
B.º Sarriena s/n. Campus de Bizkaia

ISBN PDF: 978-84-1319-845-3

Este libro se imprimió por primera vez en el año 2002 y se encuentra agotado.
Su publicación en formato PDF se realizó en el año 2026.

Los datos del libro en papel son los siguientes:

ISBN PAPEL: 84-8373-458-3 (978-84-8373-458-2)
Depósito Legal/Lege Gordailua: BI-2249-02

Impresión/Inprimatzea: Itxaropena, S.A.
Araba Kalea, 45 - 20800 Zarautz (Gipuzkoa)

Índice

Prólogo 9

1. Matrices y determinantes 11

2. Espacios vectoriales 47

3. Aplicaciones lineales 77

4. Diagonalización por semejanza 101

5. Triangularización por semejanza 131

6. Formas bilineales y cuadráticas 163

7. Producto escalar 177

Bibliografía 197

Prólogo

Este libro es una recopilación de los problemas de examen propuestos en la Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao para las asignaturas de Álgebra Lineal (en Ingeniería Industrial) y Matemáticas I (en Ingeniería de Telecomunicaciones) en las diferentes convocatorias de los cursos 96-97, 97-98, 98-99 y 99-00.

El libro consta de 7 capítulos, correspondiendo cada uno de ellos a un tema del programa que se imparte en la actualidad en dichas asignaturas en la mencionada escuela. Los autores del libro son profesores que imparten actualmente las asignaturas anteriormente citadas y cada profesor ha realizado un capítulo según se muestra al final de este prólogo. Dentro de cada tema los problemas se han ordenado por fechas, presentándose todos ellos resueltos. Al final de cada capítulo se encuentran las cuestiones teóricas y teórico-prácticas correspondientes al tema que se trata en dicho capítulo; aquéllas puramente teóricas no se han resuelto, pudiendo el alumno consultar la respuesta adecuada en el libro de Apuntes de Clase editado por el Servicio de Publicaciones de la Escuela Superior de Ingenieros de Bilbao.

Los autores esperan que este libro sirva de ayuda para asimilar diferentes conceptos del Álgebra Lineal (en concreto, los tratados en el programa anteriormente citado) siendo así un apoyo interesante para los alumnos que cursen dicha asignatura.

Autores del libro:

Tema 1	C. Mónica Rebollo Gómez
Tema 2	Ana Gloria González López
Tema 3	M. Esther Gutiérrez Orrantia
Tema 4	M. Verónica Valdenebro Villar
Tema 5	Eugenio Bravo Sevilla
Temas 6 y 7	Josu Sagastagoitia Monasterio
Revisión	F. Javier Molinuevo Fano

1

MATRICES Y DETERMINANTES

1.1

a) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x+\quad\quad t=2 \\ x+y\quad\quad =0 \end{cases}$ empleando el método de Gauss utilizando transformaciones elementales de filas. ¿En qué casos es compatible?.

b) Relacionar las matrices ampliadas correspondientes a los sistemas inicial y final mediante las matrices elementales correspondientes a las transformaciones elementales realizadas en el apartado anterior.

(Febrero 1996)

Resolución:

a) La matriz ampliada de sistema inicial es:

$$\mathrm{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas para resolver el sistema con el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2-F_1 \\ \longrightarrow \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes del sistema transformado es 3 y el de la correspondiente matriz ampliada también es 3, el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es 4 el sistema considerado es compatible indeterminado, y tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro:

$$\begin{cases} x\quad\quad\quad =-t+2 \\ -y-z= \quad 1 \\ \quad\quad -z=t-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-t \\ y=-2+t, \\ z=1-t \end{cases} \quad \forall\, \mathrm{t}\in\mathbb{R}.$$

b) Las matrices ampliadas de los sistemas inicial y final respectivamente son:

$$\mathrm{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad \mathrm{C}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right),$$

siendo $C = P_2 \cdot P_1$, donde P_1 y P_2 son las matrices elementales asociadas a las transformaciones elementales de filas realizadas sobre la matriz A hasta obtener la C, es decir

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{F_2 - F_1}{\longrightarrow} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \overset{F_3 - F_1}{\longrightarrow} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

1.2 Hallar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ utilizando matrices por bloques.

(Febrero 1996)

Resolución:

En primer lugar se calcula el determinante de A para comprobar que existe la inversa de A (*det*(A) = -9). Se particiona la matriz en bloques

$$A = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} M_{2x2} & (0)_{2x1} \\ \hdashline C_{1x2} & D_{1x1} \end{array}\right),$$

con lo cual la inversa de A ha de estar particionada de la forma siguiente:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} X_{2x2} & Y_{2x1} \\ \hdashline Z_{1x2} & T_{1x1} \end{array}\right).$$

Así

$$A \cdot A^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} M_{2x2} & (0)_{2x1} \\ \hdashline C_{1x2} & D_{1x1} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c:c} X_{2x2} & Y_{2x1} \\ \hdashline Z_{1x2} & T_{1x1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} I_2 & (0)_{2x1} \\ \hdashline (0)_{1x2} & I_1 \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} M \cdot X & = I_2 \\ M \cdot Y & = (0) \\ C \cdot X + D \cdot Z & = (0) \\ C \cdot Y + D \cdot T & = I_1 \end{cases}.$$

Como M es una matriz regular (*det*(M) = -3), se premultiplica en la primera ecuación del sistema por M^{-1}, y se obtiene

$$X = M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Procediendo de igual forma en la segunda ecuación, se obtiene

$$Y = M^{-1}\cdot(0) = (0).$$

Teniendo en cuenta que D es regular, de la cuarta ecuación se obtiene

$$T = D^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right).$$

Y despejando Z de la tercera ecuación

$$Z = -D^{-1}\cdot C\cdot X = -\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-1}{3}\end{pmatrix}.$$

De donde

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc:c} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \hdashline \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

■

1.3 Sea una matriz cuadrada A_{nxn} cuyo determinante tiene un valor conocido e igual a Δ. Se realizan <u>sucesivamente</u> las siguientes transformaciones

1 : se multiplica por α la matriz A.

2 : se cambian entre sí las dos primeras filas.

3 : se cambian entre sí las dos últimas columnas.

4 : se divide entre β una de las filas y se multiplica por γ una de las columnas.

5 : Desde i = 1 hasta n-1 sustituimos cada fila F_i por $F_i + F_{i+1}$.

6 : Por último trasponemos la matriz.

Obtener el valor del determinante para las sucesivas matrices que se van obteniendo al realizar las transformaciones indicadas.

(Septiembre 1996)

Resolución:

$$A \xrightarrow{\alpha A} A_1 \xrightarrow{F_1 \approx F_2} A_2 \xrightarrow{C_{n-1} \approx C_n} A_3 \xrightarrow{\frac{1}{\beta}F_i} A_4$$

$$A_4 \xrightarrow{\gamma C_j} A_5 \xrightarrow[\substack{F_2 + F_3 \\ \dots \\ F_{n-1} + F_n}]{F_1 + F_2} A_6 \xrightarrow{\textit{trasposición}} A_7.$$

Por las propiedades de los determinantes se deduce:

$$det(A) = \Delta \longrightarrow det(A_1) = \alpha^n \Delta \longrightarrow det(A_2) = -\alpha^n \Delta \longrightarrow det(A_3) = \alpha^n \Delta$$

$$\longrightarrow det(A_4) = \frac{1}{\beta}\alpha^n \Delta \longrightarrow det(A_5) = \frac{\gamma}{\beta}\alpha^n \Delta \longrightarrow det(A_6) = \frac{\gamma}{\beta}\alpha^n \Delta$$

$$\longrightarrow det(A_7) = \frac{\gamma}{\beta}\alpha^n \Delta.$$

■

1.4 Sea A una matriz cuadrada de orden n. Mediante transformaciones elementales de fila llegamos a la matriz unidad.

a) ¿Existe A^{-1}? Razonar.

b) Sabiendo que las matrices elementales correspondientes a las transformaciones elementales realizadas son (en este orden) P_1, P_2 y P_3 expresar A^{-1} como producto de matrices elementales.

(Septiembre 1996)

Resolución:

a) Sí existe, ya que si, a partir de A, con transformaciones elementales de filas se obtiene la matriz I_n, entonces A es regular (las transformaciones elementales no alteran ni el rango ni la dimensión de la matriz).

b) $I_n = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A$ de donde, postmultiplicando por A^{-1}, $A^{-1} = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1$.

■

1.5 Utilizar el método de Gauss para

a) Discutir la existencia de solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x - y + z = -1 \\ 9x - 2y + z = -9 \\ 3x + y + az = -9 \end{cases}.$$

b) Resolver dicho sistema para a = -2.

(Septiembre 1996)

Resolución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & a & -9 \end{array}\right),$$

se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas para analizar la compatibilidad del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & a & -9 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 3F_1 \\ \longrightarrow \\ F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & a-1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - 2F_2 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & a+3 & 4 \end{array}\right).$$

De donde se concluye que:

- Si a = -3 el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el de la matriz ampliada es 3, luego el sistema será incompatible.
- Si a ≠ -3 el rango de la matriz de los coeficientes es 3 y el de la matriz ampliada es 3, que coincide con el número de incógnitas, luego el sistema tendrá solución única.

b) Para a = -2 la matriz obtenida es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right),$$

cuyo sistema asociado es:

$$\begin{cases} 3x - y + z = -1 \\ y - 2z = -6 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}.$$

■

1.6 Calcular $A^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota: Utilizar el método de inducción.

(Septiembre 1996)

Resolución:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & (-1)^4 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^4 \end{pmatrix}.$$

Con lo que parece que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Se comprobará que, efectivamente, A^n responde a esa expresión, utilizando el método de inducción matemática:

1. Se demuestra que la expresión es verdadera para $n = 1$ y para $n = 2$,

$$A = A^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & (-1)^1 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 2^1 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 2^1 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}.$$

2. Supuesto cierto para n = k, se demuestra que es también cierto para n = k+1. Es decir hay que demostrar que $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}$, basándose en que $A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}$.

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & (-1)^{k+1} & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix},$$

con lo que se obtiene lo que se quería demostrar.

■

1.7 Hallar (indicando todos los pasos) la inversa de $P = \begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & B \end{pmatrix}$ donde A y B son matrices cuadradas regulares de órdenes respectivos m y n y (0) matrices nulas de órdenes adecuados.

(Septiembre 1996)

Resolución:

Teniendo en cuenta que

$$P = \left(\begin{array}{c|c} A_{mxm} & (0)_{mxn} \\ \hline (0)_{nxm} & B_{nxn} \end{array}\right),$$

la inversa de P ha de estar particionada de la forma siguiente:

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{mxm} & Y_{mxn} \\ \hline Z_{nxm} & T_{nxn} \end{array}\right).$$

Con lo que:

$$P \cdot P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{mxm} & (0)_{mxn} \\ \hline (0)_{nxm} & B_{nxn} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} X_{mxm} & Y_{mxn} \\ \hline Z_{nxm} & T_{nxn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_m & (0)_{mxn} \\ \hline (0)_{nxm} & I_n \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} A \cdot X = I_m \\ A \cdot Y = (0) \\ B \cdot Z = (0) \\ B \cdot T = I_n \end{cases}.$$

Como A y B son matrices regulares, $\exists\ A^{-1}$ y $\exists\ B^{-1}$. Se premultiplica en la primera ecuación del sistema por A^{-1}, y se obtiene

$$X = A^{-1}\cdot I_m = A^{-1}.$$

Procediendo de igual forma en la segunda ecuación, se obtiene

$$Y = A^{-1}\cdot(0) = (0).$$

Se premultiplica en la tercera ecuación del sistema por B^{-1}, y se obtiene

$$Z = B^{-1}\cdot(0) = (0).$$

Procediendo de igual forma en la cuarta ecuación, se obtiene

$$T = B^{-1}\cdot I_n = B^{-1}.$$

De donde

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & (0)_{mxn} \\ \hline (0)_{nxm} & B^{-1} \end{array}\right).$$

■

1.8 Dada la Matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Hallar su forma de Hermite, H, mediante transformaciones elementales y expresar la relación entre A y H como producto de matrices elementales.

b) Hallar A^{-1} mediante transformaciones elementales.

(Febrero 1997)

Resolución:

a) Partiendo de A, realizando transformaciones elementales de filas, se obtiene la matriz H, forma canónica de Hermite de A (que es la matriz unidad I_2 por ser A regular):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 6F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{11}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H = I_2.$$

Para poder relacionar A con H se han de calcular las matrices elementales asociadas a las transformaciones elementales realizadas:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_1,$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 6F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = P_2,$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-11F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{11} \end{pmatrix} = P_3,$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P_4.$$

De donde se deduce que:

$$H = P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot A.$$

b) Partiendo de I, realizando las mismas transformaciones elementales de filas y en el mismo orden que se han hecho a A para obtener I, se obtiene la matriz A^{-1}:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 6F_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{11}F_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} \frac{-1}{22} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-1}{11} \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

■

1.9 Sea A = B + C, donde B y C son matrices cuadradas de orden n que conmutan y $C^2 = (0)$. Demuéstrese, empleando el método de inducción, que para todo número natural p > 0 se verifica: $A^{p+1} = B^p[B + (p+1)C]$.

(Febrero 1997)

Resolución:

Se comprobará que efectivamente $A^{p+1} = B^p[B + (p+1)C]$, utilizando el método de inducción matemática:

1. Se demuestra que la expresión es verdadera para p = 1,

$$A^{1+1} = A^2 = (B + C)\cdot(B + C) = B^2 + B\cdot C + C\cdot B + C^2 =$$

$$= B^2 + 2B\cdot C = B^1[B + (1+1)C].$$

2. Supuesto cierto para p = k, se demuestra que es también cierto para p = k+1. Es decir hay que demostrar que $A^{k+2} = B^{k+1}[B + (k+2)C]$, basándose en que $A^{k+1} = B^k[B + (k+1)C]$

$$A^{k+2} = A^{k+1}\cdot A = B^k\left[B + (k+1)C\right]\cdot(B + C) =$$

$$= B^k\left[B^2 + (k+1)C\cdot B\right] + B^k\left[B\cdot C + (k+1)C^2\right]$$

Teniendo en cuenta que B y C conmutan y que $C^2 = (0)$:

$$A^{k+2} = B^{k+1}\left[B + (k+1)C + C\right] = B^{k+1}\left[B + (k+2)C\right],$$

con lo que se obtiene lo que se quería demostrar.

■

1.10 Calcular A^{-1} trabajando con la matriz particionada en bloques, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Febrero 1997)

Resolución:

Se particiona la matriz A de la forma siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{cc:ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} B_{3x2} & I_3 \\ \hdashline C_{2x2} & (0)_{2x3} \end{array}\right),$$

con lo cual la inversa de A ha de estar particionada de la forma siguiente:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} X_{2x3} & Y_{2x2} \\ \hdashline Z_{3x3} & T_{3x2} \end{array}\right).$$

De donde:

$$A\cdot A^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} B_{3x2} & I_3 \\ \hdashline C_{2x2} & (0)_{2x3} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c:c} X_{2x3} & Y_{2x2} \\ \hdashline Z_{3x3} & T_{3x2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} I_3 & (0)_{3x2} \\ \hdashline (0)_{2x3} & I_2 \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} B\cdot X + Z = I_3 \\ B\cdot Y + T = (0) \\ C\cdot X \quad\;\; = (0) \\ C\cdot Y \quad\;\; = I_2 \end{cases}.$$

Como la matriz C es regular existe C^{-1}. Se premultiplica en la tercera ecuación del sistema por C^{-1}, y se obtiene

$$X = (0).$$

Procediendo de igual forma en la cuarta ecuación, se obtiene

$$Y = C^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la primera ecuación

$$Z = I_3.$$

Despejando en la segunda ecuación

$$T = -B\cdot Y = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -13 & 10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

De donde se concluye que

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right).$$

■

1.11 Calcular A^{-1} trabajando con matrices particionadas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 1997)

Resolución:

Se particiona la matriz A de la forma siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & C_{1x2} \\ \hline (0)_{2x1} & I_2 \end{array}\right),$$

con lo cual la inversa de A ha de estar particionada de la forma siguiente:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{1x1} & Y_{1x2} \\ \hline Z_{2x1} & T_{2x2} \end{array}\right).$$

Con lo que:

$$A \cdot A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & C_{1x2} \\ \hline (0)_{2x1} & I_2 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} X_{1x1} & Y_{1x2} \\ \hline Z_{2x1} & T_{2x2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & (0)_{1x2} \\ \hline (0)_{2x1} & I_2 \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} X + C \cdot Z = I_1 \\ Y + C \cdot T = (0) \\ Z = (0) \\ T = I_2 \end{cases}.$$

Como Z es la matriz nula y $T = I_2$, de la primera ecuación se despeja $X = I_1$, y de la segunda ecuación se despeja $Y = -C$. De donde se concluye que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

1.12 Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ -2x + 12y - 10z = 3 \\ -10y + 10z = b \end{cases}.$$

Aplicar el método de Gauss para resolverlo y discutir en función de los valores de *b* en que casos es un sistema compatible y en tales casos dar una solución del sistema mediante un proceso de sustitución regresiva

(Septiembre 1997)

Resolución:

Hay que estudiar para qué valores de *b* tiene solución el sistema. La matriz ampliada de este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 12 & -10 & 3 \\ 0 & -10 & 10 & b \end{array}\right),$$

se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas para analizar la compatibilidad del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 12 & -10 & 3 \\ 0 & -10 & 10 & b \end{array}\right) \overset{F_2+F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \\ 0 & -10 & 10 & b \end{array}\right) \overset{F_3+F_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+2 \end{array}\right).$$

De donde se concluye que el sistema tendrá solución si y sólo si b = -2, en cuyo caso el sistema es compatible indeterminado (el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada es 2, mientras que el número de incógnitas es 3). Procediendo por sustitución regresiva, se obtiene que la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = t - \dfrac{3}{10} \\ y = t + \dfrac{1}{5} \\ z = t \end{cases}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

■

1.13 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$ siendo C cuadrada y regular de orden n, calcular A^{-1}.

(Febrero 1998)

Resolución:

Teniendo en cuenta que $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ (0) & C_{nxn} \end{pmatrix}$ la inversa de A ha de estar particionada en la forma

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{nxn} & Y_{nxn} \\ \hline Z_{nxn} & T_{nxn} \end{array}\right).$$

Con lo que:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ (0) & C \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} X_{nxn} & Y_{nxn} \\ \hline Z_{nxn} & T_{nxn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & (0)_{nxn} \\ \hline (0)_{nxn} & I_n \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} X + B\cdot Z = I_n \\ Y + B\cdot T = (0) \\ \quad C\cdot Z = (0) \\ \quad C\cdot T = I_n \end{cases}.$$

Como C es una matriz regular, $\exists\ C^{-1}$. Se premultiplica en la tercera ecuación del sistema por C^{-1}, y se obtiene

$$Z = (0).$$

Procediendo de igual forma en la cuarta ecuación

$$T = C^{-1}.$$

De la primera ecuación se obtiene

$$X = I_n.$$

Y de la segunda ecuación

$$Y = -B\cdot T = -B\cdot C^{-1}.$$

De donde

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & -B\cdot C^{-1} \\ \hline (0)_{nxn} & C^{-1} \end{array}\right).$$

■

1.14 Utilizando el método de Gauss, discutir (y resolver cuando sea posible) el siguiente sistema lineal, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x \quad + 3z - t = 2 \\ \quad y + 5z \quad = 7 \\ 2x - y + z - 2t = a \end{cases}.$$

(Febrero 1998)

Resolución:

Hay que estudiar para qué valores de a tiene solución el sistema cuya matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & a \end{array}\right).$$

Para analizar la compatibilidad del sistema se realizan sobre la matriz ampliada transformaciones elementales de filas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & a \end{array}\right) \overset{F_3 - 2F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & a-4 \end{array}\right) \overset{F_3 + F_2}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+3 \end{array}\right).$$

De donde se concluye que el sistema tendrá solución si y sólo si a = -3, en cuyo caso el sistema es compatible indeterminado (el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada es 2, mientras que el número de incógnitas es 4).

Para a = -3, se obtiene que la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 2 - 3z + t \\ y = 7 - 5z \\ z = z \\ t = t \end{cases}, \quad \forall\, z, t \in \mathbb{R}.$$

■

1.15 Utilizando el método de Gauss, discutir (y resolver cuando sea posible) el siguiente sistema lineal, según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}.$$

(Septiembre 1998)

Resolución:

La matriz ampliada de este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & a & 0 \end{array}\right),$$

para analizar la compatibilidad del sistema se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ \longrightarrow \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & a-2 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 \approx F_2 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & a-2 & -12 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right).$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada son 3, que es el número de incógnitas, se concluye que el sistema es compatible determinado para cualquier valor de a.

Procediendo por sustitución regresiva, se obtiene que la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 1 - a \\ y = 2 + a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}. \\ z = 3 \end{cases}$$

■

1.16 Calcular A^{-1} empleando matrices particionadas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 1998)

Resolución:

Se particiona la matriz A en la forma:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} (0)_{2x3} & B_{2x2} \\ \hline I_3 & C_{3x2} \end{array}\right),$$

con lo cual la inversa de A ha de estar particionada de la forma siguiente:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{3x2} & Y_{3x3} \\ \hline Z_{2x2} & T_{2x3} \end{array}\right).$$

Entonces:

$$A\cdot A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} (0)_{2x3} & B_{2x2} \\ \hline I_3 & C_{3x2} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} X_{3x2} & Y_{3x3} \\ \hline Z_{2x2} & T_{2x3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & (0)_{2x3} \\ \hline (0)_{3x2} & I_3 \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} B\cdot Z = I_2 \\ B\cdot T = (0) \\ X + C\cdot Z = (0) \\ Y + C\cdot T = I_3 \end{cases}.$$

Como B es una matriz regular, existe B^{-1}. Premultiplicando por ella en la primera ecuación se obtiene

$$Z = B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De la segunda ecuación se deduce

$$T = (0).$$

De la cuarta se despeja

$$Y = I_3.$$

Y de la tercera ecuación se obtiene

$$X = -C\cdot Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde se concluye que

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

■

1.17

a) Sean dos matrices A, B $\in E_{nxn}(\mathbb{R})$ y regulares. Si A·B es una matriz ortogonal, ¿Qué relación existe entre las matrices $C = B\cdot B^t$ y $D = A^t\cdot A$?.

b) Indicar razonadamente si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz elemental.

c) ¿Qué transformación elemental podremos efectuar con la matriz elemental $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sobre la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$?. Indicar la matriz resultante.

(Septiembre 1998)

Resolución:

a) Por ser A y B cuadradas y regulares C y D también lo son. Como además A·B es ortogonal se verifica:

$$(A\cdot B)^t = (A\cdot B)^{-1} \Rightarrow B^t\cdot A^t = B^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cdot B^t\cdot A^t = B\cdot B^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow B\cdot B^t\cdot A^t\cdot A = B\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\cdot B^t\cdot A^t\cdot A = I \Rightarrow C\cdot D = I.$$

Con lo que se deduce que C es la inversa de D y viceversa.

b) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no es una matriz elemental ya que no es regular. Si a la matriz unidad de orden dos se le hace una transformación elemental la matriz elemental que se obtiene tiene también rango 2 (las transformaciones elementales no alteran el rango ni la dimensión de la matriz).

c) La matriz elemental $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (de orden 3) sólo puede actuar como matriz elemental asociada a una transformación elemental de columnas con respecto a la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ (puesto que A tiene 3 columnas y 2 filas). En concreto está asociada a la transformación de columnas consistente en intercambiar las columnas 1 y 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

■

1.18

a) Hallar la inversa de la matriz A mediante la siguiente partición por bloques

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

b) Hallar la inversa de la matriz A mediante transformaciones elementales.

(Febrero 1999)

Resolución:

a) Teniendo en cuenta que

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{1x2} & C_{1x1} \\ D_{2x2} & (0)_{2x1} \end{pmatrix},$$

la inversa de A ha de estar particionada en la forma

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{2x1} & Y_{2x2} \\ \hline Z_{1x1} & T_{1x2} \end{array}\right).$$

Con lo que:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{1x2} & C_{1x1} \\ D_{2x2} & (0)_{2x1} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} X_{2x1} & Y_{2x2} \\ \hline Z_{1x1} & T_{1x2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & (0)_{1x2} \\ \hline (0)_{2x1} & I_2 \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} B \cdot X + C \cdot Z = I_1 \\ B \cdot Y + C \cdot T = (0) \\ D \cdot X \quad\quad = (0) \\ D \cdot Y \quad\quad = I_2 \end{cases}.$$

Como D es una matriz regular, $\exists\ D^{-1}$. Se premultiplica en la tercera ecuación del sistema por D^{-1}, y se obtiene

$$X = (0).$$

Procediendo de igual forma en la cuarta ecuación, se obtiene

$$Y = D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como C es una matriz regular, $\exists\ C^{-1}$. Premultiplicando por C^{-1}, de la primera ecuación se obtiene

$$Z = C^{-1} = (1).$$

Y de la segunda ecuación

$$T = -C^{-1} \cdot B \cdot Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right).$$

b) Partiendo de A, realizando transformaciones elementales de filas, se obtiene la matriz I_3, posteriormente, partiendo de I_3, realizando las mismas transformaciones elementales de filas y en el mismo orden que se han hecho a A para obtener I, se obtiene la matriz A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \approx F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \approx F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

■

1.19 Qué condiciones deben cumplir a y b para que el siguiente sistema sea compatible:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -4 & 4 \\ -6 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

Resolver en ese supuesto.

(Febrero 1999)

Resolución:

La matriz ampliada de este sistema es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & -4 & 4 & 2 \\ -6 & -3 & 1 & -6 & a \\ 2 & 2 & -1 & 2 & b \end{array}\right),$$

para analizar la compatibilidad del sistema se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & -4 & 4 & 2 \\ -6 & -3 & 1 & -6 & a \\ 2 & 2 & -1 & 2 & b \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_1]{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 + 3F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -8 & 0 & a+3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 - F_2]{F_3 + 4F_2}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right).$$

De donde se concluye que, para que el rango de la matriz de los coeficientes y el de la ampliada coincidan, y por lo tanto el sistema es compatible, se ha de cumplir que a = -3 y b = 1, en cuyo caso el sistema es compatible indeterminado y la solución dependerá de dos parámetros.

Si a = -3 y b = 1, procediendo por sustitución regresiva, se obtiene que la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\lambda - \mu \\ x_2 = \frac{2}{3}\lambda \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \end{cases}, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

■

1.20 Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}, \text{ donde } a \in \mathbb{R}.$$

Utilizando el método de Gauss

a) Discutir las soluciones del sistema según los valores de a.

b) Resolver el sistema para a = -4.

(Septiembre 1999)

Resolución:

a) La matriz ampliada de este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right),$$

para analizar la compatibilidad del sistema se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ \longrightarrow \\ F_3 - F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Aquí se distinguen las diferentes situaciones que se pueden presentar:

- Si $a = 1$: la matriz correspondiente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right).$$

De donde se deduce que la matriz de los coeficientes y la ampliada tienen rango 3, y como el número de incógnitas también es 3, el sistema es compatible determinado.

- Si $a \neq 1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - (a-1)F_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 & 2-a \end{array}\right)$$

teniendo en cuenta que $-a^2 - a + 6 = -(a - 2)(a + 3)$, se tiene

- Si $a \neq 2 \ \wedge a \neq -3$, la matriz de los coeficientes y la ampliada tienen rango 3, y como el número de incógnitas también es 3, el sistema es compatible determinado.

- Si $a = 2$: la matriz ampliada correspondiente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

la matriz de los coeficientes y la ampliada tienen rango 2, y como el número de incógnitas es 3, el sistema es compatible indeterminado.

- Si $a = -3$: la matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right),$$

la matriz de los coeficientes tiene rango 3 y la ampliada tiene rango 2, luego el sistema es incompatible.

b) Para a = -4, el sistema es compatible determinado según lo visto en el apartado a), la matriz correspondiente es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right).$$

Procediendo por sustitución regresiva, se obtiene que la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

■

1.21 Determinar la inversa de la matriz M en función de los valores de x, **utilizando la teoría de bloques** y decir los valores de x que hacen que la matriz M sea regular.

Nota : No calcular ninguna inversa, solo dejarlas indicadas. (Ejemplo : F^{-1})

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ x & 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resolver para x = 2, mediante eliminación gaussiana el siguiente sistema: $M \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}$, siendo $\mathbf{b} = (1\ 2\ 1\ 2\ 1)^t$.

(Febrero 2000)

Resolución:

Se particiona la matriz M de la forma siguiente:

$$M = \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ x & 1 & 0 & x & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A_{2x2} & B_{2x3} \\ \hdashline (0)_{3x2} & C_{3x3} \end{array}\right),$$

con lo cual la inversa de M ha de estar particionada de la forma siguiente:

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{2x2} & Y_{2x3} \\ \hline Z_{3x2} & T_{3x3} \end{array}\right).$$

Con lo que:

$$M \cdot M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{2x2} & B_{2x3} \\ \hline (0)_{3x2} & C_{3x3} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} X_{2x2} & Y_{2x3} \\ \hline Z_{3x2} & T_{3x3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & (0)_{2x3} \\ \hline (0)_{3x2} & I_3 \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} A \cdot X + B \cdot Z = I_2 \\ A \cdot Y + B \cdot T = (0) \\ C \cdot Z = (0) \\ C \cdot T = I_3 \end{cases}.$$

A es regular, independientemente del valor de x. C también es regular. Premultiplicando por C^{-1} en la tercera ecuación se obtiene

$$Z = (0).$$

De la cuarta ecuación se deduce

$$T = I_3.$$

De la primera

$$X = A^{-1}.$$

Y de la segunda

$$Y = -A^{-1} \cdot B \cdot T = -A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}.$$

De donde

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} \\ \hline (0) & C^{-1} \end{array}\right), \text{ para cada valor de x.}$$

Para x = 2, el sistema que hay que resolver es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

para analizar su compatibilidad se realizan sobre sobre la matriz ampliada del sistema transformaciones elementales de filas

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 - 2F_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \overset{F_5 - F_3}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_5 + \frac{1}{2}F_4}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

Como la matriz de los coeficientes y la ampliada tienen rango 5, y el número de incógnitas también es 5, el sistema es compatible determinado, y su solución es

$$\begin{cases} y_1 = -2 \\ y_2 = 2 \\ y_3 = 5 \\ y_4 = -2 \\ y_5 = 0 \end{cases}.$$

■

1.22 Obtener el determinante de orden n+1 siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & \dots & a+(n-1)b & a+nb \\ -a & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & .. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a & a \end{vmatrix}.$$

(Febrero 2000)

Resolución:

Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+2b & ... & a+(n-1)b & a+nb \\ -a & a & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & .. & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -a & a \end{vmatrix} \begin{matrix} C_1 + \sum_{i=2}^{n+1} C_i \\ = \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (n+1)a + (1+2+...+n)b & a+b & a+2b & ... & a+(n-1)b & a+nb \\ 0 & a & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & .. & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & -a & a \end{vmatrix}.$$

Desarrollando este determinante por los elementos de la primera columna, se obtiene:

$$\Delta = [(n+1)\,a + \frac{n+1}{2} n\,b] \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & ... & 0 \\ -a & a & 0 & ... & 0 \\ 0 & -a & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a \end{vmatrix} = [(n+1)\,a + \frac{n+1}{2} n\,b]\, a^n.$$

■

1.23 Encontrar todas las matrices columna $\mathbf{b}_{3x1}$ para las cuales existe al menos una solución del sistema $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, y encontrar todas las soluciones **x** asociadas a dichas **b.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre 2000)

Resolución:

Hay que estudiar para qué valores de b_1, b_2 y b_3 tiene solución el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada de este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & b_1 \\ 2 & -3 & 4 & b_2 \\ 4 & 1 & -6 & b_3 \end{array}\right),$$

se realizan sobre ella transformaciones elementales de filas para analizar la compatibilidad del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & b_1 \\ 2 & -3 & 4 & b_2 \\ 4 & 1 & -6 & b_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ \longrightarrow \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & b_1 \\ 0 & -7 & 14 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -7 & 14 & b_3 - 4b_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_2 \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & b_1 \\ 0 & -7 & 14 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 - b_2 \end{array}\right).$$

De donde se concluye que el sistema tendrá solución si y sólo si $\mathbf{b_3 - 2b_1 - b_2 = 0}$, en cuyo caso, por sustitución regresiva, la solución del sistema es:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3b_1 + 2b_2 + 7t}{7} \\ y = \dfrac{-b_2 + 2b_1 + 14t}{7}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

■

1.24 Utilizando operaciones con bloques hallar la inversa de la siguiente matriz:

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (0) & A_{22} \end{pmatrix}$, donde A_{11} y A_{22} son dos bloques cuadrados y regulares.

(Septiembre 2000)

Resolución:

Teniendo en cuenta cómo está particionada la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (0) & A_{22} \end{pmatrix}$$

siendo A_{11} y A_{22} matrices regulares de orden n, la inversa de A ha de estar particionada de la forma siguiente:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} X_{nxn} & Y_{nxn} \\ \hline Z_{nxn} & T_{nxn} \end{array}\right).$$

Con lo que:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (0) & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} X_{nxn} & Y_{nxn} \\ \hline Z_{nxn} & T_{nxn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & (0)_{nxn} \\ \hline (0)_{nxn} & I_n \end{array}\right).$$

Operando con las matrices particionadas se obtiene el sistema matricial:

$$\begin{cases} A_{11}\cdot X + A_{12}\cdot Z = I_n \\ A_{11}\cdot Y + A_{12}\cdot T = (0) \\ A_{22}\cdot Z = (0) \\ A_{22}\cdot T = I_n \end{cases}.$$

Como A_{11} y A_{22} son matrices regulares existen A_{11}^{-1} y A_{22}^{-1}. Premultiplicando por A_{22}^{-1} en la tercera ecuación se obtiene

$$Z = (0).$$

De la cuarta ecuación se deduce

$$T = A_{22}^{-1}.$$

De la primera se despeja

$$X = A_{11}^{-1}.$$

Y de la segunda se despeja

$$Y = -A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\cdot T = -A_n^{-1}\cdot A_{12}\cdot A_{22}^{-1}.$$

De donde se deduce que

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\cdot A_{22}^{-1} \\ \hline (0) & A_{22}^{-1} \end{array}\right).$$

■

1.25

a) Indicar cuáles de las siguientes igualdades son ciertas $\forall$ A, B $\in E_{nxn}(\mathbb{R})$ y regulares, demostrándolas en caso afirmativo:

1) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

2) $I^{-1} = I$.

3) $(A^{-1})^{-1} = A$.

4) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

b) Basándote en el apartado anterior, indica qué estructura algebraica tiene el conjunto M = $\{A \in E_{nxn}(\mathbb{R}) / A \text{ regular}\}$ respecto a las operaciones suma y producto de matrices.

(Febrero 1998)

Resolución:

a) Por las propiedades de las inversas de las matrices regulares se puede comprobar que:

2) $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$ esta igualdad es cierta.

Por ser A y B regulares, existen sus inversas y existe también la inversa de A·B ($|A\cdot B| = |A|\cdot|B| \neq 0$), que cumple:

$$(A\cdot B)\cdot(A\cdot B)^{-1} = I.$$

Premultiplicando esta igualdad por A^{-1} en primer lugar y por B^{-1} posteriormente se obtiene

$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}\,.$$

3) $I^{-1} = I$ esta igualdad es cierta.

Como I es regular y su determinante es 1, existe I^{-1} y su determinante es 1. Además:

$$I\cdot I^{-1} = I \;\Rightarrow\; I^{-1} = I.$$

4) $(A^{-1})^{-1} = A$ esta igualdad es cierta.

Ya que por ser A regular, existe A^{-1} y como su determinante es el inverso de el determinante de A, es distinto de 0, y por lo tanto existe $(A^{-1})^{-1}$. Y se cumple:

$$(A)^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1} = I.$$

Premultiplicando esta igualdad por A se obtiene

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

5) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ esta igualdad es falsa. Que A y B sean regulares no implica que A + B lo sea.

b) En base a lo visto en el apartado anterior, se puede afirmar que el conjunto $M = \{A \in E_{nxn}(\mathbb{R}) / A \text{ regular}\}$ respecto a la suma de matrices no es ley interna (según 4)) y respecto al producto es ley interna (según 1)), es asociativa (por serlo el producto de matrices), tiene elemento neutro (por 2)) y elemento inverso (por 3)), luego se trata de un grupo multiplicativo).

■

1.26 Siendo A y B dos matrices *cuadradas regulares de orden n*, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $(A+B)^t = B^t + A^t$.

b) $(A^t)^t = A$.

c) $(kA)^t = kA^t$ (siendo k un escalar).

d) $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$.

e) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

(Septiembre 1999)

Resolución:

Teniendo en cuenta las propiedades de la trasposición de matrices se tiene que:

a) $(A+B)^t = B^t + A^t$ es verdadera.

b) $(A^t)^t = A$ es verdadera.

c) $(kA)^t = kA^t$ (siendo k un escalar) es verdadera.

d) $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$ es falsa. Lo que es verdadero es que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

e) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ es verdadera.

■

1.27 Justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si A es una matriz ortogonal su determinante es igual a +1 o –1.

b) Matrices semejantes son también equivalentes.

a) Matrices equivalentes son también semejantes.

c) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es equivalente a toda matriz $A_{3x3.}$

(Septiembre 1999)

Resolución:

a) Si A es una matriz ortogonal su determinante es igual a +1 o –1. Esta es una afirmación verdadera, ya que si A es ortogonal:

$A \cdot A^t = I \Rightarrow det(A \cdot A^t) = det(A)\, det(A^t) = det^2(A) = det(I) = 1 \Rightarrow det(A) = \pm 1.$

b) Matrices semejantes son también equivalentes. Esta es una afirmación verdadera, ya que si A y B son semejantes:

$\exists$ P regular de orden n / $B = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow \exists$ P, Q(=P^{-1}) regulares de orden n / $B = Q \cdot A \cdot P \Rightarrow$ A y B son equivalentes.

c) Matrices equivalentes son también semejantes. Esta afirmación es falsa, como se puede ver con las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que son matrices equivalentes pero no semejantes.

d) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es equivalente a toda matriz A_{3x3}. Esta afirmación es falsa, H no es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de orden 3, ya que tienen diferente rango.

■

1.28 Indicar si son **verdaderas o falsas** las siguientes cuestiones, **justificando** la respuesta en los casos en que se pida.

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, su forma canónica de Hermite es $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Justificar sin realizar cálculos).

b) Un sistema homogéneo puede tener solución única y distinta de la trivial. (En caso de ser falso indicar cuáles pueden ser las soluciones de un sistema homogéneo)

c) El producto de dos matrices regulares puede ser regular o singular. (Demostración de la respuesta).

d) Una matriz simétrica siempre es cuadrada. (Justificar la respuesta).

e) $|A + B| = |A| + |B| \quad \forall\, A, B \in E_{nxn}(\mathbb{R})$.

f) $\left|A^{-1}\right| = |A| \quad \forall\, A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$.

g) $\left|A^{t}\right| = |A| \quad \forall\, A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$.

h) $A \cdot B = B \cdot A \quad \forall\, A, B \in E_{nxn}(\mathbb{R})$.

(Febrero 2000)

Resolución:

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, su forma canónica de Hermite es $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Esta afirmación es falsa, una matriz y su forma canónica son equivalentes (igual rango y dimensión) y éstas dos no lo son.

b) Un sistema homogéneo puede tener solución única y distinta de la trivial.

Esto es falso. Un sistema homogéneo siempre admite por lo menos la solución la trivial, en el caso de admitir sólo una solución (sistema compatible determinado) será la trivial.

c) El producto de dos matrices regulares puede ser regular o singular.

El producto de dos matrices regulares del mismo orden es siempre una matriz regular, ya que

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B),$$

Y si $det(A) \neq 0$ y $det(B) \neq 0$, entonces $det(A) \cdot det(B) \neq 0$.

d) Una matriz simétrica siempre es cuadrada.

Esto es cierto. Para que una matriz pueda ser simétrica, por definición, ha de ser cuadrada.

e) $\left|A + B\right| = |A| + |B| \quad \forall\, A, B \in E_{nxn}(\mathbb{R})$.

Esto es falso. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\left|A + B\right| = 1 \neq |A| + |B| = 0$.

f) $\left|A^{-1}\right| = |A| \quad \forall\, A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$.

Esto es falso, lo que es cierto es que $\left|A^{-1}\right| = 1/|A|$.

g) $\left|A^{t}\right| = |A| \quad \forall\, A \in E_{nxn}(\mathbb{R})$.

Esto es cierto, por las propiedades de los determinantes.

h) $A \cdot B = B \cdot A \quad \forall\, A, B \in E_{nxn}(\mathbb{R})$.

Esta afirmación es falsa, el producto de matrices en general no es conmutativo. Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, entonces $A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, mientras que $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$.

■

2

ESPACIOS VECTORIALES

2.1

a) Estudiar si el conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ definido por:

$$F = \left\{ \mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t \in \mathbb{R}^n / x_i \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,n \right\},$$

es subespacio vectorial.

b) En el espacio vectorial de las funciones reales de variable real se considera el subconjunto $G = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(t) = f(1-t),\ \forall t \in \mathbb{R} \right\}$. Estudiar si G es subespacio vectorial.

(Febrero 1996)

Resolución:

a) Para que F sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ ha de cumplir:

i) $F \neq \emptyset$, lo cumple, ya que $(0\ 0\ \cdots\ 0)^t \in F$

ii) $\forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F \ \Rightarrow\ \mathbf{x}+\mathbf{y} \in F$

Sean $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t$, $\mathbf{y} = (y_1\ y_2\ \cdots\ y_n)^t \in F \quad (\Leftrightarrow x_i, y_i \geq 0$,

$\forall i = 1,2,\cdots,n) \ \Rightarrow\ \mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1 + y_1\ \ x_2 + y_2\ \cdots\ x_n + y_n)^t \in F$,

ya que $x_i + y_i \geq 0 \quad \forall i = 1,2,\cdots,n$

iii) $\forall\ \mathbf{x} \in F,\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \alpha \cdot \mathbf{x} \in F$

Sin embargo, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ \mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^t \in F \quad (\Leftrightarrow x_i \geq 0\ \forall i = 1,2,\cdots,n)$ no se cumple que $\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1\ \alpha x_2\ \cdots\ \alpha x_n)^t \in F$, dado que αx_i puede ser negativo.

Por tanto, F no tiene estructura de subespacio vectorial.

b) Para que G sea subespacio vectorial se ha de cumplir que:

i) $G \neq \emptyset$, se cumple, ya que la función nula pertenece a G.

ii) $\forall\ f, g \in G \ \Rightarrow\ f + g \in G$:

Como $f, g \in G \ \Rightarrow\ f(t) = f(1-t),\ \forall t \in \mathbb{R}$ y $g(t) = g(1-t),\ \forall t \in \mathbb{R}$,

por ello:

$$(f+g)(t) = f(t) + g(t) = f(1-t) + g(1-t) = (f+g)(1-t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

luego $f + g \in G$

iii) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\ f \in G \ \Rightarrow\ \alpha f \in G$:

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in G \ \Rightarrow\ (\alpha f)(t) = \alpha f(t) = \alpha f(1\text{-}t) = (\alpha f)(1\text{-}t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, luego $\alpha f \in G$

Queda comprobado que G tiene estructura de subespacio vectorial.

■

2.2 Hallar las ecuaciones cartesianas, dar una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $U = \left\{ (\alpha + 3\beta - \gamma \quad 2\beta - 2\gamma \quad \alpha + 2\beta)^t / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $V = \left\{ p(x) \in P_3(x) / \int_0^1 p(x)dx = 0 \right\} \subset P_3(x)$.

($P_3(x)$ es el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que tres).

(Febrero 1996)

Resolución:

a) $U = \left\{ \alpha(1\ 0\ 1)^t + \beta(3\ 2\ 2)^t + \gamma(-1\ -2\ 0)^t / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

Se calcula el determinante de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de los vectores generadores de U: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, lo que significa que dichos tres vectores son linealmente dependientes. Sin embargo los vectores $(1\ 0\ 1)^t$, $(-1\ -2\ 0)^t$ son linealmente independientes por lo que forman una base de U:

$$B_U = \left\{ (1\ 0\ 1)^t, (-1\ -2\ 0)^t \right\},$$

lo que indica que la dimensión del subespacio U es 2.

Para obtener la ecuación cartesiana de U basta tener en cuenta que cualquier vector $(x_1\ x_2\ x_3)^t$ del subespacio debe de ser combinación lineal de los vectores de la base, es decir que:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \iff 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0.$$

b) Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in V$. Entonces:

$$\int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx + d)\, dx = \left[a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^3}{3} + c\frac{x^2}{2} + dx \right]_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0,$$

que es la ecuación cartesiana de V.

Por tanto, *dim*(V) = *dim*($P_3(x)$) – nº de ecuaciones = 4 – 1 = 3.

$$V = \left\{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} \right) / \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ p(x) = a\left(x^3 - \frac{1}{4} \right) + b\left(x^2 - \frac{1}{3} \right) + c\left(x - \frac{1}{2} \right) / \; a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

De donde se deduce que el sistema

$$B_V = \left\{ x^3 - \frac{1}{4},\; x^2 - \frac{1}{3},\; x - \frac{1}{2} \right\}$$

constituye una base del subespacio vectorial V.

■

2.3 Sea B una matriz cuadrada de orden 2 definida sobre $\mathbb{R}$, que verifica la ecuación matricial $B^2 - 4B + 3I = (0)$.

a) Obtener para qué matrices B el subespacio vectorial U de las matrices generadas por B e I tiene dimensión 1.

b) Sea S el subespacio vectorial de las matrices simétricas reales de orden dos y V el subespacio vectorial generado por las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I. Obtener las ecuaciones cartesianas del subespacio $V \cap S$.

(Febrero 1996)

Resolución:

a) $dim(U) = 1 \Rightarrow B = \alpha I$

Sustituyendo en la ecuación: $B^2 - 4B + 3I = (0) \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\alpha I)^2 - 4\alpha I + 3I = (0) \Leftrightarrow (\alpha^2 - 4\alpha + 3)\, I = (0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - 4\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1,\; \alpha = 3.$$

Por tanto: $B = 3I$ ó $B = I$.

b) $S = \left\{ A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / \; x_2 = x_3 \right\}$

$$V = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad dim\,(V) = 2 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ número de ecuaciones = n - *dim* (V) = 4 – 2 = 2.

Las ecuaciones cartesianas de V se obtienen teniendo en cuenta que:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\in V \Leftrightarrow \textit{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 3 & 1 & x_4 \end{pmatrix}=2 \ , \ \text{como} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\neq 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{vmatrix}=0 \ , \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 3 & 1 & x_4 \end{vmatrix}=0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_4=0 \end{cases}$$

Una matriz pertenece a $V\bigcap S$ si y sólo si verifica las ecuaciones de ambos subespacios, es decir, las ecuaciones cartesianas de $V\bigcap S$ son

$$\begin{cases} x_2=x_3 \\ x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_1=x_4 \end{cases} .$$

■

2.4 En el espacio vectorial $P_2(x)$ de los polinomios de grado menor o igual que dos, se da el subespacio vectorial generado por:

$$p_1(x) = 1+x \ , \quad p_2(x)=x+x^2 \ , \quad p_3(x)=1-x^2 .$$

a) Hallar la dimensión y una base de dicho subespacio.

b) Calcular las ecuaciones cartesianas y paramétricas respecto de la base usual.

c) Comprobar si el polinomio $q(x)=1+3x+2x^2$ pertenece a dicho subespacio.

(Septiembre 1996)

Resolución:

a) Veamos si los vectores $p_1(x) = 1+x \ , \quad p_2(x)=x+x^2 \ , \quad p_3(x)=1-x^2$ son linealmente independientes:

El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow$ existe alguna combinación lineal entre ellos.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \ \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$

Por tanto, la dimensión del subespacio es 2.

Y el sistema formado por los dos primeros vectores constituye una base del subespacio:

$$\left\{\ 1+x,\ \ 1+x^2\ \right\}.$$

b) Dado un polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$, éste pertenecerá al subespacio dado si y sólo si es combinación lineal de los vectores de la base, es decir, si cumple:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - b + c = 0,$$

que es la ecuación cartesiana del subespacio.

Despejando: $b = a + c$, de donde se obtienen las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = \alpha + \beta \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ c = \beta \end{cases}$$

c) El polinomio $q(x) = 1 + 3x + 2x^2$ pertenecerá al subespacio si y sólo si verifica su ecuación: $b = a + c$. Como $3 = 1 + 2$, se cumple, luego q(x) sí que pertenece al subespacio.

■

2.5 Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$. Sabiendo que

- el vector $\mathbf{x}$ tiene por coordenadas $(a\ b\ c\ d)^t$ en la base $B = \left\{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \right\}$
- el vector $\mathbf{y}$ tiene por coordenadas $(a\ b\ c\ d)^t$ en la base $B' = \left\{ \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4 \right\}$

Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ en la base $B'' = \left\{ \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \right\}$

(Septiembre 1996)

Resolución:

El vector $\mathbf{x} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_4$, y el vector $\mathbf{y} = a\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3 + c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_4$,

por tanto el vector suma:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a+c)\mathbf{e}_1 + (b+a)\mathbf{e}_2 + (c+b)\mathbf{e}_3 + 2d\,\mathbf{e}_4$$

y sus coordenadas respecto de la base B'' son:

$$(2d \quad b+c \quad a+b \quad a+c)^t.$$

■

2.6 Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{ (a\ b\ c)^t / a + b + c = 0 \right\}$$

$$V = \left\{ (a\ b\ c)^t / a = b \right\}$$

$$W = \left\{ (0\ 0\ c)^t \right\}$$

¿Se puede obtener $\mathbb{R}^3$ como suma directa de algunos de los subespacios anteriores? Indicar, razonando, todas las formas posibles.

(Septiembre 1996)

Resolución:

Sean A y B dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = A \oplus B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = \{\mathbf{0}\} \\ \mathbb{R}^3 = A + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dim(A \cap B) = 0 \\ dim(A + B) = 3 = dim(A) + dim(B) \end{cases}.$$

Se tiene que $dim(U) = 2$, $dim(V) = 2$, $dim(W) = 1$

- $dim(U) + dim(V) = 4 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ no es suma directa de U y V.
- $dim(U) + dim(W) = 3$. Hay que estudiar si $dim(U \cap W) = 0$:

$$U \cap W = \left\{ (a\ b\ c)^t / a + b + c = 0, a = b = 0 \right\} = \left\{ (0\,0\,0)^t \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dim\,(U \cap W) = 0 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = U \oplus W$$

- $dim(V) + dim(W) = 3$. Falta estudiar si $dim(V \cap W) = 0$:

$$V \cap W = \left\{ (a\ b\ c)^t / a = b, a = 0, b = 0 \right\} = \left\{ (0\ 0\ c)^t / c \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dim(V \cap W) = 1 \Rightarrow \mathbb{R}^3 \neq V \oplus W\ .$$

Luego sólo se puede obtener $\mathbb{R}^3$ como suma directa de U y W.

■

2.7

a) ¿Es $\mathbb{R}^+ = \left\{ a \in \mathbb{R} / a \geq 0 \right\}$ subespacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

b) ¿Es $\mathbb{R} - \{0\}$ subespacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? Demuéstrelo.

(Febrero 1997)

Resolución:

a) $\mathbb{R}^+$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}$, ya que no se verifica la estabilidad para el producto de elementos de $\mathbb{R}^+$ por escalares de $\mathbb{R}$:

$\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \;\wedge\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ no se cumple que $\alpha \cdot a \in \mathbb{R}^+$ puesto que α puede tomar valores negativos.

b) $\mathbb{R} - \{0\}$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}$, ya que no contiene al vector nulo de $\mathbb{R}$. Además tampoco verifica la estabilidad para la suma de elementos de $\mathbb{R} - \{0\}$, ni la estabilidad para el producto de elementos de $\mathbb{R} - \{0\}$ por escalares de $\mathbb{R}$.

■

2.8 Sea E un espacio vectorial real, y en él se consideran las bases:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad , \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad , \quad B_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \quad ,$$

donde los vectores de B_2 están referidos a B_1 y los vectores de B_3 están referidos a B_2. Se consideran los vectores **x**, **y**, **z** de coordenadas:

$$C_{B_1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad C_{B_2}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad C_{B_3}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} .$$

Demostrar que **x**, **y**, **z** son linealmente independientes.

(Febrero 1997)

Resolución:

Llamando : $B_1 = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \}$, $B_2 = \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \}$, $B_3 = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \}$ y refiriendo los vectores **x**, **y**, **z** a la base B_1 :

$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$

$\mathbf{y} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$

$\mathbf{z} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3) + \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_2$

De donde:

$\alpha\, \mathbf{x} + \beta\, \mathbf{y} + \gamma\, \mathbf{z} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \alpha\, (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \beta\, (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \gamma\, \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (\alpha + \beta)\,\mathbf{e}_1 + (\alpha + \beta + \gamma)\,\mathbf{e}_2 + \beta\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$;

teniendo en cuenta que B_1 es una base, tiene que cumplirse:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \,.$$

Por tanto, los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ son linealmente independientes.

Otra forma: Utilizando los vectores coordenados, referidos a la base B_1

$$C_{B_1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_{B_2}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \Rightarrow C_{B_1}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_{B_3}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3) + \mathbf{u}_2 \Rightarrow C_{B_1}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$, los vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ del espacio vectorial real E son linealmente independientes.

■

2.9 Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y en él se consideran los subespacios:

$$U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta - \gamma \\ \beta - \gamma \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} / \; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Hallar bases y dimensiones de U y V.

b) Hallar las ecuaciones cartesianas y paramétricas de U.

c) Hallar una base y la dimensión de $U \bigcap V$ y de U + V.

d) ¿Son U y V subespacios suplementarios? Razone la respuesta.

(Febrero 1997)

Resolución:

a) $dim(\mathrm{U}) = rango \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ El conjunto $\mathrm{B_U} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ constituye una base del subespacio U.

Por otro lado, $\mathrm{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta - \gamma \\ \beta - \gamma \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} / \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$,

es decir, $\mathrm{V} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow dim(\mathrm{V}) = rango \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \ \wedge \ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{B_V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

b) El vector $(\mathrm{x_1} \ \mathrm{x_2} \ \mathrm{x_3})^{\mathrm{t}}$ es un vector genérico de U $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad rango \begin{pmatrix} 0 & 4 & \mathrm{x_1} \\ 1 & 1 & \mathrm{x_2} \\ 1 & -1 & \mathrm{x_3} \end{pmatrix} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & \mathrm{x_1} \\ 1 & 1 & \mathrm{x_2} \\ 1 & -1 & \mathrm{x_3} \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{x_1} - 2\,\mathrm{x_2} + 2\,\mathrm{x_3} = 0,$$

que es la ecuación cartesiana de U, y las ecuaciones paramétricas serán:

$$\begin{cases} \mathrm{x_1} = 2(\lambda - \mu) \\ \mathrm{x_2} = \lambda \\ \mathrm{x_3} = \mu \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c) Teniendo en cuenta que $\mathrm{B_U} \cup \mathrm{B_V}$ es sistema generador de U+V $\Rightarrow$

$$\Rightarrow dim(\mathrm{U+V}) = rango \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \mathrm{U+V} = \mathbb{R}^3.$$

Como base de U+V podemos tomar cualquier base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la canónica :

$$B_{U+V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Teniendo en cuenta que:

$dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V) - dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1$

La ecuación cartesiana de V:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0 .$$

Entonces: $U \cap V = \left\{ \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t \in \mathbb{R}^3 / \ \mathbf{x} \in U, \ \mathbf{x} \in V \right\}$ tiene por ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

de donde:

$$x_1 = 4x_3 \ , \quad x_2 = 3x_3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad U \cap V = \left\{ \mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t = (4\lambda \ \ 3\lambda \ \ \lambda)^t = \lambda (4 \ 3 \ 1)^t \in \mathbb{R}^3 / \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

y una base es $B_{U \cap V} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

d) Los subespacios U y V no son suplementarios, puesto que $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$.

■

2.10 Dado el espacio vectorial $E_{2x2}(\mathbb{R})$, se definen los subespacios U y V de las matrices simétricas y las matrices triangulares superiores respectivamente:

a) Calcular la dimensión y una base de los subespacios U y V, así como las ecuaciones cartesianas y paramétricas de cada subespacio.

b) Calcular la base y dimensión de los subespacios $U \cap V$ y U+V.

(Septiembre 1997)

Resolución:

a) $U = \left\{ A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / A = A^t \right\}$

$A \in U \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad = \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b - c = 0$, ecuación cartesiana de U.

Las ecuaciones paramétricas de U son : $\begin{cases} a = \lambda \\ b = \mu \\ c = \mu \\ d = \gamma \end{cases}$, $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$

$$A \in U \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una base de U es el conjunto

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \textit{dim} \text{ (U) = 3,}$$

dado que las tres matrices forman sistema generador libre de U.

Por otro lado,

$$V = \{ A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / A \text{ triangular superior} \} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ c = 0 \right\}$$

es decir,

$c = 0$ es la ecuación cartesiana de V.

Las ecuaciones paramétricas de V son: $\begin{cases} a = \lambda \\ b = \mu \\ c = 0 \\ d = \gamma \end{cases}$, $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R}$

Entonces $A \in V \quad \Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Una base de V es

$$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \textit{dim} \text{ (V) = 3,}$$

dado que las tres matrices forman sistema generador libre de V.

b) $U \cap V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \ b = c, \ c = 0 \right\} =$

$$= \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} / \ a, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Luego una base de $U \cap V$ es:

$$B_{U\cap V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } dim\,(U \cap V) = 2.$$

Teniendo en cuenta que:

$dim\,(U + V) = dim\,(U) + dim\,(V) - dim\,(U \cap V) = 3 + 3 - 2 = 4 \;\wedge$

$\wedge \;\; U+V \subset E_{2x2}(\mathbb{R}) \;\; \Rightarrow \;\; U+V = E_{2x2}(\mathbb{R})$

y, por tanto, una base de U+V es cualquier base de $E_{2x2}(\mathbb{R})$, por ejemplo la base canónica

$$B_{U+V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

■

2.11

a) Estudiar si el conjunto S de matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$.

b) Hallar una base y las ecuaciones cartesianas de S.

(Febrero 1998)

Resolución:

a)

i) La matriz nula pertenece a S, pues $A\cdot(0) = (0) = (0)\cdot A$

ii) $\forall B, C \in S \;\; \Rightarrow \;\; A\cdot B = B\cdot A \;\wedge\; A\cdot C = C\cdot A \;\Rightarrow\; A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C =$

$= B\cdot A + C\cdot A = (B+C)\cdot A \;\Rightarrow\; B + C \in S.$

iii) $\forall B \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; A\cdot B = B\cdot A \;\Rightarrow\; A\cdot(\alpha B) = \alpha(A\cdot B) = \alpha(B\cdot A) =$

$= (\alpha B)\cdot A \;\Rightarrow \alpha B \in S.$

Por tanto, S es un subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$.

b) $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in S \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \;\; \begin{pmatrix} z & t \\ 2z & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x+2y \\ 0 & z+2t \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} z = 0 \\ t = x + 2y \end{cases}.$$

Entonces, las ecuaciones cartesianas de S son:

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + 2y - t = 0 \end{cases}.$$

Y el subespacio vectorial:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x+2y \end{pmatrix} / \, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} / \, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Luego una base de S es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

■

2.12 Dado el subespacio vectorial de $E_{2x2}(\mathbb{R})$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+c \end{pmatrix} / \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$,

a) hallar la dimensión y una base de V.

b) calcular la intersección y suma de V con el subespacio de las matrices simétricas de orden 2, dando una base y la dimensión de dichos subespacios.

(Febrero 1998)

Resolución:

a) $V = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$

Una base de V es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, y *dim*(V) = 3 (las tres matrices son linealmente independientes, pues *rango* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ = 3).

b) El subespacio de las matrices simétricas:

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / \, a, b, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base de U es el conjunto

$$B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} , \quad y \quad dim(U) = 3.$$

El subespacio intersección:

$$U \bigcap V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix} / \; a,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \; a,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una base de $U \bigcap V$ es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $dim(U \bigcap V) = 2.$

Se cumple que

$$dim\,(U+V) = dim\,(U) + dim\,(V) - dim\,(U \bigcap V) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dim\,(U+V) = 3 + 3 - 2 = 4 \;\Rightarrow\; U + V = E_{2x2}(\mathbb{R}),$$

y por ejemplo una base de $U + V$ es la base canónica de $E_{2x2}(\mathbb{R})$:

$$B_{U+V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

■

2.13 Sea $P_3(x)$ el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que tres.

Dados los siguientes subespacios vectoriales de $P_3(x)$:

$$F_1 = \{\, p(x) \in P_3(x) / \, p(0) = 0 \,\}$$
$$F_2 = \{\, p(x) \in P_3(x) / \, p(1) = 0 \,\}$$
$$F_3 = \{\, p(x) \in P_3(x) / \, p(-1) = 0 \,\}$$

Obtener ecuaciones cartesianas y paramétricas de F_1, F_2, F_3 y una base de $F_1 \bigcap F_2 \bigcap F_3$.

(Febrero 1998)

Resolución:

Sea $p(x) \in P_3(x) \quad \Rightarrow \quad p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) $p(x) \in F_1 \quad \Leftrightarrow \quad p(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 0$, que es la ecuación cartesiana de F_1,

y las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \gamma \\ d = 0 \end{cases}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

b) $p(x) \in F_2 \Leftrightarrow p(1) = 0 \Leftrightarrow a + b + c + d = 0$, que es la ecuación cartesiana de F_2, y las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \gamma \\ d = -\alpha - \beta - \gamma \end{cases}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

c) $p(x) \in F_3 \Leftrightarrow p(-1) = 0 \Leftrightarrow -a + b - c + d = 0$, que es la ecuación cartesiana de F_3, y las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \gamma \\ d = \alpha - \beta + \gamma \end{cases}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

d) $F_1 \cap F_2 \cap F_3 = \{ p(x) \in P_3(x) / \; d = 0,\; a + b + c + d = 0,\; -a + b - c + d = 0 \} =$

$= \{ \; p(x) \in P_3(x) / \; b = 0,\; c = -a,\; d = 0 \; \} =$

$= \{ \; p(x) = ax^3 - ax = a\,(x^3 - x) \in P_3(x) / \; a \in \mathbb{R} \; \}$

Luego una base de $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ es $\{ x^3 - x \}$ y su dimensión es igual a 1.

Notar que la dimensión también puede obtenerse como:

dim$(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$ = *dim*$(P_3(x))$ – número de ecuaciones = 4 – 3 = 1.

■

2.14 En el espacio vectorial real P_2, de los polinomios de grado menor o igual que dos, se da la familia de vectores:

$$\mathbf{u}_1 = t^2 + t + 1 \;,\quad \mathbf{u}_2 = 2t + 1 \;,\quad \mathbf{u}_3 = t^2 - 3t + 1 \;,\quad \mathbf{u}_4 = 2t^2 + 1 \,.$$

a) Expresar, si es posible, $\mathbf{u}_3$ y $\mathbf{u}_4$ como combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

b) Hallar la dimensión del subespacio generado por el sistema $\{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \}$ calculando las ecuaciones y una base B_1 de dicho subespacio.

c) Sea el conjunto de vectores

$$\mathbf{v}_1 = 4t^2 - 8t + 4 \;,\quad \mathbf{v}_2 = 3t^2 + 5t + 6 \;,\quad \mathbf{v}_3 = 2t^2 - 6t + 2$$

Comprobar si $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de P_2 y, en caso de que lo sea, expresar las componentes del vector $\mathbf{w} = 2t^2 + 1$ referidas a la base B_2.

(Septiembre 1998)

Resolución:

a) $\mathbf{u}_3 = \alpha\,\mathbf{u}_1 + \beta\,\mathbf{u}_2 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 3t + 1 = \alpha\,(t^2 + t + 1) + \beta(2t + 1) \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + 2\beta = -3 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases},$$

como este sistema es incompatible, $\mathbf{u}_3$ no puede expresarse como combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

$\mathbf{u}_4 = \alpha\,\mathbf{u}_1 + \beta\,\mathbf{u}_2 \;\Leftrightarrow\; 2t^2 + 1 = \alpha\,(t^2 + t + 1) + \beta(2t + 1) \;\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 2,\ \beta = -1,$$

luego $\mathbf{u}_4 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$.

b) Sea U el subespacio generado por $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$.

La matriz cuyas columnas son las coordenadas de los cuatro vectores tiene rango tres, ya que el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Es decir, $dim(U) = 3$ y una base de U es:

$$B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\},$$

A la misma conclusión se llega teniendo en cuenta que según el apartado *a)* los vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ son linealmente independientes, mientras que $\mathbf{u}_4$ depende linealmente de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

Como $dim(U) = dim(P_2) \;\wedge\; U \subset P_2 \;\Rightarrow\; U = P_2$.

Así que U carece de ecuaciones cartesianas, y sus ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} a = \lambda \\ b = \mu \\ c = \nu \end{cases}, \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

c) El determinante $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -8 & 5 & -6 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente independientes, luego $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base de P_2.

$\mathbf{w} = \alpha\,\mathbf{v}_1 + \beta\,\mathbf{v}_2 + \gamma\,\mathbf{v}_3 \;\Leftrightarrow\; 2t^2 + 1 = \alpha\,(4t^2 - 8t + 4) +$

$+\ \beta(3t^2+5t+6)\ +\ \gamma\,(2t^2-6t+2)\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases}4\alpha+3\beta+2\gamma=2\\-8\alpha+5\beta-6\gamma=0\\4\alpha+6\beta+2\gamma=1\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \alpha=\frac{8}{3},\ \beta=-\frac{1}{3},\ \gamma=-\frac{23}{6}.$$

El vector coordenado de **w** en la base B_2 es:

$$\left(\frac{8}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \ -\frac{23}{6}\right)^t.$$

■

2.15 Sea E el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden dos. Se consideran los siguientes subconjuntos de E:

$$U=\{A\in E/\ \textit{traza}(A)=0\wedge A\ \text{simétrica}\}$$

$$V=\{A\in E/\ A\ \text{escalar}\}.$$

a) Demostrar que U y V son subespacios vectoriales de E.

b) ¿Son U y V subespacios disjuntos?

c) ¿Son U y V subespacios suplementarios? Razona la respuesta.

(Febrero 1999)

Resolución:

a)

i) ¿U subespacio vectorial de E?:

- $(0)\in E$, pues es simétrica y su traza vale 0.

- $\forall A,B\in U\Leftrightarrow\begin{cases}tr(A)=tr(B)=0\\A=A^t,\ B=B^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}tr(A+B)=tr(A)+tr(B)=0\\(A+B)^t=A^t+B^t=A+B\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow\quad A+B\in U.$

- $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall A\in U\Leftrightarrow\begin{cases}tr(A)=0\\A=A^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}tr(\lambda A)=\lambda\cdot tr(A)=0\\(\lambda A)^t=\lambda\cdot A^t=\lambda A\end{cases}\Rightarrow\ \lambda A\in U.$

Luego U es subespacio vectorial de E.

ii) $¿V=\left\{A=aI=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}/\ a\in\mathbb{R}\right\}$ subespacio vectorial de E?:

- La matriz nula : $(0)=0\cdot I\in V$.

- $\forall A(=aI),\ B(=bI)\in V\Rightarrow A+B=(a+b)I\in V.$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A(=a\,I) \in V \Rightarrow \lambda A = (\lambda a)\,I \in V$.

Luego V es subespacio vectorial de E

Se tiene que:

$$U = \left\{ A \in E \,/\, \textit{traza}(A) = 0 \wedge A \text{ simétrica} \right\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \; a + d = 0,\ b = c \right\},$$

$$U = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} / \; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por otro lado:

$$V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \; a = d,\ b = c = 0 \right\}.$$

b) U y V subespacios disjuntos $\Leftrightarrow$ $U \bigcap V = \{(0)\}$:

$$U \bigcap V = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / \; a + d = 0,\ b = c,\ a = d,\ b = c = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Luego son disjuntos.

c) U y V son suplementarios $\Leftrightarrow$ U+V = E, dado que son disjuntos.

$\textit{dim}(U+V) = \textit{dim}(U) + \textit{dim}(V) - \textit{dim}(U \bigcap V) = 2 + 1 - 0 = 3 \neq \textit{dim}(E) = 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \qquad U+V \neq E.$$

Por tanto, U y V no son suplementarios.

■

2.16 Estudiar la relación existente entre los parámetros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ para que los polinomios p(t) pertenezcan simultáneamente a los subespacios F y G de P_3:

$$p(t) = \alpha + (\alpha + \beta)t + (\alpha + \beta + \gamma)\,t^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\,t^3$$

$$F = \left\{ q(t) = (a+b) + (a-b)t + (a+b)\,t^2 + (a-b)\,t^3 / \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ r(t) = c + d\,t + e\,t^2 + f\,t^3 / \;\; c + d + e + f = 0 \right\}$$

(Septiembre 1999)

Resolución:

$$p(t) \in F \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \alpha = a + b \\ \alpha + \beta = a - b \\ \alpha + \beta + \gamma = a + b \\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = a - b \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \gamma = -\beta \\ \delta = \beta \end{cases}.$$

$$p(t) \in G \Leftrightarrow \alpha + (\alpha+\beta) + (\alpha+\beta+\gamma) + (\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta = 0.$$

$$p(t) \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\beta \\ \delta = \beta \\ 4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -2\alpha \\ \gamma = 2\alpha \\ \delta = -2\alpha \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R},$$

y entonces:

$$p(t) = \alpha + (\alpha+\beta)t + (\alpha+\beta+\gamma)t^2 + (\alpha+\beta+\gamma+\delta)t^3 =$$

$$= \alpha - \alpha t + \alpha t^2 - \alpha t^3 = \alpha(1 - t + t^2 - t^3), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

■

2.17 Añadir vectores de $\mathbb{R}^4$ a S hasta formar una base del subespacio vectorial U de $\mathbb{R}^4$:

$U = \left\{ \mathbf{x} = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)^t \,/\, x_1 - x_2 = x_3 + x_4 \right\}$

$S = \left\{ (3\ 1\ 1\ 1)^t,\ (3\ 0\ 2\ 1)^t \right\}$.

(Septiembre 1999)

Resolución:

Sean los vectores $\mathbf{u}_1 = (3\ 1\ 1\ 1)^t$, $\mathbf{u}_2 = (3\ 0\ 2\ 1)^t$, ambos pertenecen al subespacio U, pues cumplen su ecuación: 3-1=1+1, 3-1=0+2.

Como *dim*(U) = *dim*($\mathbb{R}^4$) - número de ecuaciones = 4 – 1 = 3, se necesita un tercer vector de U que sea linealmente independiente con $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ para formar una base de U.

$\mathbf{u}_3 = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)^t \in U \Leftrightarrow \mathbf{u}_3 = (x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_1 - x_2 - x_3)^t$,

además tiene que cumplirse que $\mathbf{u}_3$ sea linealmente independiente con $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ por lo que

$$rango \begin{pmatrix} 3 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \\ 1 & 1 & x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Si por ejemplo $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, se cumple que $rango \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$.

Por tanto, el conjunto $\left\{ \mathbf{u}_1 = (3\ 1\ 1\ 1)^t, \mathbf{u}_2 = (3\ 0\ 2\ 1)^t, \mathbf{u}_3 = (1\ 0\ 0\ 1)^t \right\}$ constituye una base de U.

■

2.18 Considérense las siguientes bases de $\mathbb{R}^2$:

$$S_1 = \left\{ \mathbf{u}_1 = (1\ 0)^t, \mathbf{u}_2 = (0\ 1)^t \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \mathbf{v}_1 = (1\ 2)^t, \mathbf{v}_2 = (3\ 4)^t \right\}$$

a) Hallar la matriz P de cambio de base de S_1 a S_2.

b) Determinar la matriz Q de cambio de base de S_2 a S_1.

c) Hallar la relación que existe entre las matrices P y Q obtenidas.

(Febrero 2000)

Resolución:

a) La matriz P de cambio de base de S_1 a S_2 tiene por columnas las coordenadas de los vectores de S_2 referidas a la base S_1 (base usual):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) La matriz Q de cambio de base de S_2 a S_1 tiene por columnas las coordenadas de los vectores de S_1 referidas a la base S_2:

$$\mathbf{u}_1 = \alpha\ \mathbf{v}_1 + \beta\ \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow (1\ 0)^t = \alpha (1\ 2)^t + \beta (3\ 4)^t \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{u}_2 = \gamma\ \mathbf{v}_1 + \delta\ \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow (0\ 1)^t = \gamma (1\ 2)^t + \delta (3\ 4)^t \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma + 3\delta = 0 \\ 2\gamma + 4\delta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 3/2 \\ \delta = -1/2 \end{cases}$$

Por tanto

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Según se ha visto:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \alpha\ \mathbf{v}_1 + \beta\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_2 = \gamma\ \mathbf{v}_1 + \delta\ \mathbf{v}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = \left(Q^t\right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, se cumple que $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$.

Luego $P^t = \left(Q^t\right)^{-1} \Leftrightarrow P^t = \left(Q^{-1}\right)^t \Leftrightarrow P = Q^{-1}$ ó $Q = P^{-1}$. Es decir, la matriz de paso de S_1 a S_2 es la matriz inversa de la matriz de paso de S_2 a S_1 y viceversa.

■

2.19 Dados los vectores $\mathbf{e}_1 = (1\ 1\ 0\ \lambda)^t$, $\mathbf{e}_2 = (3\ -1\ \mu\ -1)^t$, $\mathbf{e}_3 = (-3\ 5\ \lambda\ -4)^t$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

Determinar los valores de los parámetros λ y μ para que dichos vectores sean linealmente dependientes. Obtener la relación de dependencia.

(Febrero 2000)

Resolución:

Los tres vectores son linealmente dependientes cuando la matriz formada en sus columnas por las coordenadas de los vectores tiene rango menor que tres:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & \mu & \lambda \\ \lambda & -1 & -4 \end{pmatrix} < 3 :$$

El menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, por tanto los menores de orden tres que lo contienen han de ser nulos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & \mu & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ \lambda & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Es decir, ha de cumplirse el sistema:

$$\begin{cases} -4\lambda - 8\mu = 0 \\ 12\lambda + 24 = 0 \end{cases},$$

que tiene por solución:

$$\lambda = 2 \quad \text{y} \quad \mu = 1.$$

Luego los vectores son:

$$\mathbf{e}_1 = (1\ 1\ 0\ -2)^t,\ \mathbf{e}_2 = (3\ -1\ 1\ -1)^t,\ \mathbf{e}_3 = (-3\ 5\ -2\ -4)^t .$$

La relación de dependencia entre los vectores es:

$$\alpha\ (1\ 1\ 0\ -2)^t + \beta\,(3\ -1\ 1\ -1)^t + \gamma\,(-3\ 5\ -2\ -4)^t = (0\ 0\ 0\ 0)^t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha + 3\beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \\ -2\alpha - \beta - 4\gamma = 0 \end{cases}$$

El rango de la matriz de coeficientes es dos y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, se considera el sistema equivalente:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = 2\gamma \end{cases}.$$

Haciendo $\gamma = -1 \Rightarrow \alpha = 3, \beta = -2$, se cumple:

$$3\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

■

2.20 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ referido a la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ se dan los vectores: $\mathbf{u}_1 = (1\ 1\ 0)^t$, $\mathbf{u}_2 = (1\ 1\ 1)^t$, $\mathbf{u}_3 = (2\ 2\ 2)^t$. Se pide:

- Determinar la ecuación, una base y la dimensión del subespacio S_1 que generan.
- Sea S_2 el subespacio de ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Determinar una base de S_2.
- Hallar una base y ecuaciones del subespacio $S_1 \cap S_2$.
- Hallar una base y ecuaciones de $S_1 + S_2$.

(Febrero 2000)

Resolución:

- S_1: se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ que tiene por columnas las coordenadas de los vectores que generan S_1.

  Se observa que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y que $det(A) = 0$, por lo que,

$$dim(S_1) = rango(A) = 2 \quad \text{y} \quad B_{S_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como $dim(S_1) = dim(\mathbb{R}^3)$ – nº de ecuaciones , nº de ecuaciones de $S_1 = 1$:

El vector $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^t \in S_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$, que es la ecuación cartesiana de S_1.

- S_2: $dim(S_2) = dim(\mathbb{R}^3)$ – nº de ecuaciones $= 3 - 1 = 2$.

  Se cumple que: $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^t \in S_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad B_{S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Ecuaciones de $S_1 \cap S_2$: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

  Entonces:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \ x_1 \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{y} \quad B_{S_1 \cap S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- $dim(S_1 + S_2) = dim(S_1) + dim(S_2) - dim(S_1 \cap S_2) = 2 + 2 - 1 = 3$,

  es decir,

$$dim(S_1 + S_2) = dim(\mathbb{R}^3) \ \Rightarrow \ S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3,$$

  por tanto, $S_1 + S_2$ carece de ecuaciones y sus bases son todas las de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, la base canónica:

$$B_{S_1 + S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

■

2.21 En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ se dan los vectores: $\mathbf{v}_1 = (1\ 1\ 0)^t$, $\mathbf{v}_2 = (1\ 1\ 1)^t$, $\mathbf{v}_3 = (1\ 1\ 3)^t$, cuyas coordenadas están referidas a la base B:

$$B = \left\{ (1\ 1\ 1)^t,\ (1\ 2\ 1)^t, (0\ 0\ 1)^t \right\}$$

a) Sea S_1 el subespacio generado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Obtener una base y dimensión de S_1 así como sus ecuaciones en la base B.

b) Sea S_2 el subespacio de $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación en la base B es: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Determinar una base de S_2.

c) Base y ecuaciones cartesianas (en la base B) de $S_1 \cap S_2$.

d) Base y ecuaciones cartesianas (en la base B) de $S_1 + S_2$. Indicar si $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

(Septiembre 2000)

Resolución:

a) El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es dos , luego

$$dim(S_1) = 2 \quad \text{y} \quad B_{S_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de S_1, dado que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes.

Ecuación cartesiana de S_1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

b) La ecuación de S_2 es $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, por tanto

$$dim(S_2) = dim(\mathbb{R}^3) - \text{nº de ecuaciones} = 3 - 1 = 2.$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1 + x_3 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego una base de S_2 es:

$$B_{S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Las ecuaciones de $S_1 \cap S_2$ son:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Entonces:

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \, x_1 \in \mathbb{R} \right\},$$

y una base:

$$B_{S_1 \cap S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

d) $dim(S_1 + S_2) = dim(S_1) + dim(S_2) - dim(S_1 \cap S_2) = 2 + 2 - 1 = 3$,

es decir,

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3,$$

por tanto carece de ecuaciones y sus bases son las de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, la base canónica:

$$B_{S_1+S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Sin embargo, $\mathbb{R}^3$ no es suma directa de S_1 y S_2, $\mathbb{R}^3 \neq S_1 \oplus S_2$, pues el subespacio intersección: $S_1 \cap S_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

■

2.22 Comprobar si el subespacio S = Span $\{ \mathbf{s}_1 = (-2\ 1\ 0)^t, \mathbf{s}_2 = (-3\ 0\ 1)^t \}$ coincide con el subespacio V = Span $\{ \mathbf{v}_1 = (-1\ -1\ 1)^t, \mathbf{v}_2 = (1\ 1\ -1)^t, \mathbf{v}_3 = (-1\ 2\ 1)^t \}$

(Septiembre 2000)

Resolución:

Para que S y V sean subespacios iguales han de tener la misma dimensión.

La $dim(\mathrm{S}) = 2$, siendo $\{ \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 \}$ una base de S.

Por otro lado, $dim(\mathrm{V}) = rango \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2,$

puesto que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Una base de V es:

$$\mathrm{B_V} = \left\{ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ambos subespacios tienen la misma dimensión. Serán iguales si $\mathrm{S} \subset \mathrm{V}$ y $\mathrm{V} \subset \mathrm{S}$, o lo que es lo mismo si los vectores de la base de S son combinación lineal de los vectores de la base de V y viceversa.

Sin embargo:

$$rango \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

De donde se deduce que $\mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2$ no son combinación lineal de $\mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3$.

Por tanto, los subespacios S y V son distintos.

■

2.23

a) Si $B = \{ \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \cdots, \mathbf{e}_n \}$ es una base de un espacio vectorial E definido sobre $\mathbb{K}$, ¿de cuántas formas posibles se puede expresar todo vector $\mathbf{x} \in E$ respecto de la base B? **Demuéstrese**.

b) Si un vector $\mathbf{z} \in F \oplus G$, siendo F y G subespacios vectoriales de un espacio vectorial E, definido sobre $\mathbb{K}$, de dimensión finita, ¿de cuántas formas se puede descomponer **z** como suma de un vector de F y otro de G? **Demuéstrese**.

(Febrero 1996)

3

APLICACIONES LINEALES

3.1 Dada la aplicación lineal $T : \mathbb{P}_2(x) \rightarrow \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ / $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(1) \\ p'(1) & p(0) \end{pmatrix}$, siendo $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que dos, y $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden dos sobre $\mathbb{R}$. Se pide:

a) Matriz de la aplicación T.

b) Ecuaciones cartesianas y una base del Núcleo de T.

c) Ecuaciones cartesianas y una base del subespacio Imagen de T.

d) ¿Son suplementarios los subespacios Núcleo e Imagen de T?. Razona la respuesta.

(Febrero 1996)

Resolución:

a) Se consideran las bases usuales de $\mathbb{P}_2(x)$ y $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$, y en ellas se calcula la matriz de la aplicación.

Base de $\mathbb{P}_2(x) = B_1 = \{ \mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2} \}$.

Base de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) = B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Las columnas de la matriz A de la aplicación son:

$$T(\mathbf{1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Coordenadas de } T(\mathbf{1}) \text{ en la base } B_1 \text{ de } \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Coordenadas de } T(\mathbf{x}) \text{ en la base } B_1 \text{ de } \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$T(\mathbf{x^2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Coordenadas de } T(\mathbf{x^2}) \text{ en la base } B_1 \text{ de } \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde la matriz de la aplicación resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $\text{Ker T} = \left\{ p(x) \in P_2(x) / T(p(x)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}\right\} \text{ Ecuaciones cartesianas del núcleo.}$$

$$\text{Ker T} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} / x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

En la base de $\mathbb{P}_2(x) = \{ \mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x^2} \}$, una posible base del núcleo es:

$$\text{Base del Ker T} = \{ -2\mathbf{x} + \mathbf{x^2} \}.$$

c) *dim* (Im T) = *rango* (A) = 2, ya que las columnas segunda y tercera de la matriz A son proporcionales. Entonces, una posible base de Im T es por ejemplo:

$$\text{Base de Im T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

A continuación se obtienen las ecuaciones del subespacio Imagen. Para ello se ha de verificar que:

$$\textit{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \\ 1 & 0 & y_4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_2 - y_3 = 0 \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 1 & 0 & y_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1 - y_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Ecuaciones cartesianas del subespacio Imagen de T.

d) El núcleo y la imagen de esta aplicación no son suplementarios, ya que son subespacios vectoriales de distintos espacios vectoriales, así Ker $T \subset \mathbb{P}_2(x)$ e Im $T \subset \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$.

■

3.2 Dada la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ que en las bases canónicas viene dada por la expresión $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar la matriz A de f en estas bases.

b) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razonar la respuesta.

c) Si las coordenadas de un vector **x** respecto de la base:

$$B' = \left\{ \mathbf{e_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_3}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_4}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ son } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ hallar su}$$

transformado, es decir $f(\mathbf{x})$.

d) Ecuaciones y base de los subespacios Núcleo e Imagen de f.

(Septiembre 1996)

Resolución:

a) De la expresión dada de la aplicación lineal se tiene que:

$$f(\mathbf{x}) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = A \cdot \mathbf{x}$$

de donde la matriz de la aplicación lineal resulta ser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) f inyectiva $\Leftrightarrow$ Ker $f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \} = \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \}$.

Pero $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker} f \Rightarrow \text{Ker} f \neq \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \} \Rightarrow f$ no inyectiva.

f sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{Im} f \equiv \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$ *dim* (Im f) = *rango* (A) = $3 \Rightarrow f$ sobreyectiva.

c) Como en la base B′ las coordenadas del vector **x** son $\begin{pmatrix}2\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, se tiene que:

$\mathbf{x} = 2\mathbf{e_1}' + 2\mathbf{e_2}' + \mathbf{e_3}' + \mathbf{e_4}' = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\\1\end{pmatrix}$, en la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

De donde su transformado en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es $f(\mathbf{x}) = \mathrm{A}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$.

d) $\mathrm{Ker}\, f = \{\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\ \} \Rightarrow \mathrm{A}\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Luego, $\mathrm{B}_{\mathrm{Ker}\, f} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Como $\mathrm{Im}\, f \equiv \mathbb{R}^3$, el subespacio imagen de la aplicación no tiene ecuaciones cartesianas. Una base cualquiera de $\mathrm{Im}\, f$ sería una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo la usual:

$$\mathrm{B}_{\mathrm{Im}\, f} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

■

3.3 Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathrm{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ una aplicación lineal de la que se sabe que:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&0\\2&1\end{pmatrix}$$

a) Hallar la expresión matricial de la aplicación en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathrm{E}_{2x2}(\mathbb{R})$.

b) Hallar una base de Ker f y de Im f.

c) Naturaleza de la transformación.

d) Hallar, si es posible, dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 / f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

e) Hallar, si es posible, un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(Febrero 1997)

Resolución:

a) Sean las bases canónicas de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ y de $\mathbb{R}^3$ las siguientes:

Base de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Base de $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{ \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3} \}$.

La expresión matricial de esta aplicación lineal es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

siendo la matriz A de la aplicación la que tiene por columnas las coordenadas de los vectores $f(\mathbf{e_1})$, $f(\mathbf{e_2})$ y $f(\mathbf{e_3})$ referidos a la base canónica de $E_{2x2}(\mathbb{R})$, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Ker $f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^4} \} = \{ \mathbf{x} / A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \}$, luego:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = -x_3$$

$$\text{Ker } f = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} / x_1 \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow B_{\text{Ker } f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

dim (Im *f*) = *rango* (A) = 2, ya que la tercera columna de A es la suma de las dos primeras. Entonces, una posible base de Im f es por ejemplo:

$$B_{\text{Im } f} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) $\text{Ker } f \neq \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \} \Rightarrow f$ no inyectiva.

Im $f \neq E_{2x2}(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ no sobreyectiva.

f no es endomorfismo, ya que los espacios inicial y final son distintos.

Por tanto, se trata de un homomorfismo.

d) Empleando la expresión matricial obtenida en el apartado a) se tiene:

$$A\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = x_1 - 2 \\ x_3 = -1 - x_2 = 1 - x_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - 2 \\ 1 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Dando valores a x_1 se obtienen los vectores **x** y **z** pedidos. Así por ejemplo:

Si $x_1 = 0$ se obtiene el vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y si $x_1 = 1$ se obtiene $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) $$A\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistema Incompatible, es decir, no existe ningún $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no tiene antiimagen.

■

3.4

a) Demostrar que $f : E_{2x3}(\mathbb{R}) \to E_{3x2}(\mathbb{R}) \ / \ f(A) = A^t$ es aplicación lineal.

b) Obtener la matriz que caracteriza dicha aplicación en las bases usuales de $E_{2x3}(\mathbb{R})$ y $E_{3x2}(\mathbb{R})$, escribiendo también dichas bases.

(Septiembre 1997)

Resolución:

a) Para ser f aplicación lineal ha de verificar:

i) $\forall A, B \in E_{2x3}(\mathbb{R}) \qquad f(A+B) = f(A) + f(B)$

ii) $\forall A \in E_{2x3}(\mathbb{R}) \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot f(A)$

Se comprueba:

$\forall A, B \in E_{2x3}(\mathbb{R}) \qquad f(A+B) = (A+B)^t = A^t + B^t = f(A) + f(B)$

$\forall A \in E_{2x3}(\mathbb{R}) \wedge \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(\lambda \cdot A) = (\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t = \lambda \cdot f(A)$

Luego, f es aplicación lineal.

b) Sean las bases usuales de $E_{2x3}(\mathbb{R})$ y de $E_{3x2}(\mathbb{R})$ las siguientes:

Base de $E_{2x3}(\mathbb{R})$ =

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$= \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\} \Rightarrow \quad dim\,(E_{2x3}(\mathbb{R})) = 6.$

Base de $E_{3x2}(\mathbb{R})$ =

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$= \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6\} \Rightarrow \quad dim\,(E_{3x2}(\mathbb{R})) = 6.$

Luego, la matriz asociada a la aplicación, A_f, es de dimensión 6x6.

Si $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f(A) = A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad C_{B_{E_{3x2}}}(f(A)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} = A_f \cdot C_{B_{E_{2x3}}}(A)$$

De otra forma:

Teniendo en cuenta que la matriz de la aplicación tiene por columnas las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base del espacio inicial referidos a la base del espacio final, entonces en este caso las columnas de A_f son:

$$f(L_1) = F_1 \quad \Rightarrow \quad C_{B_{E_{3x2}}}(f(L_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ primera columna de } A_f \, .$$

$$f(L_2) = F_3 \quad \Rightarrow \quad C_{B_{E_{3x2}}}(f(L_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ segunda columna de } A_f \, .$$

$$f(L_3) = F_5 \quad \Rightarrow \quad C_{B_{E_{3x2}}}(f(L_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ tercera columna de } A_f.$$

y de manera análoga se haría con $f(L_4) = F_2$, $f(L_5) = F_4$ y con $f(L_6) = F_6$.

Por otro lado, si se hubiera tomado como base del espacio final:

Base de $E_{3x2}(\mathbb{R}) = \{F_1, F_3, F_5, F_2, F_4, F_6\}$, entonces en este caso la matriz de la aplicación sería la matriz unidad de orden seis, es decir, $A_f \equiv I_6$.

■

3.5 Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + 4y \\ -2y + mz \end{pmatrix}$.

a) Calcular la matriz de la aplicación.

b) Calcular las dimensiones del Núcleo e Imagen de la aplicación en función de los posibles valores de m.

c) Naturaleza de la aplicación según los valores de m.

(Septiembre 1997)

Resolución:

a) Como $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + 4y \\ -2y + mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, la matriz de la aplicación resulta:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}.$$

b) Como $\text{Ker } f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \}$, se tiene que:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + 4y \\ -2y + mz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ -2y + mz = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -x/2 \\ x + mx = 0 \Rightarrow x(1 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Casos posibles:

$m \neq -1 \quad \Rightarrow \quad x = y = z = 0 \quad \Rightarrow \text{ Ker } f = \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \} \Rightarrow dim\ (\text{Ker } f) = 0.$

$m = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{Ker } f = \{ (x \ \ -x/2 \ \ x)^t / \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \} = \text{Span } \{ (1 \ \ -1/2 \ \ 1)^t \}$

$\Rightarrow \quad dim\ (\text{Ker } f) = 1.$

A continuación se calcula la dimensión del subespacio imagen de la aplicación $\text{Im } f = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 / \ \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \ \wedge \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \}$.

Como por el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales:

$dim\ \mathbb{R}^3 = dim\ (\text{Ker } f) + dim\ (\text{Im } f)$, se tiene que:

si $m \neq -1 \Rightarrow dim\ (\mathrm{Im}\, f) = 3 - 0 = 3$

si $m = -1 \Rightarrow dim\ (\mathrm{Im}\, f) = 3 - 1 = 2$.

d) Por tratarse de una aplicación $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de un espacio vectorial en sí mismo es un endomorfismo.

Además, en el caso de $m \neq -1$:

$\mathrm{Ker}\, f = \{ \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \} \Rightarrow f$ es inyectivo.

$\mathrm{Im}\ f \equiv \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ es sobreyectivo.

Luego, f es endomorfismo biyectivo $\Rightarrow$ f es automorfismo.

■

3.6 Se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que en la base usual de $\mathbb{R}^3$ tiene asociada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Establecer el tipo de transformación de que se trata y hallar la dimensión, ecuaciones y una base de los subespacios $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$.

b) Hallar la dimensión, una base y las ecuaciones cartesianas del subespacio transformado del que tiene por ecuación $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

(Febrero 1998)

Resolución:

a) *rango* (A) = 2 = *dim* (Im f) < *dim* $\mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ no sobreyectiva.

Por el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales:

dim $\mathbb{R}^3$ = *dim* (Ker f) + *dim* (Im f) $\Rightarrow$ *dim* (Ker f) = 3 – 2 = 1 $\neq 0 \Rightarrow f$ no inyectiva.

Por ser f una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo,

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, se trata de un endomorfismo.

Como $\mathrm{Ker}\ f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ / \ f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}$, para calcular sus ecuaciones y una base del mismo basta con plantear la ecuación matricial:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = A \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrr} 2x_1 + & x_2 + & 3x_3 = 0 \\ x_1 - & x_2 + & x_3 = 0 \\ x_1 + & 2x_2 + & 2x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

De aquí se obtienen las dos ecuaciones cartesianas linealmente independientes del subespacio Núcleo:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

Restando(2ª ec. – 1ªec.) resulta: $3x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3x_2$, $x_1 = 4x_2$. Luego,

$$\text{Ker } f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t = (4x_2 \quad x_2 \quad -3x_2)^t = x_2(4 \;\; 1 \;\; -3)^t \}$$

$$\text{Base del Ker } f = \{(4 \;\; 1 \;\; -3)^t\}.$$

Como la dimensión del subespacio Imagen es dos, para obtener una base del mismo basta con elegir dos columnas linealmente independientes de la matriz A de la aplicación, por ejemplo las dos primeras:

$$\text{Base de Im } f = \{(2 \;\; 1 \;\; 1)^t, (1 \;\; -1 \;\; 2)^t\}.$$

Para conocer el número de ecuaciones cartesianas de Im f, se plantea:

$$\text{nº ecuaciones cartesianas} = dim\, \mathbb{R}^3 - dim\, (\text{Im } f) = 3 - 2 = 1.$$

Para calcular la ecuación se forma una matriz que tenga por columnas las coordenadas de los vectores de la base de Im f y las coordenadas de un vector genérico $\mathbf{y} = (y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t \in \text{Im } f$, y se impone la condición de que dicha matriz tenga rango dos, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & y_1 \\ 1 & -1 & y_2 \\ 1 & 2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 + y_3 = 0.$$

b) Primeramente se calcula una base del subespacio dado, que tiene por ecuación: $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Así, una base sería $\{(1 \;\; 1 \;\; 0)^t, (1 \;\; 0 \;\; 1)^t\}$.

A continuación se calculan los transformados de cada uno de los vectores de esa base:

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & -1 & 1\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\1 & -1 & 1\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Una base del subespacio transformado del que tiene por ecuación $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ sería la formada por los vectores $\{(3 \;\; 0 \;\; 3)^t, (5 \;\; 2 \;\; 3)^t\}$. Por tanto la dimensión del subespacio transformado sería igual a dos.

El número de ecuaciones cartesianas de dicho subespacio sería:

$$dim\, \mathbb{R}^3 \text{ - dimensión del subespacio transformado} = 3 - 2 = 1.$$

Para calcular esta ecuación se trabaja de la misma manera que en el apartado anterior, resultando:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & z_1 \\ 0 & 2 & z_2 \\ 3 & 3 & z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 - z_2 - z_3 = 0.$$

■

3.7

a) Sea V un espacio vectorial de dimensión n impar, y f un endormorfismo definido en V. Demostrar que $\text{Ker}\, f$ e $\text{Im}\, f$ son dos subespacios vectoriales distintos.

b) Dada la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x_1| \\ 0 \end{pmatrix}$, estudiar si se trata de una aplicación lineal.

(Septiembre 1998)

Resolución:

a) Por el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales:

$$dim\ (V) = dim\ (\text{Ker}\, f) + dim\ (\text{Im}\, f).$$

Como *dim* (V) = n, siendo n impar significa que *dim* (Ker *f*) y *dim* (Im *f*) no pueden ser los dos pares al mismo tiempo (par + par = par) ó impares (impar + impar = par). Por lo tanto, sus dimensiones son diferentes, y subespacios vectoriales de diferente dimensión son diferentes.

b) Para ver si la aplicación dada es lineal se comprueba si verifica las dos condiciones siguientes:

i) $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \qquad f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

ii) $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \ \wedge \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \qquad f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x})$

Para comprobar la primera:

Sean $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$, luego:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x_1 + y_1| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} |x_1| \\ 0 \end{pmatrix} \ \wedge \ f(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} |y_1| \\ 0 \end{pmatrix}$, de donde:

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} |x_1| + |y_1| \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por la desigualdad del valor absoluto:

$$|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1| \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

luego, no se cumple la condición *i)*, y por tanto no es aplicación lineal.

Al no ser aplicación lineal no sería necesario comprobar si se verifica la segunda condición, aunque si se quisiera hacer se procedería de la siguiente manera. Para comprobar si se verifica la segunda condición $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, se calcula:

$f(\alpha \cdot \mathbf{x}) = f\begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha \cdot x_1| \\ 0 \end{pmatrix} \neq \alpha \cdot f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha \cdot |x_1| \\ 0 \end{pmatrix}$, ya que $|\alpha \cdot x_1| = |\alpha| \cdot |x_1| \neq \alpha \cdot |x_1|$

luego, tampoco se cumple la segunda condición.

■

3.8 Sean { $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_4}$ } y { $\mathbf{e_1}'$, $\mathbf{e_2}'$, $\mathbf{e_3}'$ } las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Se considera la aplicación $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifica:

- Ker f = Span { $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ }
- $f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1}' + \mathbf{e_3}'$
- $f(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3} + \mathbf{e_4}) = -\mathbf{e_1}' + \mathbf{e_2}' - \mathbf{e_3}'$

a) Hallar la matriz A de f en las bases canónicas.

b) Obtener una base del subespacio vectorial F de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones paramétricas:

$$F \equiv \begin{cases} x = \lambda - 2\mu \\ y = -2\lambda \\ z = -6\mu \\ t = \lambda - \mu \end{cases}$$

c) Sea un subespacio vectorial $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0 \right\}$ ¿Son G y f (F) subespacios suplementarios?. Razona la respuesta.

(Septiembre 1998)

Resolución:

a) La matriz A de esta aplicación lineal en las bases canónicas dadas, es una matriz de dimensión 3x4 que tiene por columnas las imágenes de los vectores de la base del espacio inicial $f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), f(\mathbf{e_3})$ y $f(\mathbf{e_4})$, referidas a la base del

espacio final. Por tanto, para hallar la matriz A hay que calcular dichas imágenes.

Puesto que el Núcleo de la aplicación es el subespacio:

Ker $f = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 / f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \}$, se tiene que:

$$f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{e_1}) + 2\cdot f(\mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$f(\mathbf{e_3}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Por otro lado, $f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1}' + \mathbf{e_3}' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Llevando este valor a la primera ecuación resulta:

$$f(\mathbf{e_1}) = -2\cdot f(\mathbf{e_2}) = -2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}.$$

Para calcular $f(\mathbf{e_4})$ se hace uso del dato: $f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}+\mathbf{e_4}) = -\mathbf{e_1}' + \mathbf{e_2}' - \mathbf{e_3}'$.

De donde:

$$f(\mathbf{e_1})+f(\mathbf{e_2})+f(\mathbf{e_3})+f(\mathbf{e_4}) = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$f(\mathbf{e_4}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Ahora se disponen $f(\mathbf{e_1}), f(\mathbf{e_2}), f(\mathbf{e_3})$ y $f(\mathbf{e_4})$ en columnas y se tiene la matriz A de la aplicación:

$$A = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

b) A partir de las ecuaciones paramétricas de F se obtiene una base de F:

$$F \equiv \begin{cases} x = \lambda - 2\mu \\ y = -2\lambda \\ z = -6\mu \\ t = \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow F = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda-2\mu\\-2\lambda\\-6\mu\\\lambda-\mu\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\\-1\end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Base de F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim \text{F} = 2.$$

c) Se comienza calculando una base de G y otra de f(F).

$$\text{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$, de donde una base de G sería: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow dim\,(\text{G}) = 2.$

Para calcular una base de f(F) se hallan las imágenes de los vectores de la base de F que se han calculado en el apartado anterior, es decir:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Luego, una base de f(F) es: $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow dim\,(f(\text{F})) = 1$.

A continuación se halla el subespacio intersección, G $\cap$ f(F), así como el subespacio suma, G + f(F):

$$\text{G} \cap f(\text{F}) = \{ \mathbf{x} \ / \ \mathbf{x} \in \text{G} \ \wedge \ \mathbf{x} \in f(\text{F}) \} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\gamma \\ \gamma \\ -4\gamma \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -4\gamma \\ 0 = \gamma \\ \beta = -4\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \text{G} \cap f(\text{F}) = \{ \mathbf{0} \}.$$

Por ser G y f(F) subespacios disjuntos, la dimensión del subespacio suma es:

$$dim\,(\text{G} + f(\text{F})) = dim\,(\text{G}) + dim\,(f(\text{F})) = 2 + 1 = 3 = dim\,\mathbb{R}^3$$

y como, $(\text{G} + f(\text{F})) \subseteq \mathbb{R}^3$, se tiene en este caso que $(\text{G} + f(\text{F})) \equiv \mathbb{R}^3$.

Luego, por verificarse que:

$G \cap f(F) = \{ \mathbf{0} \} \wedge (G + f(F)) \equiv \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ G y $f(F)$ son subespacios suplementarios.

■

3.9 Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$B \rightarrow f(B) = \textit{Traza}\ (B)$$

a) Hallar la matriz A de la aplicación en las bases usuales de los espacios vectoriales considerados.

b) Hallar la dimensión, base y ecuaciones del Ker *f* así como de Im *f*.

c) Naturaleza de la transformación.

d) Calcular la imagen de la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(Febrero 1999)

Resolución:

a) Sean las bases usuales de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ y de $\mathbb{R}$ las siguientes:

$$\text{Base de } \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Base de $\mathbb{R} = \{1\}$.

La matriz A de esta aplicación tiene dimensión 1x4, y sus columnas son las imágenes de los vectores de la base del espacio inicial referidas a la base del espacio final, es decir:

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 0 = 1 \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 = 0 \qquad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 + 1 = 1$$

Así, la matriz de la aplicación es: A = (1 0 0 1).

b) La dimensión del subespacio imagen es el rango de la matriz de la aplicación, luego, *dim* (Im *f*) = *rango* (A) = 1.

Una base del subespacio Imagen es {1}.

En este caso Im *f* no tiene ecuaciones, ya que:

nº.ecuaciones = *dim* $\mathbb{R}$ - *dim* (Im *f*) = 1 – 1 = 0 (no tiene restricciones por coincidir con el espacio final).

Aplicando el Teorema fundamental de las aplicaciones lineales, se obtiene la dimensión del subespacio Núcleo de la aplicación:

$$dim\ \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) = dim\ (\mathrm{Ker}\, f) + dim\ (\mathrm{Im}\, f)$$

luego, $dim\ (\mathrm{Ker}\, f) = dim\ (\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})) - dim\ (\mathrm{Im}\, f) = 4 - 1 = 3$.

De la definición de $\mathrm{Ker}\, f$ se obtiene una base así como sus ecuaciones:

$$\mathrm{Ker}\, f = \{ B \in \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\, f(B) = 0 \} =$$

$$= \left\{ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} / \ \mathrm{traza}(B) = b_{11} + b_{22} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{pmatrix} = b_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ecuación del $\mathrm{Ker}\, f$: $\quad b_{11} + b_{22} = 0$.

Base del $\mathrm{Ker}\, f$ = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

c) $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow f$ no es inyectiva

$\mathrm{Im}\ f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ es sobreyectiva.

d) Para calcular $f(C)$ se puede hacer de dos formas.

Sea $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(C) = traza\ (C) = 1+1 = 2.$

O bien empleando la expresión matricial de la aplicación:

$f(C) = (1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$, siendo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ las coordenadas de C en la base usual del apartado a).

■

3.10 Comprobar si las siguientes aplicaciones son lineales:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

b) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$

(Septiembre 1999)

Resolución:

Para ser f aplicación lineal se ha de verificar:

$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \;\wedge\; \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x}) + \beta \cdot f(\mathbf{y})$

Veamos si se cumple.

a) Sean $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = f\begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 \\ \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + 1 \\ \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \\ \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot f(\mathbf{x}) + \beta \cdot f(\mathbf{y}) = \alpha \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_1 + 1 \\ y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \alpha + \beta \\ \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \\ \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

Se observa que

$f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) \neq \alpha \cdot f(\mathbf{x}) + \beta \cdot f(\mathbf{y}) \;\Rightarrow f$ no es aplicación lineal.

b) Sean $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

$$f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = f\begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 \\ \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \\ \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \\ \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 - \alpha \cdot x_2 - \beta \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot f(\mathbf{x}) + \beta \cdot f(\mathbf{y}) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 + \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \\ \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot y_2 \\ \alpha \cdot x_1 + \beta \cdot y_1 - \alpha \cdot x_2 - \beta \cdot y_2 \end{pmatrix}.$$

En este caso se observa que:

$f(\alpha \cdot \mathbf{x} + \beta \cdot \mathbf{y}) = \alpha \cdot f(\mathbf{x}) + \beta \cdot f(\mathbf{y}) \;\Rightarrow f$ es aplicación lineal.

■

3.11 Sea $f: \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_2 \quad / \quad f[p(t)] = t \cdot p(t) + p(0)$

Sabiendo que f es una aplicación lineal:

a) Hallar la matriz A asociada a dicha aplicación en las bases usuales (B_1 y B_2) de $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ (siendo $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ los espacios vectoriales de los polinomios de orden ≤ 1 y ≤ 2 respectivamente).

b) Hallar la dimensión, base y ecuaciones de los subespacios núcleo e imagen de la aplicación.

c) Naturaleza de la transformación.

d) Hallar, utilizando la matriz A, la imagen del polinomio cuyas coordenadas referidas a la base $B_1' = \{ 1\text{-}t , 1+t \}$ son $p_{B_1'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(Septiembre 1999)

Resolución:

a) Sean $B_1 = \{ \mathbf{1}, \mathbf{t} \}$ la base usual de $\mathbb{P}_1$ y $B_2 = \{ \mathbf{1}, \mathbf{t}, \mathbf{t^2} \}$ la base usual de $\mathbb{P}_2$.

Se calculan las columnas de la matriz A de la aplicación:

$$f(\mathbf{1}) = t \cdot 1 + 1 = \mathbf{t} + \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad C_{B_2}[f(1)] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(\mathbf{t}) = t \cdot t + 0 = \mathbf{t^2} \quad \Rightarrow \quad C_{B_2}[f(t)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De donde $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\text{Ker}\, f = \{ p(t) \in \mathbb{P}_1 \,/\, f[p(t)] = \mathbf{0} \}$

Sea $p(t) = a_0 + a_1 t \quad \Rightarrow \quad f[p(t)] = t(a_0 + a_1 t) + a_0 = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = 0$

Luego, $\text{Ker}\, f = \{ \mathbf{0} \}$.

Por tanto, $dim\,(\text{Ker}\, f) = 0$ y $\text{Ker}\, f$ no tiene base.

Ecuaciones de $\text{Ker}\, f$: $a_0 = 0 \ \wedge \ a_1 = 0$.

$\text{Im}\, f = \text{Span}\{ f(\mathbf{1}), f(\mathbf{t}) \} = \text{Span}\{ \mathbf{t} + \mathbf{1}, \mathbf{t^2} \}$

$B_{\text{Im}\, f} = \{ \mathbf{t} + \mathbf{1}, \mathbf{t^2} \} \quad \Rightarrow \quad dim\,(\text{Im}\, f) = 2$

Para hallar las ecuaciones de Im f se considera:

$q(t) \in \text{Im } f \quad \Leftrightarrow \quad q(t) = \alpha\cdot(\mathbf{t} + \mathbf{1}) + \beta\cdot\mathbf{t}^{\,2} = b_0 + b_1\cdot\mathbf{t} + b_2\cdot\mathbf{t}^2 \quad \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} b_0 = b_1 = \alpha \\ b_2 = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Ecuación de Im f: $b_0 - b_1 = 0$.

c) $\text{Ker } f = \{\ \mathbf{0}_{P_1}\ \} \Rightarrow f$ es inyectiva.

Im $f \neq \mathbb{P}_2 \Rightarrow f$ no sobreyectiva.

Por tanto, se trata de un monomorfismo.

d) Las coordenadas de $p_{B_1'}$ referidas a la base B_1' son $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Para hallar las coordenadas de este polinomio en la base B_1 se hace:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, siendo $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de paso de B_1 a B_1'.

Para hallar la imagen de este polinomio se aplica la ecuación matricial de f en las bases B_1 y B_2:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

■

3.12 Condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal sea inyectiva (enunciado y demostración)

(Febrero 96)

3.13

a) Sean E y F espacios vectoriales reales de dimensiones n y m respectivamente. Deducir la relación existente entre las matrices asociadas a una aplicación lineal $f: E \to F$ cuando cambian las bases de ambos espacios vectoriales.

b) Particularizar la expresión obtenida para el caso en que E = F.

(Septiembre 1998)

3.14

a) Enunciar el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales.

b) Definir Núcleo e Imagen de una aplicación lineal, y demostrar que son subespacios vectoriales.

(Enero 2000)

4

DIAGONALIZACIÓN POR SEMEJANZA

4.1 Indicar razonadamente cuáles de las siguientes matrices representan endomorfismos biyectivos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Febrero 96)

Resolución:

a) La matriz A es cuadrada, por lo que representa a un endomorfismo f: E→E, pero

   rango(A) = 2 = *dim* (Im *f*) < 3 = *dim* E ⇒ el endomorfismo no es sobreyectivo ⇒ f no es biyectivo.

b) La matriz B no es cuadrada ⇒ B no representa a un endomorfismo.

c) La matriz C es cuadrada, por lo que representa a un endomorfismo; además

   rango(C) = 3 = *dim* (Im *f*) = *dim* E ⇒ f es sobreyectivo ⇒ f es biyectivo.

■

4.2 Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo y A su matriz asociada en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

Se sabe que una base del núcleo del endomorfismo cuya matriz asociada es (A-I), está constituída por los vectores $(1\ 1\ 0)^t$ y $(1\ 0\ 1)^t$, y que en el endomorfismo dado por A, la imagen del vector $(0\ 2\ 1)^t$ es $(6\ 2\ 1)^t$.

Se pide:

a) Matriz A del endomorfismo en la base usual de $\mathbb{R}^3$.

b) Valores propios de f y subespacios propios.

c) Matriz más sencilla posible semejante a A, dando la base correspondiente.

(Febrero 96)

Resolución:

Interpretación de los datos:

- $B_{Ker\ (A-I)} = \{ (1\ 1\ 0)^t , (1\ 0\ 1)^t \} = \{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \}$ y teniendo en cuenta que:

  $Ker\ (A-I) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-I)\ \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} A\cdot\mathbf{u_1} = 1\cdot\mathbf{u_1} \\ A\cdot\mathbf{u_2} = 1\cdot\mathbf{u_2} \end{cases}$$

es decir, λ=1 es un valor propio de A (o de *f*) y $B_{V(1)} = \{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \}$

a) Según lo anterior y, si se llama $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ a la base usual de $\mathbb{R}^3$:

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{u_1}) = \mathbf{u_1} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) \overset{(2)}{=} f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_2} \overset{(1)}{\Rightarrow} f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}) \overset{(2)}{=} f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(\mathbf{u_3}) = f(2\cdot\mathbf{e_2}+\mathbf{e_3}) \overset{(2)}{=} 2\cdot f(\mathbf{e_2}) + f(\mathbf{e_3}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$$

(1) Ya que $\mathbf{u_1} = (1\ 1\ 0)^t = 1\cdot(1\ 0\ 0)^t + 1\cdot(0\ 1\ 0)^t = \mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}$ *. De la misma forma se razonaría para* $\mathbf{u_2}$.

(2) Por ser la aplicación lineal (puesto que un endomorfismo es un tipo particular de apl. lineal).

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$f(\mathbf{e_1}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f(\mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f(\mathbf{e_3}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$A_B = \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{(f(\mathbf{e_1}))_B \quad (f(\mathbf{e_2}))_B \quad (f(\mathbf{e_3}))_B}$$

Otra forma de calcular A_B:

se comprueba si los vectores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ son linealmente independientes. Puesto que sí lo son y son 3, con ellos se puede formar una base de $\mathbb{R}^3$: $B_1 = \{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3} \}$. Así se tiene una base y las imágenes de los vectores de dicha base, puesto que son dato; por lo tanto, se puede calcular:

$$A_{B_1} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}^{(f(\mathbf{u_1}))_{B_1} \quad (f(\mathbf{u_2}))_{B_1} \quad (f(\mathbf{u_3}))_{B_1}}$$

y, teniendo en cuenta la relación de semejanza entre las matrices que caracterizan a un endomorfismo en bases distintas, se tiene que :

$$A_{B_1} \overset{(3)}{=} P_{B\to B_1}^{-1}\cdot A_B\cdot P_{B\to B_1}$$

siendo $P_{B\to B_1}$ la matriz de paso de la base B a la base B_1:

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

y, por lo tanto:

$$A_B = P_{B\to B_1}.A_{B_1}.P_{B\to B_1}^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3) Se podía haber planteado directamente $A_B = P_{B_1\to B}^{-1}\cdot A_{B_1}\cdot P_{B_1\to B}$ *, pero haría falta calcular la matriz de paso de B_1 a B, lo que en este caso es más costoso.*

b) La matriz A es triangular, por lo que por simple observación de la diagonal principal se ve que los valores propios son:

$$\begin{cases}\lambda_1=-1, \quad m_1=1, \quad (\mu_1 = dim\,(V(-1)) = 1, \text{por ser valor propio simple})\\ \lambda_2=1, \quad m_2=2, \quad (1\le \mu_2 = dim\,(V(1)) \le 2)\end{cases}$$

(El valor propio 1 doble ya se conocía por la interpretación del enunciado).

A continuación se calculan los subespacios propios asociados a cada valor propio.

$\boxed{\lambda=1}$ $V(1)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ A\cdot\mathbf{x}=1\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ (A-1\cdot I)\,\mathbf{x}=\mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A-1\cdot I)$

En este caso, en lugar de realizar los cálculos, se puede decir directamente que

$$B_{V(1)}=\{\,\mathbf{u_1},\mathbf{u_2}\,\}=\{\,(1\ 1\ 0)^t,(1\ 0\ 1)^t\,\}$$

puesto que se sabe que $1\le\dim V(1)\le 2$ y, del enunciado, se sabe que $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ son dos vectores propios linealmente independientes asociados a $\lambda=1$; por lo tanto, forman una base de V(1).

$\boxed{\lambda=-1}$ $V(-1)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ A\cdot\mathbf{x}=-1\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ (A+I)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A+I)$

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2x_2+2x_3=0\\ 2x_2=0\\ 2x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=x_3=0\\ \forall x_1\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x}\in V(-1)\Rightarrow \mathbf{x}=(x_1\ 0\ 0)^t \ \wedge\ B_{V(-1)}=\{\,(1\ 0\ 0)^t\,\}$$

c) A es diagonalizable, puesto que se pueden encontrar 3 vectores propios linealmente independientes (dos elegidos independientes pertenecientes a V(1) y otro asociado a $\lambda_1=-1$, que será independiente de los anteriores, según se sabe por la teoría de diagonalización de matrices), luego

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo D la matriz asociada al endomorfismo en una base cualquiera de vectores propios (el primero asociado a $\lambda_1 = -1$ y los otros dos asociados a $\lambda_2 = 1$); por ejemplo:

$$B_2 = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

■

4.3 Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe:

- $f(1\ 1\ 0\ 0)^t = (0\ 1\ 0\ -1)^t$
- $f(1\ 0\ 1\ 0)^t = (1\ 1\ 1\ 0)^t$
- $\text{Ker}\, f = \text{Im}\, f$

Hallar la matriz asociada a f.

(Enero 96)

Resolución:

Interpretación de los datos:

- $$\left.\begin{array}{l} dim\ \text{Ker}\ f = dim\ \text{Im}\ f \\ dim\ \text{Ker}\ f + dim\ \text{Im}\ f \overset{(1)}{=} dim\,\mathbb{R}^4 = 4 \end{array}\right\} dim\ \text{Ker}\ f = dim\ \text{Im}\ f = 2$$

(1) Teorema fundamental de las aplicaciones lineales

- $f(1\ 1\ 0\ 0)^t = (0\ 1\ 0\ -1)^t$

  o, dando nombres a los vectores,

  $$f(\mathbf{v_1}) = \mathbf{u_1} \Rightarrow \mathbf{u_1} \in \text{Im}\, f = \text{Ker}\, f \Rightarrow f(\mathbf{u_1}) = \mathbf{0}$$

- $f(1\ 0\ 1\ 0)^t = (1\ 1\ 1\ 0)^t$

  o, dando nombres a los vectores,

  $$f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{u_2} \Rightarrow \mathbf{u_2} \in \text{Im}\, f = \text{Ker}\, f \Rightarrow f(\mathbf{u_2}) = \mathbf{0}$$

Una vez interpretados los datos se pasa a resolver el problema.

Se pide la matriz asociada al endomorfismo pero no se indica en qué base y, como se sabe, la matriz de un endomorfismo está asociada a él en una base determinada. Por lo tanto, se calculará en la base que cada uno desee, indicando cuál es ésta.

Así, por ejemplo:

se puede comprobar si los vectores dados $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ son linealmente independientes. Si lo fueran, con 4 vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$ se puede formar una base B, y puesto que las imágenes de estos cuatro vectores de la base son conocidas, ya sería inmediato el cálculo de la matriz A_B.

$$rango\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} 4 \quad \Rightarrow$$

(2) Se calcula, por ejemplo, por transf. elementales.

los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ son linealmente independientes.

Por lo tanto, B_1={ $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$} y

$$A_{B_1} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{((f(\mathbf{v_1}))_{B_1}\,(f(\mathbf{v_2}))_{B_1}\,(f(\mathbf{u_1}))_{B_1}\,(f(\mathbf{u_2}))_{B_1})}$$

Si se hubiera pedido la matriz de *f* en la base usual B de $\mathbb{R}^4$, el problema se habría podido resolver de la misma manera y, una vez obtenida la matriz A_{B_1}, se habría aplicado la relación de semejanza entre matrices de un endomorfismo en bases distintas, para calcular A_B .

Otra forma de resolver el problema, tanto si se pidiera la matriz en la base usual como si no se especifica ninguna base y, por lo tanto, se decide trabajar en la usual sería la siguiente:

si se llama B a la base usual: B = { $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_4}$ }$=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

y se plantea el siguiente sistema:

$$f(\mathbf{v_1}) = f\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) \overset{(3)}{=} f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{v_2}) = f\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}) \overset{(3)}{=} f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{u}_1) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = f(\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4) \overset{(3)}{=} f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{0}$$

$$f(\mathbf{u}_2) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \overset{(3)}{=} f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$$

(3) Por ser f lineal

y, resolviendo el sistema se obtiene:

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\mathbf{e}_4) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con lo que

$$\mathrm{A_B} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}}^{((f(\mathbf{e}_1))_\mathrm{B}\,(f(\mathbf{e}_2))_\mathrm{B}\,(f(\mathbf{e}_3))_\mathrm{B}\,(f(\mathbf{e}_4))_\mathrm{B})} \end{pmatrix}$$

■

4.4

a) Demostrar que las matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

b) Comprobar si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son semejantes.

(Enero 97)

Resolución:

a) Ver notas de clase curso 01-02.

b) Se ve fácilmente que se cumple la condición necesaria del apartado a), pero esta condición no es suficiente. Por lo tanto, para comprobar si son semejantes se aplica directamente la definición:

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists\, P \text{ regular} / B = P^{-1}\cdot A\cdot P$$

Puesto que A=I, si se cumpliera lo anterior $B = P^{-1}\cdot I\cdot P = P^{-1}\cdot P = I$, lo cual no es cierto, por lo que A y B no son semejantes.

■

4.5 Sea $B = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ una base de un espacio vectorial real de dimensión 3 y *f* un endomorfismo tal que:

- $\mathbf{u} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ es vector propio asociado a $\lambda = 4$
- $\mathbf{v_3}$ es vector propio asociado a $\lambda = 1$
- $f(\mathbf{v_2}) = 2\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2}$

a) Obtener la matriz A asociada al endomorfismo *f* en la base B.

b) Diagonalizar ortogonalmente la matriz A.

c) Hallar A^n (Nota de ayuda: recordar que $A = P\cdot D\cdot P^{-1}$).

(Enero 97)

Resolución:

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{u}) \overset{(1)}{=} 4\cdot\mathbf{u} \Rightarrow f(\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}) \overset{(2)}{=} f(\mathbf{v_1}) + f(\mathbf{v_2}) = 4\cdot(\mathbf{v_1}+\mathbf{v_2}) = 4\cdot\mathbf{v_1} + 4\cdot\mathbf{v_2} \\ f(\mathbf{v_3}) \overset{(3)}{=} 1\cdot\mathbf{v_3} \\ f(\mathbf{v_2}) = 2\cdot\mathbf{v_1} + 2\cdot\mathbf{v_2} \end{array}\right\}$$

*(1) por ser **u** un vector propio asociado a 4*
(2) por ser f lineal
(3) por ser $\mathbf{v_3}$ vector propio asociado a 1

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{v_1}) = 2\cdot\mathbf{v_1} + 2\cdot\mathbf{v_2} \\ f(\mathbf{v_2}) = 2\cdot\mathbf{v_1} + 2\cdot\mathbf{v_2} \\ f(\mathbf{v_3}) = \mathbf{v_3} \end{array}\right\}$$

$$A_B = \begin{array}{c} \overbrace{\phantom{(f(\mathbf{v_1}))_B \quad (f(\mathbf{v_2}))_B}}^{(f(\mathbf{v_1}))_B \quad (f(\mathbf{v_2}))_B \quad (f(\mathbf{v_3}))_B} \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Toda matriz simétrica real (A_B lo es) es diagonalizable por semejanza mediante una matriz de semejanza ortogonal.

Para ello se necesita obtener una base de vectores propios ortonormada.

Se comienza calculando los valores propios:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

(1) desarrollando el determinante por los elementos de la 3ª columna

$$(1-\lambda)\cdot\left[(2-\lambda)^2 - 4\right] = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 4\lambda) =$$

$$= \lambda\cdot(1-\lambda)\cdot(\lambda-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

A continuación se calcula una base de vectores propios:

$\boxed{\lambda=0}$ $V(0)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 0\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-0\cdot I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A- 0\cdot I)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} \in V(0) \Rightarrow \mathbf{x} = (x_1 \; -x_1 \; 0)^t \quad \wedge \quad B_{V(0)} = \{(1 \; -1 \; 0)^t\} = \{\mathbf{s_1}\}$$

$\boxed{\lambda=1}$ $V(1)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 1\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-1\cdot I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A- 1\cdot I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \forall x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} \in V(1) \Rightarrow \mathbf{x} = (0 \; 0 \; x_3)^t \quad \wedge \quad B_{V(1)} = \{(0 \; 0 \; 1)^t\} = \{\mathbf{s_2}\}$$

$\boxed{\lambda=4}$ $V(4)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 4\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-4\cdot I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A- 4\cdot I)$

En este caso no hace falta calcular V(4), puesto que ya se conoce: por ser 4 un valor propio simple, dim V(4)=1 y una base de V(4) estará formada por cualquier vector perteneciente a él. En el enunciado se dice que **u** es un vector propio asociado a 4; por lo tanto:

$B_{V(4)}=\{\,\mathbf{u}\,\}=\{\,\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}\,\}$ o en coordenadas en B: $B_{V(4)}=\{\,(1\;1\;0)^t\,\}=\{\mathbf{s_3}\}$.

$B_1=\{(1\;-1\;0)^t, (0\;0\;1)^t, (1\;1\;0)^t\}=\{\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3}\}$ es una base de vectores propios de A; además, es ortogonal, por estar formada por vectores propios asociados a valores propios distintos de una matriz simétrica real. Entonces,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{(\mathbf{s_1} \quad \mathbf{s_2} \quad \mathbf{s_3})}$$

cumpliéndose que:

$$D = P_1^{-1} \cdot A \cdot P_1 \qquad (P_1 \text{ no es ortogonal; es decir } P^{-1} \neq P^t).$$

A continuación, se normaliza B_1 para obtener una base ortonormada, B_2. Para ello, se divide cada vector entre su norma (euclídea).

$$B_2 = \{\mathbf{s}_1', \mathbf{s}_2', \mathbf{s}_3'\} = \left\{ \frac{\mathbf{s}_1}{\|\mathbf{s}_1\|}, \frac{\mathbf{s}_2}{\|\mathbf{s}_2\|}, \frac{\mathbf{s}_3}{\|\mathbf{s}_3\|} \right\}, \quad \text{siendo:}$$

$$\|\mathbf{s}_1\| = \sqrt{\langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{s}_2\| = \sqrt{\langle \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2 \rangle} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\|\mathbf{s}_3\| = \sqrt{\langle \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_3 \rangle} = \sqrt{1^2 + (1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

obteniéndose la base ortonormada:

$$B_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right)^t, \quad (0 \quad 0 \quad 1)^t, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \right)^t \right\}$$

luego, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P_2 = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{(\mathbf{s}_1' \quad \mathbf{s}_2' \quad \mathbf{s}_3')}$

verificándose:

$\boxed{D = P_2^{-1} \cdot A \cdot P_2 = P_2^{t} \cdot A \cdot P_2}$, por ser P_2 ortogonal.

c) El dato que se da es para que se recuerde que A es diagonalizable por semejanza. La matriz P de semejanza será cualquiera formada por vectores propios de A; si se utiliza una que sea ortogonal, por ejemplo, en nuestro caso la P_2 calculada , $P_2^{-1} = P^t$ y así el cálculo de la inversa será sencillo.

$$D = P^{-1} \cdot A \cdot P \Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Rightarrow$$

$$A^n = (P \cdot D \cdot P^{-1})^n = (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot D \cdot P^{-1}) ... (P \cdot D \cdot P^{-1}) =$$

$$P \cdot D \cdot I \cdot D \cdot I \cdot D \cdot I \cdot ... \cdot I \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

particularizando al caso en que usemos la matriz ortogonal P_2:

$$A^n = P_2 \cdot D^n \cdot P_2^{-1} = P_2 \cdot D^n \cdot P_2^{t}$$

$$A^n \overset{(5)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

(5) Ya que por ser D diagonal, D^n es otra matriz diagonal en cuya diagonal principal están los elementos de la diag. principal de D elevados a n

■

4.6 Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que:

- $f(\mathbf{e_1}) = \mathbf{e_1} + \alpha\,\mathbf{e_2} + \beta\,\mathbf{e_3}$
- $f(\mathbf{e_2}) = -\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \gamma\,\mathbf{e_3}$
- $f(\mathbf{e_3}) = \mathbf{e_3}$

a) Hallar la matriz del endomorfismo f en la base $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ y estudiar su diagonalización en función de los posibles valores de α, β y γ.

b) Hallar α, β y γ para que la matriz A del endomorfismo sea simétrica. ¿Es posible diagonalizar A?

Si es posible, diagonalizar el endomorfismo mediante una matriz de paso ortogonal

(Septiembre 97)

Resolución:

a) $$A_B = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{pmatrix}}^{((f(\mathbf{e_1}))_B \quad (f(\mathbf{e_2}))_B \quad (f(\mathbf{e_3}))_B)}$$

En primer lugar, se calculan los valores propios:

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ \alpha & 1-\lambda & 0 \\ \beta & \gamma & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ \alpha & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

(1) desarrollando el determinante por los elementos de la 3ª columna.

$$(1-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)^2 + \alpha\right] = (1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda + 1 + \alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{-\alpha} \\ \lambda_3 = 1 - \sqrt{-\alpha} \end{cases}$$

A continuación, se estudian los posibles casos en función de α:

i) $\alpha > 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 \notin \mathbb{R} \\ \lambda_3 \notin \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ NO DIAGONALIZABLE, por no cumplir la condición necesaria de diagonalización

ii) $\alpha = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \Rightarrow$ Valor propio : $\lambda = 1,\ m = 3$

A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ dim V(1) = 3

Se calcula V(1):

$V(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 1\cdot\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A - 1\cdot I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \text{Ker}\,(A - 1\cdot I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dim\,(V(1)) = dim\,\mathbb{R}^3 - \text{nº ec.linealmente indep.} = dim\,\mathbb{R}^3 - rg(A - 1\cdot I) \overset{(2)}{\neq} 3$$

$$\Rightarrow \text{NO DIAGONALIZABLE.}$$

(2) rg(A - I) = 1 ó 2 dependiendo de los valores de β y γ

iii)

$$\alpha < 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 + \sqrt{-\alpha} \\ \lambda_3 = 1 - \sqrt{-\alpha} \end{cases} \Rightarrow 3 \text{ valores propios distintos} \overset{(3)}{\Rightarrow} \text{A diagonalizable.}$$

(3) por la teoría de diagonalización (ver notas de clase curso 01 - 02)

b) A es simétrica $\Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow \alpha = -1 \wedge \beta = \gamma = 0$

A es diagonalizable, ya que una matriz simétrica real lo es siempre (en este caso también se sabe que va a ser diagonalizable porque se ha visto en el apartado anterior que para valores de $\alpha<0$ lo es, sea la matriz simétrica o no)

En este caso es posible diagonalizar el endomorfismo mediante una matriz de paso ortogonal, ya que toda matriz simétrica real es diagonalizable por semejanza mediante una matriz de semejanza ortogonal. Dicho de otra forma, una matriz A es simétrica $\Leftrightarrow$ es diagonalizable por semejanza mediante una matriz de semejanza ortogonal.

Para ello se necesita obtener una base de vectores propios ortonormada.

Se comienza calculando los valores propios:

En este caso, por el apartado a) se sabe que $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

A continuación se calcula una base de vectores propios:

$\boxed{\lambda=0}$ $V(0)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 0\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-0\cdot I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A- 0\cdot I)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} \in V(0) \Rightarrow \mathbf{x} = (x_1\ x_1\ 0)^t \quad \wedge \quad B_{V(0)} = \{(110)^t\} = \{\mathbf{u_1}\}$$

$\boxed{\lambda=1}$ $V(1)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / A\cdot\mathbf{x} = 1\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-1\cdot I)\cdot\mathbf{x} = \mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A- 1\cdot I)$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_2 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ \forall x_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} \in V(1) \Rightarrow \mathbf{x} = (0\ 0\ x_3)^t \quad \wedge \quad B_{V(1)} = \{(001)^t\} = \{\mathbf{u_2}\}$$

$\boxed{\lambda=2}$ $V(2)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ A\cdot\mathbf{x}=2\cdot\mathbf{x}\}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ (A-2\cdot I)\,\mathbf{x}=\mathbf{0}\}=\text{Ker}\,(A-2\cdot I)$

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2=0\\-x_1-x_2=0\\-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-x_1\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\mathbf{x}\in V(2)\Rightarrow\mathbf{x}=(x_1\ -x_1\ 0)^t\quad\wedge\quad B_{V(2)}=\{(1\ -1\ \ 0)^t\}=\{\mathbf{u_3}\}$$

$B_1=\{(1\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t, (1\ -1\ 0)^t\}=\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ es una base de vectores propios; además, es ortogonal, por estar formada por vectores propios asociados a valores propios distintos en una matriz simétrica real , luego

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad P_1=\overbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}}^{(\mathbf{u_1}\quad\mathbf{u_2}\quad\mathbf{u_3})}\ ,\ \text{cumpliéndose que:}$$

$$D=P_1^{-1}\cdot A\cdot P_1\qquad(P_1\text{ no es ortogonal})$$

A continuación se normaliza B_1 para obtener una base ortonormada. Para ello, se divide cada vector entre su norma (euclídea).

$$B_2=\{\mathbf{u_1'},\mathbf{u_2'},\mathbf{u_3'}\}=\left\{\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|},\frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|},\frac{\mathbf{u_3}}{\|\mathbf{u_3}\|}\right\},\quad\text{siendo:}$$

$$\|\mathbf{u_1}\|=\sqrt{\langle\mathbf{u_1},\mathbf{u_1}\rangle}=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{u_2}\|=\sqrt{\langle\mathbf{u_2},\mathbf{u_2}\rangle}=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$$

$$\|\mathbf{u_3}\|=\sqrt{\langle\mathbf{u_3},\mathbf{u_3}\rangle}=\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}=\sqrt{2}$$

$$B_2=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\quad0\right)^t,\ (0\quad0\quad1)^t,\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\quad-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad0\right)^t\right\},$$

siendo B_2 ortonormada.

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad P_2=\overbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\end{pmatrix}}^{(\mathbf{u_1'}\quad\mathbf{u_2'}\quad\mathbf{u_3'})},\ \text{cumpliéndose que:}$$

$\boxed{D=P_2^{-1}\cdot A\cdot P_2=P_2^{T}\cdot A\cdot P_2}$, por ser P_2 ortogonal

■

4.7 Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación que a cada punto P (x, y, z) le asocia su simétrico respecto al plano x=y. Se pide:

a) Expresión matricial de la aplicación lineal

b) Calcular la imagen del subespacio de ecuación x=0

(Septiembre 97)

Resolución:

a) Si se toma una base cualquiera de $\mathbb{R}^3$: B = $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ la matriz de la aplicación tiene como columnas ($(f(\mathbf{e_1}))_B$, $(f(\mathbf{e_2})_B$, $(f(\mathbf{e_3}))_B$).

Puesto que no se pide la matriz en una base concreta, se puede usar la base que se desee. Aquí se usará, por sencillez, la base usual de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por otra parte, según la aplicación dada, la imagen de un punto cualquiera

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$f(\mathbf{e_1}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{e_1})_B \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e_2}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{e_2})_B \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e_3}) = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{e_3})_B \overset{(1)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) por ser B la base usual

por lo tanto

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la expresión matricial

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b) $$S = \left\{ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ x = 0 \right\} = \left\{ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$f(S) = \left\{ \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

■

4.8 Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3, en el que se considera una base B = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$}. De un endomorfismo $f : V \to V$ se sabe que:

- El vector $\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}+2\cdot\mathbf{u_3}$ se transforma por *f* en sí mismo
- $U = \left\{ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V / \ x_2 - x_3 = 0 \right\}$ es un subespacio propio de *f*.
- La traza de la matriz A de *f* en la base B es 5.

a) Hallar los autovalores de *f*.

b) Hallar la matriz A de *f* en la base B.

(Enero 98)

Resolución:

a)

- Se sabe que la suma de los valores propios de un endomorfismo,o de su matriz asociada en cualquier base, coincide con la traza de dicha matriz:

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5$$

- $f(\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}+2\cdot\mathbf{u_3}) = 1.(\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}+2\cdot\mathbf{u_3}) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \text{ es un valor propio y} \\ \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 2\cdot\mathbf{u_3} \text{ es un vector propio asociado al valor propio } \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

- U es un subespacio propio de dimensión 2 (*dim* V-nº ecs. linealmente indep.=3-2) $\Rightarrow$ estará asociado a un valor propio λ_2 de multiplicidad algebraica $m_2 \geq 2$.

Teniendo en cuenta que el vector propio $\mathbf{u_1}+\mathbf{u_2}+2\cdot\mathbf{u_3} \notin U \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2$ y, puesto que no puede haber más de 3 valores propios, por ser el espacio vectorial (y su matriz cuadrada asociada) de dimensión 3:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1, m_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2, m_2 = 2 \end{cases}$$

b) $V(2) = \{\mathbf{u} \in V / x_2 - x_3 = 0\} \Rightarrow V(2) = \{(x_1\ x_2\ x_2)^t\}$

$$B_{V(2)_B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow B_{V(2)} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}+\mathbf{u_3}\}$$

$$\left.\begin{aligned} f(\mathbf{u_1}) &= 2\cdot\mathbf{u_1} \\ f(\mathbf{u_2}) + f(\mathbf{u_3}) &\overset{(1)}{=} 2\cdot\mathbf{u_2} + 2.\mathbf{u_3} \\ f(\mathbf{u_1}) + f(\mathbf{u_2}) + 2\cdot f(\mathbf{u_3}) &\overset{(1)}{=} \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 2.\mathbf{u_3} \end{aligned}\right\}$$

(1) Ya que, por ser la aplicación lineal:

$$\begin{cases} f(\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}) = f(\mathbf{u_2}) + f(\mathbf{u_3}) \\ f(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 2.\mathbf{u_3}) = f(\mathbf{u_1}) + f(\mathbf{u_2}) + 2\cdot f(\mathbf{u_3}) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior:

$$\begin{cases} f(\mathbf{u_1}) = 2\cdot\mathbf{u_1} \\ f(\mathbf{u_2}) = \mathbf{u_1} + 3\cdot\mathbf{u_2} + 2\cdot\mathbf{u_3} \\ f(\mathbf{u_3}) = -\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2} \end{cases}$$

$$A_B = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}^{((f(\mathbf{u_1}))_B \quad (f(\mathbf{u_2}))_B \quad (f(\mathbf{u_3}))_B)}$$

<u>Otra forma de resolver</u> (si no se recuerda que la traza es la suma de los valores propios):

Teniendo en cuenta las mismas razones anteriormente expuestas se llega al sistema:

$$\begin{cases} f(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 2\cdot\mathbf{u_3}) = 1\cdot(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} + 2\cdot\mathbf{u_3}) \\ f(\mathbf{u_1}) = \lambda_2\cdot\mathbf{u_1} \\ f(\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}) = \lambda_2\cdot\mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}) \end{cases}$$

Y si se plantea el sistema anterior trabajando en coordenadas en la base B:

$$\begin{cases} A_B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ A_B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A_B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ tr(A_B) = 5 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \end{cases} \quad \text{, siendo} \quad A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se obtiene así un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas, que se resuelve, obteniendo A_B y λ_2.

■

4.9 Dado un endomorfismo *f* en $\mathbb{R}^3$ del cual se sabe que, en una cierta base B, la matriz que lo caracteriza es simétrica y no tiene el cero como valor propio, obtener:

a) Dimensión y ecuaciones de Im *f*.

b) Dimensión y ecuaciones de Ker *f*.

c) Naturaleza de la transformación.

(Septiembre 98)

Resolución:

Sea A la matriz asociada a $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en la base B de $\mathbb{R}^3$. A es simétrica, real y, por lo tanto, diagonalizable ⇒

$$\exists \text{ P regular} \wedge \text{ D diagonal} / D = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

Se sabe que los elementos de la diagonal principal de D son los valores propios de A y puesto que 0 no es valor propio de A:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{siendo} : a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$$

a) $dim\,(\text{Im}\, f) = rg\, f = rg(A) \overset{(1)}{=} rg(D) = 3$

(1) Esto se puede justificar, por ejemplo, porque A y D son matrices semejantes, por lo tanto también son equivalentes (ya que la semejanza es un caso particular de la equivalencia) y, entonces, tienen el mismo rango.

dim (Im *f*) = 3 = *dim* $\mathbb{R}^3$ - nº ecs lin.indep ⇒ nº ecs lin.indep = 3-3 = 0,

es decir, el subespacio imagen no tiene ecuaciones cartesianas.

b) Por el teorema fundamental de las aplicaciones lineales:

$$dim\ (\mathrm{Ker}\, f) + dim\ (\mathrm{Im}\, f) = dim\ \mathbb{R}^3 = 3 \ \Rightarrow\ dim\ (\mathrm{Ker}\, f) = 0$$

$$\mathrm{B}_{\mathrm{Ker}\, f} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\mathrm{Ker}\ f = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 = x_2 = x_3 = 0 \right\}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow f \text{ es inyectiva} \\ \left.\begin{array}{l} dim\,(\mathrm{Im}\, f) = 3 = \dim R^3 \\ \mathrm{Im}\, f \subset R^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Im}\, f \equiv R^3 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ es biyectiva.}$$

Otras formas de resolver el problema:

- Una vez que se conoce que *dim* (Im *f*)=3, razonando como en el apartado c) se obtiene que Im *f* =$\mathbb{R}^3$ y por lo tanto el endomorfismo es sobreyectivo.

$$f \text{ sobreyectivo} \overset{(2)}{\Rightarrow} f \text{ es inyectivo} \overset{(3)}{\Rightarrow} \mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow f \text{ es biyectiva.}$$

(2)por ser f endomorfismo
(3) por la caracterización de las aplicaciones lineales inyectivas

Una vez conocido Ker *f,* su dimensión es inmediata. Para obtener las ecuaciones de Ker *f* e Im *f* se procede como se ha explicado en la resolución anterior.

- Otra forma:

$$\text{si 0 no es valor propio} \overset{(4)}{\Rightarrow} \mathrm{Ker}\ f = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow f \text{ inyectiva.}$$

(4)ver notas de clase curso 01-02

Una vez conocido el núcleo de la aplicación, calcular la imagen es sencillo aplicando el teorema fundamental o sabiendo (por la teoría de endomorfismos) que si un endomorfismo es inyectivo también es sobreyectivo (y por lo tanto Im *f* = $\mathbb{R}^3$).

Conocidos Ker *f* e Im *f,* obtener sus dimensiones, ecuaciones y naturaleza de la transformación es sencillo (ver las resoluciones anteriores)

■

4.10 Dado el endomorfismo $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en la base usual de $\mathbb{R}^3$, calcular una base de $f(S)$, siendo S un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación: $x_1+x_2+x_3=0$.

(Enero 99)

Resolución:

$$S = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$B_S = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Se sabe que si:

$$S = \text{Span}\left\{ \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2} \right\}$$

entonces

$$\boxed{f(S) = \text{Span}\ \{ f(\mathbf{u_1}), f(\mathbf{u_2}) \}}$$

$$f(\mathbf{u_1}) = A \cdot \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{u_2}) = A \cdot \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

puesto que $f(\mathbf{u_1})$ y $f(\mathbf{u_2})$ dependen linealmente

$$B_{f(S)} = \{ f(\mathbf{u_1}) \} = \{ (0\ 2\ -1)^t \}.$$

■

4.11 Sea λ un valor propio de A y sea $\mathbf{x}$ un vector propio asociado a λ. Utilizar el método de inducción para demostrar que λ^m es un valor propio asociado a A^m y el mismo $\mathbf{x}$ es un vector propio de A^m asociado a λ^m, $\forall$m. (Nota de ayuda: para la demostración partir de la definición de valor y vector propio)

(Septiembre 1999)

Resolución:

Se nos pide demostrar que:

$$A^m \cdot \mathbf{x} = \lambda^m \cdot \mathbf{x}$$

teniendo en cuenta que λ es un valor propio de A y $\mathbf{x}$ un vector propio de A asociado a λ.

Se demuestra para m=1:

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

Cierto, ya que ésta es la definición de valor y vector propio y se dice en el enunciado que λ es un valor propio de A y $\mathbf{x}$ un vector propio de A asociado a λ.

Se supone cierto para m=k (hipótesis de inducción):

$$A^k \cdot \mathbf{x} = \lambda^k \cdot \mathbf{x}$$

Suponiéndose cierto para m=k se demuestra que también es cierto para m=k+1. Es decir queremos demostrar que se cumple que $A^{k+1} \cdot \mathbf{x} = \lambda^{k+1} \cdot \mathbf{x}$

$$A^{k+1} \cdot \mathbf{x} = A \cdot (A^k \cdot \mathbf{x}) \overset{(1)}{=} A \cdot (\lambda^k \cdot \mathbf{x}) \overset{(2)}{=} \lambda^k \cdot (A \cdot \mathbf{x}) \overset{(3)}{=} \lambda^k \cdot (\lambda \cdot \mathbf{x}) =$$

$$= \lambda^{k+1} \cdot \mathbf{x} \Rightarrow \text{cierto para m=k+1} \Rightarrow \text{cierto } \forall \text{m.}$$

(1) Por la hipótesis de inducción
(2) Por las propiedades del producto de matrices por un escalar
(3) Por cumplirse para m=1

■

4.12 Sea A una matriz de dimensión 3x3 con valores propios 0, 2 y 4. Sean $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ vectores propios asociados respectivamente a los valores 0, 2, 4.

a) Encontrar bases de Ker *f* e Im *f* (siendo *f* el endomorfismo representado por A en una cierta base).

b) Resolver $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}$ (es decir, obtener $\mathbf{x}$).

(Nota de ayuda: expresar $\mathbf{x}$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$).

(Septiembre 99)

Resolución:

Datos: A_{3x3} $\begin{cases} \lambda_1 = 0, & \mathbf{u_1} \in V(0) \\ \lambda_2 = 2, & \mathbf{u_2} \in V(2) \\ \lambda_3 = 4, & \mathbf{u_3} \in V(4) \end{cases}$

a) Por tener A tres valores propios distintos, A es diagonalizable. Por lo tanto, A es semejante a una matriz diagonal, en cuya diagonal principal estarán los valores propios de A:

$$A \sim D, \text{ siendo } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$dim\,(\mathrm{Im\,f}) = rg(A) \overset{(1)}{=} rg(D) = 2$$

(1) Ya que la dimensión del subespacio imagen coincide con el rango de la matriz que caracteriza al endomorfismo en una base cualquiera y, en una base de vectores propios, esta matriz sería D.

$$dim\,(\mathrm{Ker}\,f) + dim\,(\mathrm{Im}\,f) \overset{(2)}{=} dim\,\mathbb{R}^3 = 3 \quad \Rightarrow \quad dim\,(\mathrm{Ker}\,f) = 1$$

(2) Tteorema fundamental de las aplicaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u_1} \in V(0) \Rightarrow f(\mathbf{u_1}) = 0 \cdot \mathbf{u_1} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u_1} \in \mathrm{Ker}\,f \\ \text{además, según se ha calculado}: dim\,(\mathrm{Ker}\,f) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow B_{\mathrm{Ker}\,f} = \{\mathbf{u_1}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u_2} \in V(2) \Rightarrow f(\mathbf{u_2}) = 2 \cdot \mathbf{u_2} \Rightarrow \mathbf{u_2} \in \mathrm{Im}\,f \\ \mathbf{u_3} \in V(4) \Rightarrow f(\mathbf{u_3}) = 4 \cdot \mathbf{u_3} \Rightarrow \mathbf{u_3} \in \mathrm{Im}\,f \\ \text{además, según se ha calculado } dim\,(\mathrm{Im}\,f) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow B_{\mathrm{Im}f} = \{\mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$$

b) $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}$ (*)

Los vectores $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$, ya que son 3 vectores linealmente independientes, por ser vectores propios asociados a valores propios distintos. Por lo tanto, cualquier vector perteneciente a $\mathbb{R}^3$ se podrá expresar como combinación lineal de los vectores de dicha base:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{u_1} + \beta \cdot \mathbf{u_2} + \gamma \cdot \mathbf{u_3} \text{ y, sustituyendo en (*)}$$

$$A \cdot (\alpha \cdot \mathbf{u_1} + \beta \cdot \mathbf{u_2} + \gamma \cdot \mathbf{u_3}) \overset{(3)}{=} \alpha \cdot A \cdot \mathbf{u_1} + \beta \cdot A \cdot \mathbf{u_2} + \gamma \cdot A \cdot \mathbf{u_3} \overset{(4)}{=}$$

$$\alpha \cdot \lambda_1 \cdot \mathbf{u_1} + \beta \cdot \lambda_2 \cdot \mathbf{u_2} + \gamma \cdot \lambda_3 \cdot \mathbf{u_3} = \alpha \cdot 0 \cdot \mathbf{u_1} + \beta \cdot 2 \cdot \mathbf{u_2} + \gamma \cdot 4 \cdot \mathbf{u_3} \overset{(5)}{=} \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}$$

(3) Por ser lineal la aplicación(o por las propiedades de matrices)
(4) Por ser $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ vectores propios asociados a los valores propios 0,2,4 respectivameante
(5) De (*)

Resultando: $2 \cdot \beta \cdot \mathbf{u_2} + 4\gamma \cdot \mathbf{u_3} = \mathbf{u_2} + \mathbf{u_3}$

$$\overset{(6)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2\cdot\beta = 1 \\ 4\cdot\gamma = 1 \\ \forall\alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \wedge \gamma = \frac{1}{4}, \forall\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

(6) Por ser $\boldsymbol{u}_2$ y $\boldsymbol{u}_3$ linealmente indep

■

4.13 Sea A una matriz de orden 3x3 cuyos valores propios son: λ_1=2 (doble) y λ_2=-3.

a) ¿Es A inversible? Razonar la respuesta.

b) ¿Es A simétrica? Razonar la respuesta.

c) ¿Es A diagonalizable? Razonar la respuesta.

(Enero 2000)

Resolución:

a) Sí es inversible, ya que se sabe que:

$$|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 2 \cdot 2 \cdot (-3) = -12 \neq 0$$

b) No tiene por qué ser simétrica. Puede haber matrices que no siendo simétricas tengan esos valores propios; por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

c) No tiene por qué ser diagonalizable.

A será diagonalizable $\Leftrightarrow$ dim V(2) = 2 [(1)] = multiplicidad algebraica y, con los datos que se tiene, no puede saberse. Por ejemplo, la siguiente matriz tiene los valores propios indicados y no es diagonalizable:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(1) También es necesario que dim V(-3) = 1, pero esto se va a cumplir seguro, por ser –3 un valor propio simple.

■

4.14 Sea f un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$, del cual se sabe:

- El vector **x** se transforma en sí mismo.
- El vector **y** es un vector propio asociado a 2.
- El vector **z** ∈ Ker *f* .

a) Hallar la matriz de la aplicación en la base {**x**, **y**, **z**}.

b) Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de *f.*

c) ¿Son núcleo e imagen suplementarios?.

d) Naturaleza de la transformación.

(Enero 2000)

Resolución:

Interpretación de los datos:

Se tiene una aplicación $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

y una base B = {**x**, **y**, **z**},

y se sabe que:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Rightarrow (f(\mathbf{x}))_B = (1 \quad 0 \quad 0)^t$$
$$f(\mathbf{y}) = 2\mathbf{y} \Rightarrow (f(\mathbf{y}))_B = (0 \quad 2 \quad 0)^t$$
$$\mathbf{z} \in \text{Ker } f \Rightarrow f(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \Rightarrow (f(\mathbf{z}))_B = (0 \quad 0 \quad 0)^t$$

además, también se deduce que $\mathbf{x} \in \text{Im } f \wedge \mathbf{2y} \in \text{Im } f$ (y, por lo tanto, $\mathbf{y} \in \text{Im } f$)

a) En la base B = {**x**, **y**, **z**} la matriz de *f* es:

$$A_B = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{((f(\mathbf{x}))_B \quad (f(\mathbf{y}))_B \quad (f(\mathbf{z}))_B)}$$

b)

i) *dim* (Im *f*)= *rg*(A) = 2

Por lo tanto, una base de Im *f* estará formada por dos vectores linealmente independientes pertenecientes a la imagen, por ejemplo:

$$B_{\text{Im } f} = \{\mathbf{x}, 2\mathbf{y}\}$$

o también:

$$B_{\text{Im } f_B} = \{(1 \quad 0 \quad 0)^t, (0 \quad 2 \quad 0)^t\}$$

ii) Aplicando el Teorema Fundamental de las Aplicaciones Lineales:

$dim\,(\mathrm{Ker}\,f)+ dim\,(\mathrm{Im}\,f)= dim\ \mathbb{R}^3 \Rightarrow dim\,(\mathrm{Ker}\,f)= 3 - 2 = 1$, luego

$$B_{\mathrm{Ker}\,f}=\{\mathbf{z}\}$$

ya que en el enunciado se nos dice que $\mathbf{z} \in \mathrm{Ker}\,f$

o también:

$$B_{\mathrm{Ker}\,f\ B} = \left\{(0 \quad 0 \quad 1)^t\right\}$$

c) $\mathrm{Ker}\,f$ e $\mathrm{Im}\,f$ son suplementarios $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f = \{\mathbf{0}\} \\ \mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}\,f = \mathbb{R}^3 \end{cases}$

i) $\mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}\,f = \mathrm{Span}\{(1\ 0\ 0)^t, (0\ 2\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t\}$

Se comprueba si son linealmente independientes:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{son lin.indep.} \Rightarrow \text{son base de } (\mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}\,f)$$

$$\Rightarrow \dim\,(\mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}f\,)=3$$

$$\left.\begin{matrix} dim\,(\mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}\,f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \\ (\mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}\,f) \subset \mathbb{R}^3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}\,f \equiv \mathbb{R}^3$$

ii) $\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f = \{\mathbf{0}\}$, ya que los vectores de sus bases son linealmente independientes, como se ha comprobado anteriormente.

Otra forma de justificarlo:

Se sabe que

$dim\,(\mathrm{Ker}\,f + \mathrm{Im}\,f\,) = dim\,(\mathrm{Ker}\,f) + dim\,(\mathrm{Im}\,f) - dim\,(\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f)$

$\Rightarrow dim\,(\mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\,f \cap \mathrm{Im}\,f = \{\mathbf{0}\}$

Teniendo en cuenta los dos resultados anteriores, se concluye que Núcleo e Imagen son suplementarios.

d) No es inyectiva, puesto que $\mathrm{Ker}\,f \neq \{\mathbf{0}\}$.

No es sobreyectiva, puesto que $\mathrm{Im}\,f \neq \mathbb{R}^3$.

Por lo tanto, tampoco es biyectiva. Es un endomorfismo en $\mathbb{R}^3$ no inyectivo ni sobreyectivo.

■

4.15 Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de la cual se sabe que, trabajando en una cierta base B = $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$:

- La imagen del vector $(0\ 0\ 1)^t$ es proporcional al vector $(1\ 3\ 5)^t$.
- El núcleo está definido por la ecuación $x_1+x_3=0$ ($\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^t$).
- La traza de la matriz que caracteriza a la aplicación es igual a 6.

Se pide:

a) Obtener la matriz de la aplicación en la base B de $\mathbb{R}^3$.

b) Ecuaciones cartesianas del subespacio imagen en la base B.

c) Ecuación del núcleo en la base B' = $\{(1\ 0\ 0)^t, (1\ 1\ 0)^t, (1\ 1\ 1)^t\}$. (Las coordenadas de los vectores de B' están dadas en la base B}.

(Septiembre 2000)

Resolución:

a) La matriz de la aplicación *f* en la base B es de la forma:

$$A_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_3 = 0 \right\} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / x_3 = -x_1, \forall x_2 \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\text{Ker } f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{u_1} \in \text{Ker } f \Rightarrow A \cdot (\mathbf{u_1})_B = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{u_2} \in \text{Ker } f \Rightarrow A \cdot (\mathbf{u_2})_B = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Además:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecs. (1), (2) y (3):

$$A_B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 3\alpha & 0 & 3\alpha \\ 5\alpha & 0 & 5\alpha \end{pmatrix}$$

Sabiendo que : $tr(A)=6 \Rightarrow \alpha+5\alpha=6 \Rightarrow \alpha=1$

Por lo tanto

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Otra forma de calcular la matriz:

Igual que antes, se calcula la base del núcleo y, a continuación:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{u_1})_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u_1} = \mathbf{v_1} - \mathbf{v_3} \\ (\mathbf{u_2})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} \\ (\mathbf{u_3})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u_3} = \mathbf{v_3} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{u_1} \in \text{Ker } f \Rightarrow f(\mathbf{u_1}) = f(\mathbf{v_1} - \mathbf{v_3}) \overset{(3)}{=} f(\mathbf{v_1}) - f(\mathbf{v_3}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u_2} \in \text{Ker } f \Rightarrow f(\mathbf{u_2}) = f(\mathbf{v_2}) = \mathbf{0} \\ \qquad\qquad\quad f(\mathbf{u_3}) = f(\mathbf{v_3}) = \alpha \cdot (\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2} + 5\mathbf{v_3}) \end{array}\right\}$$

(3) Por ser f lineal

Resolviendo el sistema se obtienen $f(\mathbf{v_1})$, $f(\mathbf{v_2})$, $f(\mathbf{v_3})$, cuyas coordenadas en la base B serán las columnas de A_B. Dicha matriz quedará en función del parámetro α, que se calculará haciendo uso del dato $tr(A)=6$.

b) $dim\ (\text{Im}\, f) = rg(A) = 1$

Puesto que el subespacio imagen sólo tiene dimensión 1, una base de la imagen estará formada por cualquier vector perteneciente a dicho subespacio.

Se sabe que todos son proporcionales al $(1\ 3\ 5)^t$, es decir, todos los vectores de la imagen son de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 3\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix}$$

por lo tanto, por simple observación en este caso, se ve que las ecuaciones cartesianas son:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 \\ x_3 &= 5x_1 \end{aligned}\right\}$$

c) La relación entre las coordenadas de un vector en las bases B ($\mathbf{x}_B$) y B' ($\mathbf{x}_{B'}$) es, a través de la matriz de cambio de base P, la siguiente:

$$\mathbf{x}_B = P_{B\to B'}\cdot\mathbf{x}_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' + x_2' + x_3' \\ x_2 = \quad x_2' + x_3' \\ x_3 = \quad\quad x_3' \end{cases} \qquad (4)$$

Sustituyendo las relaciones (4) en la ec. del núcleo en la base B ($x_1+x_3=0$), se obtiene la ec. del núcleo en la base B'.

$$(x_1' + x_2' + x_3') + x_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1' + x_2' + 2x_3' = 0 \qquad \text{ec. Ker } f \text{ en B'}$$

■

4.16 Demostrar que los autovectores de una matriz cuadrada de orden n asociados a autovalores distintos son linealmente independientes.

(Enero 97)

5

TRIANGULARIZACIÓN POR SEMEJANZA

5.1

a) Estudiar según los valores de a, en qué casos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

b) En el caso de $a = -1$ obtener la matriz mas sencilla posible semejante a A, así como la matriz de semejanza, P, correspondiente.

(Febrero de 1996)

Resolución:

a) Valores propios de A :

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\cdot[(1-\lambda)\cdot(2-\lambda)-6] =$$

$$(a-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 3\lambda - 4)$$

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = a \\ \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3^2 + 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} & \lambda = 4 \\ & \lambda = -1 \end{cases}$$

Casos:

i) $a \neq -1 \wedge a \neq 4$ Matriz diagonalizable $\begin{cases} \lambda = a & m = 1 & \mu = 1 \\ \lambda = -1 & m = 1 & \mu = 1 \\ \lambda = 4 & m = 1 & \mu = 1 \end{cases}$.

ii) $a = 4 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 & m_1 = 1 & \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 4 & m_2 = 2 & \mu_2 = ?? \end{cases}$ **Caso 1.**

iii) $a = -1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 & m_1 = 2 & \mu_1 = ?? \\ \lambda_2 = 4 & m_2 = 1 & \mu_2 = 1 \end{cases}$ **Caso 2.**

Caso 1: $a = 4$.

$V(\lambda_2 = 4)$:

$$(A - 4I)\cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$dim\ V(4) = 3 - rg(A - 4I) = 3 - 1 = 2 = m_2 \Rightarrow A$ es diagonalizable

Caso 2: $a = -1$.

$V(\lambda_1 = -1)$:

$$(A+I)\cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$dim\ V(-1) = 3\text{-}rg(A+I) = 3\text{-}2 = 1 < m_1 \Rightarrow$ A no es diagonalizable

b) Para $\mathbf{a} = -1$ la matriz no es diagonalizable, pero si es triangularizable, por lo que se puede encontrar matrices J (triangular superior) y P (regular) que cumplan que $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

$V(\lambda_1=-1)$; resolviendo el sistema planteado en el apartado anterior se obtiene que:

$$\mathbf{x} \in V(\lambda_1 = -1) \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \ x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{V(\lambda_1=-1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$V_2(\lambda_1 = -1)$:

$$(A+I)^2 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = -\frac{2}{3} x_2 = 0$$

$$\mathbf{x} \in V_2(\lambda_1 = -1) \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -\frac{2}{3} x_2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad B_{V_2(\lambda_1=-1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$V(\lambda_2 = 4)$:

$$(A - 4I)\cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = x_3 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{x} \in V(\lambda_2 = 4) \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}; \quad B_{V(\lambda_2=4)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Columnas de la matriz P:

$$\mathbf{u}_2 \in V_2(\lambda_1 = -1) - V(\lambda_1 = -1) \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_1 = (\mathrm{A}+\mathrm{I})\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u}_3 \in V(\lambda_2 = 4) \Rightarrow \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

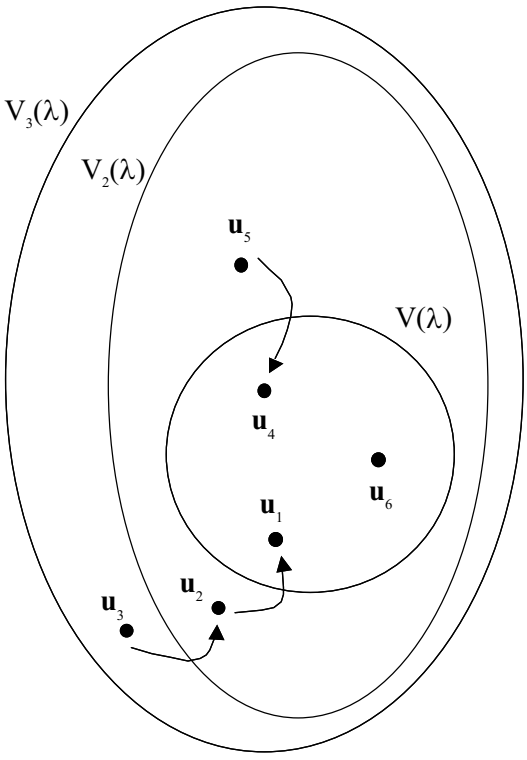
$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

■

5.2 Sea A una matriz cuadrada de orden seis de valor propio $\lambda = 0$ de multiplicidad algebraica seis. Obtener la forma de Jordan de A y explicar cómo se obtiene la base correspondiente, sabiendo que *dim*($V_1(0)$) = 3, *dim*($V_2(0)$) = 5, *dim*($V_3(0)$)=6.

(Febrero de 1996)

Resolución:



Una vez que se ha obtenido el subespacio máximo de λ, $V_3(\lambda)$, se procede a elegir los vectores que formaran la base de R^6.

El número de vectores del subespacio máximo que se debe tomar es igual a *dim*($V_3(\lambda)$) - *dim*($V_2(\lambda)$), es decir, un vector.

Se elige un vector $\mathbf{u_3}$ de entre los vectores de $V_3(\lambda)$ que no pertenecen a $V_2(\lambda)$.

Partiendo de este vector, $\mathbf{u_3}$, se obtiene un conjunto de vectores de los subespacios $V_2(\lambda)$ y $V(\lambda)$ que dan lugar a un bloque elemental de Jordan de dimensión tres en la matriz J.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_2 = (\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})\mathbf{u}_3 \Rightarrow \mathbf{u}_2 \in \mathrm{V}_2(\lambda) \\ \mathbf{u}_1 = (\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})\mathbf{u}_2 \Rightarrow \mathbf{u}_1 \in \mathrm{V}(\lambda) \end{cases}$$

A continuación se pasa al subespacio $V_2(\lambda)$, del que ya se ha utilizado el vector $\mathbf{u_2}$, La diferencia de dimensión entre $V_2(\lambda)$ y $V(\lambda)$ es dos por tanto se debe disponer de dos vectores de $V_2(\lambda)$, de los cuales uno es $\mathbf{u_2}$, por tanto solo se puede elegir un

vector $\mathbf{u_5}$ que se obtiene de entre los vectores que pertenecen a $V_2(\lambda)$ y no pertenecen a $V(\lambda)$ siendo además linealmente independiente con $\mathbf{u_2}$. Partiendo de $\mathbf{u_5}$ se obtiene un vector de $V(\lambda)$ lo que proporciona un bloque elemental de Jordan de dimensión dos.

$$\mathbf{u}_4 = (A - \lambda I)\mathbf{u}_5 \Rightarrow \mathbf{u}_4 \in V(\lambda) .$$

Para obtener una base de $\mathbb{R}^6$ se necesitan seis vectores linealmente independientes, se dispone de cinco, el sexto se elige de $V(\lambda)$, ya que es un subespacio de dimensión tres del que solo se han tomado dos vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_4}$. Por tanto $\mathbf{u_6}$ pertenece a $V(\lambda)$ y es linealmente independiente a todos los demás. Este vector da lugar a una matriz elemental de Jordan de dimensión uno.

La matriz de Jordan se obtiene por yuxtaposición de las tres matrices elementales de Jordan colocadas en la diagonal principal, mientras la matriz de paso tiene por columnas los vectores de la base de $\mathbb{R}^6$ que se han calculado.

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

■

5.3 Sea la matriz A real siguiente: $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ siendo $b \neq 0$.

a) Encontrar los valores propios de A.

b) ¿ En qué casos es diagonalizable? Razonar.

c) Para a=2 encontrar la matriz más sencilla posible semejante a A, así como la matriz P de semejanza.

(Septiembre de 1996)

Resolución:

a) Por ser A triangular los valores propios coinciden con los elementos de la diagonal principal. $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

b) Diagonalización de A.

Caso 1 : $\forall a \neq 1,2 \Rightarrow$ A tiene tres valores propios distintos, por tanto es diagonalizable.

Caso 2 : a = 1.

A es diagonalizable si y solo si $dim(V(1))=2 \Leftrightarrow dim(\mathbb{R}^3) - rg(A-I) = 2$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A-I) = 2.$$ Por tanto A no es diagonalizable.

Caso 3 : a = 2

A es diagonalizable si y solo si $dim\,(V(2))=2 \Leftrightarrow dim(\mathbb{R}^3) - rg(A-2I) = 2$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg(A-2I) = 1 \Rightarrow \forall b$$ la matriz A es diagonalizable.

c) Matriz semejante a A para el caso a=2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \lambda_1=1(\text{simple}), \lambda_2=2(\text{doble}).$$

$$V(1): \quad (A-I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + bx_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$B_{V(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$V(2): \quad (A-2I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 0.$$

$$B_{V(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Por tanto la matriz mas sencilla semejante a A es una matriz diagonal con los valores propios en la diagonal principal. La matriz P que relaciona A y D es una matriz que tiene por columnas los autovectores de A colocados en las columnas correspondientes en función de la posición que ocupan los valores propios en la matriz D.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \; P = \begin{pmatrix} -b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

5.4 Sabiendo que la forma de Jordan de una matriz A es: $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcular, de forma razonada, el determinante de A^7.

b) Valores propios λ_i de la matriz A, indicando para cada uno de ellos:

i) multiplicidad algebraica m_i.

ii) multiplicidad geométrica μ_i.

iii) Dimensión de los subespacios $V_p(\lambda_i)=Ker(A-\lambda_i I)^p$ que se calculan para obtener la matriz P de semejanza.

c) Dimensiones de los subespacios núcleo e imagen del endomorfismo *f* asociado a la matriz A.

(Septiembre de 1996)

Resolución:

a) *det*(A^7);

$J=P^{-1} A P \Rightarrow A=P J P^{-1}$.

$A^7 =(P J P^{-1}) (P J P^{-1})…….. (P J P^{-1}) = P J^7 P^{-1}$.

$$\left|A^7\right| = \left|PJ^7P^{-1}\right| = \left|P\right| \left\|J^7\right\| \left|P^{-1}\right| = \left|J^7\right| = \left|J\right|^7 \qquad ; \qquad \left|P^{-1}\right| = \frac{1}{\left|P\right|}.$$

Por ser J una matriz triangular *det*(J) = $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2 =2$.

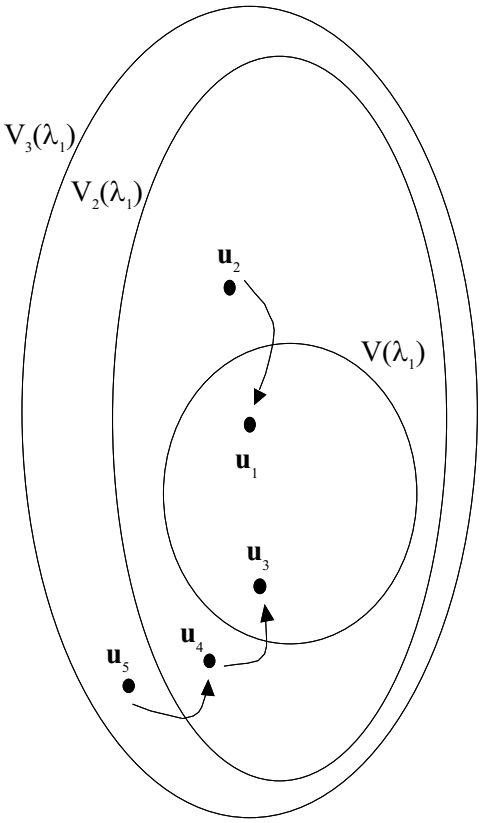
Por tanto *det*$(A)^7$ = *det*$(J)^7 =2^7$.

b) Valores propios de A.

Todas las matrices semejantes tienen los mismos valores propios, por tanto, los valores propios de A coinciden con los de J. Por ser J una matriz triangular los valores propios coinciden con los elementos de la diagonal principal. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2=2$.

i) Las multiplicidades algebraicas coinciden con el número de veces que se repite λ en la diagonal principal. $m_1=5$, $m_2=1$.

ıı) Las multiplicidades geométricas se pueden saber analizando los bloques elementales de Jordan, habrá tantos vectores propios como bloques elementales haya. En nuestro caso J tiene tres bloques elementales de Jordan, dos para λ_1 y uno para λ_2 . $\mu_1=2$, $\mu_2=1$.



iii) Para $\lambda_1 = 1$:

El subespacio máximo tiene dimensión igual a la multiplicidad algebraica; existen tantos subespacios distintos para λ_1 como la dimensión del bloque elemental de Jordan de mayor dimensión para ese autovalor, en nuestro caso dimensión tres.

Cada bloque indica cuantos vectores se eligen de cada subespacio. El primer bloque tiene dimensión dos, por tanto tomamos un vector de $V_2(\lambda_1)$ y otro de $V(\lambda_1)$. El segundo bloque tiene dimensión tres, por tanto se eligen vectores de $V_3(\lambda_1)$, $V_2(\lambda_1)$ y $V(\lambda_1)$.

Como todos los vectores deben ser linealmente independientes y cada subespacio esta incluido en el siguiente, las dimensiones de los subespacios sucesivos son:

$$dim(V_3(\lambda_1))=5.$$

$$dim(V_2(\lambda_1))=4.$$

$$dim(V(\lambda_1))=2.$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$dim\ V(\lambda_2)=\mu_2=1$$

c) $dim(\mathrm{Ker}(f))=0$, puesto que el cero no es valor propio de la matriz A.

Del teorema fundamental de las aplicaciones lineales se sabe que:

$$dim(\mathbb{R}^6)= dim(\mathrm{Ker}\, f)+ dim(\mathrm{Im}\, f).$$

Por tanto: $dim(\mathrm{Im}\, f)= dim(\mathbb{R}^6) - dim(\mathrm{Ker}\, f) =6 – 0 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, f \equiv \mathbb{R}^6$

■

5.5 Calcular la matriz mas sencilla semejante a la matriz A, así como la matriz de paso correspondiente. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Enero de 1997)

Resolución:

Valores propios:

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1-\lambda)(3-\lambda)\left[(2-\lambda)^2-1\right]=0\,.$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\ \ m_1=2\\ \lambda_2=3\ \ m_2=2\end{cases}.$$

- λ_1:

$$V(\lambda_1):\ \ (A-\lambda_1 I)\,\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_1+x_2+x_4=0\\ 2x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_4=0\\ x_3=0\\ x_2=-x_1\end{cases}\qquad ;B_{v(\lambda_1)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Como la dimensión del subespacio propio no coincide con la multiplicidad algebraica se continúa calculando subespacios sucesivos hasta conseguir uno de dimensión dos.

$$V_2(\lambda_1)\Rightarrow(A-\lambda_1 I)^2\,\mathbf{x}=\mathbf{0};$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&1\\0&0&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0&1\\2&2&0&1\\0&0&4&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_4=0\\ 2x_3+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_4=-2x_3\\ x_2=x_3-x_4\end{cases};\qquad B_{V_2(\lambda_1)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\-2\end{pmatrix}\right\}$$

- λ_2:

$$V(\lambda_2):(A-\lambda_2 I)\,\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\1&-1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}; \qquad B_{V(\lambda_2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para cada valor propio se han obtenido subespacios de dimensión igual a la multiplicidad algebraica.

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \;\; m_1 = 2 \;\; \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \;\; m_2 = 2 \;\; \mu_2 = 2 \end{cases}$$

Para λ_1 se debe elegir un vector de $V_2(\lambda_1)$ que no pertenezca a $V(\lambda_1) \Rightarrow$

$$\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$\mathbf{u_1}$ se obtiene mediante la expresión $\mathbf{u_1} = (A - \lambda_1 I)\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Los vectores $\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{u_4}$ son los vectores propios de λ_2. $\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por tanto la matriz P tiene por columnas los cuatro vectores calculados u_i , mientras la matriz J tiene un bloque elemental de Jordan de orden dos correspondiente a λ_1 y dos bloques elementales de Jordan de orden uno correspondientes a λ_2.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad J = \left(\begin{array}{cc:c:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

■

5.6 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define un endomorfismo mediante los siguientes datos:

- $\mathbf{v_1} = (1\ 0\ 1)^t$ es un vector propio asociado al valor propio λ=-2.
- $\mathbf{v_2} = (0\ 1\ 0)^t$ pertenece al núcleo de la aplicación.
- $f(1\ 1\ 0)^t = (0\ 1\ 0)^t$.

a) Calcular la matriz del endomorfismo.

b) Hallar la matriz más sencilla semejante a la calculada en el apartado anterior así como la base correspondiente.

(Septiembre 97)

Resolución:

a) Puesto que no se especifica para qué base calcular la matriz del endomorfismo, se puede hacer para la que se desee, siempre que se indique cuál es la elegida. Por ejemplo, si se calcula para la base usual:

$$B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

se necesita conocer las imágenes de los vectores de dicha base, las cuales se pueden obtener a partir de los datos de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{v_1}) = f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}) \overset{(1)}{=} f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_3}) \overset{(2)}{=} -2\cdot(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_3}) = \\ \quad -2\cdot\mathbf{e_1} - 2\cdot\mathbf{e_3} \\ f(\mathbf{v_2}) = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\ f(\mathbf{v_3}) = f(\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}) \overset{(1)}{=} f(\mathbf{e_1}) + f(\mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{e_2} \end{array}\right\}$$

(1) Por ser f aplicación lineal
(2) Por ser $\mathbf{v_1}$ vector propio asociado al valor propio λ=-2

y resolviendo el sistema se obtiene:

$$f(\mathbf{e_1}) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{e_1})_B \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e_2}) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{e_2})_B \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e_3}) = \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{e_3})_B \overset{(3)}{=} \begin{pmatrix}-2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

(3) En este caso, por ser B la base usual, coinciden $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_{1B}}$

$$A_B = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}^{(f(\mathbf{e_1})_B \quad f(\mathbf{e_2})_B \quad f(\mathbf{e_3})_B)}$$

Otra forma de resolver el problema:

Se comprueba si los vectores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$=$(1\ 1\ 0)^t$ son l.i y si lo son, forman una base $B_1 = \{ \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3} \}$. La matriz de la aplicación en dicha base se calcula fácilmente, puesto que las imágenes de esos vectores son dato.

$$A_{B_1} = (f(\mathbf{v_1})_{B_1} \ f(\mathbf{v_2})_{B_1} \ f(\mathbf{v_3})_{B_1})$$

Puesto que no se especificaba en el enunciado una base para la cual calcular la matriz, se podría dar la matriz anterior como respuesta. No obstante, si se deseara calcular la matriz en la base canónica, se podría hacer a partir de A_{B_1} teniendo en cuenta la relación de semejanza entre ellas:

$$A_{B_1} \overset{(3)}{=} P_{B\to B_1}^{-1} \cdot A_B \cdot P_{B\to B_1} \Rightarrow A_B = P_{B\to B_1} \cdot A_{B_1} \cdot P_{B\to B_1}^{-1}$$

siendo $P_{B\to B_1}$ la matriz de paso de la base B a la base B_1:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Se podía haber planteado directamente:

$$A_B = P_{B_1\to B}^{-1} \cdot A_{B_1} \cdot P_{B_1\to B}$$

pero haría falta calcular la matriz de paso de B_1 a B, lo que en este caso es más costoso

b)

Cálculo de los valores propios de la matriz A:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)\cdot(-\lambda)^2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 & \text{Doble} \\ \lambda = -2 & \text{Simple} \end{cases}$$

Cálculo de los vectores propios:

V(λ=-2)

Como dato del problema se indica que el vector $(1\ 0\ 1)^t$ es vector propio asociado a λ=2, Como es un valor propio de multiplicidad algebraica uno, la base del subespacio propio esta formada por un solo vector, por tanto:

$$B_{V(\lambda=-2)} = \{(1\ 0\ 1)^t\}$$

V(λ=0)

$$(A\text{-}0I)\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0};\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_3=0\\x_1-x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x_1=x_3=0$$

$$B_{V(\lambda=0)}=\{(0\ 1\ 0)^t\}$$

La matriz A no es diagonalizable ya que la multiplicidad algebraica de $\lambda=0$ es dos mientras que la multiplicidad geométrica,(dimensión de $V(\lambda=0)$) es uno.

Por tanto se debe buscar un subespacio asociado a $\lambda=0$ de dimensión dos.

$V_2(\lambda=0)$:

$$(A\text{-}0I)^2\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0};\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x_3=0\ ;\ B_{V2(\lambda=0)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Calculo de la matriz J:

Para $\lambda=-2$ hay un vector propio, por tanto $\mathbf{u_1}=(1\ 0\ 1)^t$.

Para $\lambda=0$ se deben tomar dos vectores $\mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_3}$.

$\mathbf{u_3}$ pertenece a $V_2(0)$ pero no pertenece a $V(0)$.

$$\mathbf{u_3}=(1\ 0\ 0)^t;$$

$$\mathbf{u_2}=(A\text{-}0I)\cdot\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\1&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

La matriz P tiene por columnas los vectores $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad;\quad J=\left(\begin{array}{c|cc}-2&0&0\\\hline0&0&1\\0&0&0\end{array}\right)$$

■

5.7 Calcular la forma de Jordan de la matriz $A \in E_{4x4}$ ($\mathbb{R}$), calcular la base correspondiente.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&3&0\\1&2&0&3\\0&0&2&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

(Enero de 1998)

Resolución:

Valores propios de la matriz A; $|A-\lambda I|=0$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^4=0 \Rightarrow \lambda=2$$ multiplicidad algebraica = 4.

Vectores propios de A; $(A-\lambda I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ Se calculan para $\lambda=2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3=0 \\ x_1+3x_4=0 \end{cases} \Rightarrow V(\lambda=2)=\left\{ a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / a,b\in R \right\}.$$

dim$(V(\lambda=2))=2 \Rightarrow$ multiplicidad geométrica $\mu=2<4 \Rightarrow$ Matriz no diagonalizable.

Se pasa a estudiar subespacios sucesivos de $\lambda=2$ hasta llegar a uno de dimensión cuatro.

$V_2(\lambda=2)$: $(A-\lambda I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(A-\lambda I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0};\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 6\,x_3=0;$$

$$V_2(\lambda=2)=\left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / a,b,c\in R \right\}.$$

Se debe calcular un subespacio de dimensión mayor, $V_3(\lambda=2)$ hasta llegar a la dimensión máxima, igual a la multiplicidad algebraica, *dim*$(V_3(\lambda=2))=4$.

$V_3(\lambda=2)$: $(A-\lambda I)^3\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

$$(A-\lambda I)^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$V_3\,(\lambda=2)=\left\{ a\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} / a,b,c,d\in R\right\}.$$

Para obtener la base de $\mathbb{R}^4$, se comienza eligiendo un vector de V_3 que no pertenezca a V_2.

$$\mathbf{u_4}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

A continuación se realiza un proceso de calculo de vectores de V_2 y $V(\lambda)$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{u_3}=(A-\lambda I)\cdot\mathbf{u_4}=\begin{pmatrix}0&0&3&0\\1&0&0&3\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix};\ \mathbf{u_3}\in V_2(\lambda).$$

$$\mathbf{u_2}=(A-\lambda I)\cdot\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0&0&3&0\\1&0&0&3\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\\0\end{pmatrix};\ \mathbf{u_2}\in V(\lambda).$$

Se debe elegir un nuevo vector para formar una base de $\mathbb{R}^4$. Como la dimensión de $V(\lambda)$ es dos y solo se ha utilizado un vector propio, $\mathbf{u_2}$, se debe escoger un vector de $V(\lambda)$ linealmente independiente con $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{u_4}$.

$$\mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix};\ \mathbf{u_1}\in V(\lambda).$$

La matriz J está formada por dos bloques elementales de Jordan, uno de dimensión uno, correspondiente a el vector $\mathbf{u_1}$ y otro de dimensión tres correspondiente a los vectores $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{u_4}$.

$$J=\left(\begin{array}{c|ccc}2&0&0&0\\\hline0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{array}\right);\qquad P=\begin{pmatrix}-3&0&3&0\\0&6&0&0\\0&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}.$$

■

5.8 Discutir en función de los parámetros α y $\beta \in \mathbb{R}$ la diagonalización de la matriz A. En los casos en que A no sea diagonalizable, hallar la forma de jordan de A, así como la matriz P de paso correspondiente a la base de Jordan considerada.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Septiembre de 1998)

Resolución:

La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea diagonalizable es que la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio coincidan; $m_i = \mu_i$.

Por tanto, se deben analizar todos los valores propios de la matriz A y ver si se cumple la condición anterior.

a) Valores propios de A:

Por ser una matriz diagonal los valores propios coinciden con los elementos de la diagonal principal.

$$\lambda_1=-1 \quad m_1=2.$$

$$\lambda_2=2 \quad m_2=1.$$

Para todos los valores propios de multiplicidad algebraica igual a uno se cumple la condición. Es decir $m_2 = \mu_2$.

Se debe analizar por tanto el valor propio λ_1.

b) Vectores propios:

$$V(\lambda_1) \Rightarrow (A-\lambda_1 I)\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La dimensión del subespacio $V(\lambda_1)$ debe ser dos para que la matriz sea diagonalizable, así la multiplicidad algebraica y geométrica coincidirán.

$$dim(V(\lambda_1))=3-rg(A-\lambda_1 I)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow \text{rango}(A-\lambda_1 I)=1 \Rightarrow \text{Diagonalizable} \\ \alpha \neq 0 \Rightarrow \text{rango}\,(A-\lambda_1 I)=2 \Rightarrow \text{no Diagonalizable} \end{cases}.$$

La matriz A, no es diagonalizable para $\alpha \neq 0 \wedge \forall\, \beta$, por lo que calcularemos la matriz de Jordan.

$V(\lambda_1=-1)=Ker(A+I)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x_2 = 0 \xrightarrow{\alpha \neq 0} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$V(\lambda_1=-1)=\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$V_2(\lambda_1=-1)=\text{Ker}(A+I)^2=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A+I)^2\ \mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

$$(A+I)^2=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 3\beta \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$(A+I)^2\ \mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 3\beta \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta x_3 = 0 \\ 3\beta x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ 9x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$V_2(\lambda_1=-1)= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Para formar la base de $\mathbb{R}^3$ se deben tomar dos vectores asociados a $\lambda 1$, uno perteneciente a $V_2(\lambda_1)$ y otro perteneciente a $V(\lambda_1)$.

$$\mathbf{u_2} \in V_2(\lambda_1) - V(\lambda_1).$$

$$\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \mathbf{u_1}=(A+I)\ \mathbf{u_2}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para el valor propio $\lambda_2=2$ se debe tomar un vector propio que forme parte de la base de $\mathbb{R}^3$.

$$V(\lambda_2=2)=\text{Ker}(A-2I)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / (A-2I)\ \mathbf{x}=\mathbf{0}\}.$$

$$\begin{pmatrix} -3 & \alpha & 0 \\ 0 & -3 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + \alpha x_2 = 0 \\ -3x_2 + \beta x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{\beta}{3} x_3 \\ x_1 = \dfrac{\alpha}{3} x_2 = \dfrac{\alpha\beta}{9} x_3 \end{cases}.$$

$$V(\lambda_2=2)=\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 / \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{9} x_3 \\ \frac{\beta}{3} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}\};\ \mathbf{u_3}=\begin{pmatrix} \frac{\alpha\beta}{9} \\ \frac{\beta}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz J tiene dos bloques elementales, uno de dimensión dos para λ_1 y otro de dimension uno para λ_2.

P tiene por columnas los vectores $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_3}$ que se han calculado en el problema.

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right); \qquad P = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dfrac{\alpha\beta}{9} \\ 0 & 1 & \dfrac{\beta}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

5.9 Siendo P_3 el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales, se considera el endomorfismo

$$\begin{aligned} f : P_3 &\rightarrow P_3 \\ p(x) &\rightarrow f(p(x)) = x^3 \cdot p'(0) + x^2 \cdot p(1) \end{aligned}$$

Se pide:

a) Matriz A del endomorfismo

b) Matriz más sencilla semejante a A indicando la matriz que define la semejanza

Nota: $p'(x) = \dfrac{d\,p(x)}{x}$

(Enero de 1999)

Resolución:

a) Puesto que no se indica para qué base calcular la matriz del endomorfismo, se hará para la que cada uno desee, indicando cuál es la base utilizada. Aquí se hará para la base usual de P_3 (al ser sus vectores sencillos, también los cáculos serán más simples).

$$B_{P_3} = \{1, x, x^2, x^3\} = \{ \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4} \}$$

$$A_B = (f(\mathbf{e_1})_B \;\; f(\mathbf{e_2})_B \;\; f(\mathbf{e_3})_B \;\; f(\mathbf{e_4})_B)$$

$$f(\mathbf{e_1}) = f(1) \overset{(1)}{=} x^3 \cdot 0 + x^2 \cdot 1 = x^2 \Rightarrow f(\mathbf{e_1})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(1) Teniendo en cuenta que para p(x) = 1: p(1) = 1 y p'(x) = 0, p'(0) = 0

$$f(\mathbf{e_2}) = f(x) \overset{(2)}{=} x^3 \cdot 1 + x^2 \cdot 1 = x^3 + x^2 \Rightarrow f(\mathbf{e_2})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) Teniendo en cuenta que para p(x) = x: p(1) = 1 y p'(x) = 1, p'(0) = 1

$$f(\mathbf{e_3}) = f(x^2) \overset{(3)}{=} x^3 \cdot 0 + x^2 \cdot 1 = x^2 \Rightarrow f(\mathbf{e_3})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) Teniendo en cuenta que para p(x) = x^2: p(1) = 1 y p'(x) = 2x, p'(0) = 0

$$f(\mathbf{e_4}) = f(x^3) \overset{(4)}{=} x^3 \cdot 0 + x^2 \cdot 1 = x^2 \Rightarrow f(\mathbf{e_4})_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) Teniendo en cuenta que para p(x) = x^3: p(1) = 1 y p'(x) = $3x^2$, p'(0) = 0

Por lo tanto:

$$A_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

Valores propios de A:

$$|A - \lambda I| = 0; \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \; ; \qquad (-\lambda)^3 \cdot (1-\lambda) = 0; \begin{cases} \lambda = 0 & m = 3 \\ \lambda = 1 & m = 1 \end{cases}$$

Vectores propios:

V(λ=1):

$$(A\text{-}I)\mathbf{x}=\mathbf{0};\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&1&0&1\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\\x_4=x_2\end{cases},$$

$$B_{V(\lambda=1)}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

V(λ=0):

$$(A\text{-}0\cdot I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\ ;\ \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\\x_1+x_3+x_4=0\end{cases};$$

$$\mathbf{x}\in V(\lambda)\Rightarrow\mathbf{x}=\begin{pmatrix}-x_3-x_4\\0\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$B_{V(\lambda=0)}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

La dimensión de V(λ=0) es dos mientras que su multiplicidad algebraica es tres, debemos calcular $V_2(\lambda=0)$.

$V_2(\lambda=0)$:

$$(A\text{-}0I)^2\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}\ ;\ \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&2&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1+2x_2+x_3+x_4=0\Rightarrow$$

$$x_4=-x_1-2x_2-x_3\qquad B_{V2(0)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Cálculo de la matriz de Jordan:

Para λ=1 elijo un vector que será el correspondiente a la base de V(λ=1).

$$\mathbf{u_1}=(0\ 0\ 1\ 0)^t$$

Para $\lambda=0$ se necesitan tres vectores, dos de ellos pertenecerán a V(0), el restante a $V_2(0)$.

$\mathbf{u_3}$ pertenece a $V_2(0)$ pero no pertenece a V(0); $\mathbf{u_3}= (0\ 1\ 0\ -2)^t$

$$\mathbf{u_2}=(A-0I)\cdot \mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\in V(0)$$

$\mathbf{u_4}$ pertenece a V(0) y es linealmente independiente de $\mathbf{u_2}$, por tanto $\mathbf{u_4}=(1\ 0\ -1\ 0)^t$

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&-1&0&-1\\0&1&-2&0\end{pmatrix} \quad ; \quad J=\left(\begin{array}{c|cc|c}1&0&0&0\\\hline0&0&1&0\\0&0&0&0\\\hline0&0&0&0\end{array}\right)$$

■

5.10 Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2&2&0\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$

a) Calcular sus polinomios característicos.

b) ¿ Son las matrices A y B equivalentes? Razonar la respuesta.

c) Calcular las matrices de Jordan de A y de B.

d) ¿Son las matrices A y B semejantes? Razonar la respuesta.

(Enero de 1999)

Resolución:

a) $P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=(\lambda-2)^3=P_B(\lambda)=|B-\lambda I|$.

b) Dos matrices son equivalentes si tienen la misma dimensión y el mismo rango.

En nuestro caso las dos matrices pertenecen al conjunto de las matrices cuadradas 3x3 y además tienen el mismo rango, ya que las dos son regulares y tienen rango tres. Sí son equivalentes.

c) Para las dos matrices se cumple $\lambda = 2$ m =3.

Vectores propios de A:

$V(\lambda=2)=Ker(A-2I)$.

$$\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x_2=0;\qquad B_{V(\lambda=2)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

La dimensión del subespacio propio es menor que la multiplicidad algebraica. Se debe calcular un subespacio de dimensión superior $V_2(\lambda=2)$ que será ya de dimensión tres.

$V_2(\lambda=2)=Ker((A-\lambda I)^2)$.

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow V_2(\lambda=2)\equiv\mathbb{R}^3\Rightarrow B_{V_2(\lambda=2)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Vectores que se eligen:

$$\mathbf{u_3}\in V_2(\lambda)\text{-}V(\lambda)\Rightarrow \mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u_2}=(A-\lambda I)\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$\mathbf{u_1}\in V(\lambda)$ y es linealmente independiente de $\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{u_2}\Rightarrow \mathbf{u_1}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

La matriz J_1 tiene dos bloques elementales de Jordan, uno de dimensión uno partiendo del vector $\mathbf{u_1}$ y otro del dimensión dos que se obtiene partiendo de los vectores $\mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_3}$.

$$J_1=\left(\begin{array}{c|cc}2&0&0\\\hline0&2&1\\0&0&2\end{array}\right);\quad P_1=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix};\quad J_1=P_1^{-1}\cdot A\cdot P_1.$$

Vectores propios de B:

$V(\lambda=2)=Ker(A-2I)$.

$$\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\\x_3=0\end{cases};\quad B_{V(\lambda=2)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

La dimensión del subespacio propio es menor que la multiplicidad algebraica. Se deben calcular subespacios de dimensión superior hasta llegar a uno de dimensión tres.

$V_2(\lambda=2)=Ker((A-\lambda I)^2)$.

$$(A-\lambda I)^2=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$(A-\lambda I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x_3=0.$$

$$V_2(\lambda=2)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3/\ \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}\}\Rightarrow B_{V_2(\lambda=2)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Como la dimensión de $V_2(\lambda)< 3$ se debe calcular un subespacio de dimensión mayor $V_3(\lambda)$ que ya será de dimensión tres.

$V_3(\lambda=2)=\text{Ker}((A-\lambda I)^3)$.

$$(A-\lambda I)^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow V_3(\lambda=2)\equiv\mathbb{R}^3\Rightarrow B_{V_3(\lambda=2)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Vectores que se eligen:

$$\mathbf{u_3}\in V_3(\lambda)-V_2(\lambda)\Rightarrow\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Los vectores $\mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_1}$ se obtienen a partir de $\mathbf{u_3}$.

$$\mathbf{u_2}=(A-\lambda I)\mathbf{u_3}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u_1}=(A-\lambda I)\mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}.$$

La matriz J_2 tiene un bloque elemental de Jordan de dimensión tres ya que los tres vectores se han obtenido sucesivamente y dan lugar a ese bloque de dimensión tres.

$$J_2=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix};\qquad P_2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix};\qquad J_2=P_2^{-1}\cdot A\cdot P_2.$$

d) Dos matrices son semejantes entre sí, si ambas son semejantes a la misma forma de Jordan.

En este caso no son iguales las formas de Jordan J_1 y J_2, por tanto A y B no son semejantes.

■

5.11 Si la siguiente matriz $J=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es la forma de Jordan de una matriz A.

Encontrar los valores propios de A, así como la dimensión de los subespacios $V_k(\lambda)$ correspondientes, siendo $V_k(\lambda)=\mathrm{Ker}((A-\lambda I)^k)$.

(Enero de 1999)

Resolución:

Las matrices semejantes tienen los mismos valores propios. J y A son matrices semejantes, luego $\lambda_1=3 \quad m_1=3 \;;\quad \lambda_2=5 \quad m_2=3$.

Dimensiones de los subespacios:

Para $\lambda_1=3$.

$$dim(V(\lambda_1)=2 \qquad dim(V_2(\lambda_1)=3.$$

Para $\lambda_2=5$.

$$dim(V(\lambda_2)=1 \;;\qquad dim(V_2(\lambda_2)=2 \;;\qquad dim(V_3(\lambda_2)=3.$$

■

5.12 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

a) ¿Son A y B semejantes? Justificar la respuesta.

b) Obtener la forma de Jordan, J, de la matriz A, hallando una matriz P tal que $J = P^{-1}\cdot A\cdot P$.

(Septiembre de 1999)

Resolución:

a) Dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios. En nuestro caso los valores propios de cada matriz se encuentran en su diagonal principal, por ser ambas matrices triangulares.

No tienen los mismos valores propios, luego A y B no son semejantes.

b) Valores propios de A:

$$\begin{cases}\lambda_1 = 2 & m_1 = 2\\ \lambda_2 = 4 & m_2 = 1\end{cases}.$$

Vectores propios:

-**V(λ_1)**:

$$(A-2I)\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_3 = 0\\ x_2 = -x_1\end{cases} \qquad B_{V(\lambda 1)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

dim(V(λ_1))=1<m_1.

- Se debe calcular el subespacio $V_2(\lambda_1)$.

$$(A-2I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \begin{pmatrix}4 & 4 & 8\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_1 = -x_2 - 2x_3$$

$$B_{V2(\lambda 1)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

dim($V_2(\lambda_1)$)= 2 = m_1.

- **V(λ_2)**

$$(A-4I)\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \begin{pmatrix}0 & 2 & 2\\ 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_3 = 0\\ x_2 = 0\end{cases}$$

$$B_{V(\lambda 2)}=\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

dim(V(λ_2))= 1 = m_2.

A continuación se obtienen los vectores que formaran la base de Jordan.

$$\mathbf{u_2}\in V_2(\lambda_1)\text{- }V(\lambda_1) \qquad \mathbf{u_2}=\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{u_1}=(A-2I)\,\mathbf{u_2}\quad \begin{pmatrix}2&2&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}\in V(\lambda_1).$$

$$\mathbf{u_3}\in V(\lambda_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Las Matrices J y P son las siguientes:

$$J=\left(\begin{array}{cc|c}2&1&0\\0&2&0\\\hline 0&0&4\end{array}\right)\qquad;\qquad P=\begin{pmatrix}-2&-2&1\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

■

5.13

a) Estudiar para qué valores de los parámetros **a** y **b**, la matriz A es diagonalizable.

$$A=\begin{pmatrix}1&\mathbf{a}&2&-1\\0&1&3&4\\0&0&2&\mathbf{b}\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

b) En el caso en que **a** = -1 y **b** = 1, obtener la matriz de Jordan, así como la base correspondiente.

(Enero de 2000)

Resolución:

a) El polinomio característico de la matriz A es:

$$P_A(\lambda)=(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-2)^2$$

Por tanto los valores propios de A son $\begin{cases}\lambda_1=1 & m_1=2\\ \lambda_2=2 & m_2=2\end{cases}$.

Cálculo de los vectores propios:

- $V(\lambda=1)=\{\mathbf{x}/(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

$$A-I=\begin{pmatrix}0&\mathbf{a}&2&-1\\0&0&3&4\\0&0&1&\mathbf{b}\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Para que la matriz sea diagonalizable $dim(V(\lambda=1))=m_1=2$.

La dimensión del subespacio se calcula de la siguiente forma:

$$dim(V(\lambda=1))=dim(\mathbb{R}^4)\text{-Rango(A-I)}.$$

$$2=4-\text{Rango(A-I)} \Rightarrow \text{Rango (A-I)}=2.$$

Para que Rango (A-I)=2 debe cumplirse $\mathbf{a} = 0$.

- $V(\lambda=2)=\{\mathbf{x}/(A-2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

$$A-2I=\begin{pmatrix} -1 & \mathbf{a} & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que la matriz sea diagonalizable $dim(V(\lambda=2))=m_2=2$.

$$dim(V(\lambda=2))=dim(\mathbb{R}^4)\text{-Rango(A-2I)}.$$

$$2=4-\text{Rango(A-2I)} \Rightarrow \text{Rango (A-2I)}=2.$$

Para que Rango (A-2I)=2 debe cumplirse $\mathbf{b} = 0$.

Por tanto A es diagonalizable si y solo si $\mathbf{a} = \mathbf{b} = 0$.

b) Caso en que $\mathbf{a}=-1$ y $\mathbf{b}=1$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $V(\lambda=1)=\{\mathbf{x}/(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$

$$(A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases} \quad B_{V(\lambda=1)}=\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$dim(V(\lambda=1)<m_1.$$

Debemos calcular el subespacio $V_2(\lambda=1)$.

$V_2(\lambda=1)=\{\mathbf{x}/(A-I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A\text{-}I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} B_{V_2(\lambda=1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$dim(V_2(\lambda=1)=m_1.$$

- Elección de vectores:

$$\mathbf{u_4} \in V_2(\lambda=1)\text{-}V(\lambda=1) \Rightarrow \mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ se calcula } \mathbf{u_3} = (A\text{-}I)\,\mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $V(\lambda=2)=\{\mathbf{x}/(A\text{-}2I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

$$(A\text{-}2I)\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 2x_3 = -x_3 \\ x_2 = 3x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$B_{V(\lambda=1)} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$dim(V(\lambda=2)<m_2.$$

Debemos calcular el subespacio $V_2(\lambda=2)$.

$$V_2(\lambda=2)=\{\mathbf{x}/(A\text{-}2I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0}\}.$$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A\text{-}2I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = 3x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$dim(V_2(\lambda=2)=m_2$$

- Elección de vectores:

$\mathbf{u_2} \in V_2(\lambda=2)\text{-}V(\lambda=2) \Rightarrow \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; se calcula $\mathbf{u_1} = (A-2I)\,\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto, la matriz J de Jordan es:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en la base B* de Jordan.}$$

$$B^* = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La matriz P de semejanza es: $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

■

5.14 Hallar la forma de Jordan de la siguiente matriz, así como una matriz P tal que $J = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(Nota de ayuda: } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix};\ rg(A)=3 \text{)}$$

(Septiembre de 2000)

Resolución:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3-\lambda & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(-3-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(-3-\lambda)^2 \left[-(1+\lambda)(1-\lambda)+1 \right] = -(-3-\lambda)^2 \lambda^2 = 0$$

- Valores propios: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 & m_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 & m_2 = 2 \end{cases}$

- Vectores propios

$V(\lambda_1=0)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4/(A-0I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ 3x_2 = 4x_3 - x_1 \Rightarrow 3x_2 = 3x_3 \Rightarrow x_2 = x_3 \\ 3x_4 = 4x_3 - x1 \Rightarrow x_4 = x_3 \end{cases}$$

$rg(A-0I)=3 \quad \Rightarrow \quad dim(V(\lambda=0)=1<m_1.$

Por tanto A no es diagonalizable.

$$B_{V(\lambda=0)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$V_2(\lambda_1=0)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4/(A-0I)^2\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$B_{V_2(\lambda=0)} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$V(\lambda_2=-3)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^4/(A+3I)\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1=x_3=0$$

$$rg(A+3I)=2 \Rightarrow dim(V(\lambda=-3)=2$$

$$B_{V(\lambda=-3)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Elección de vectores:

  Para $\lambda=0$

$$\mathbf{u_2} \in V_2(\lambda=0)\text{-}V(\lambda=0) \Rightarrow \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  A partir de $\mathbf{u_2}$ se obtiene $\mathbf{u_1}$ como $\mathbf{u_1}=(A-0I)\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Para $\lambda=-3$ se dispone de dos vectores propios linealmente independientes que serán $\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{u_4}$

$$\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz P tiene por columnas los vectores $\mathbf{u_i}$: $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz J, semejante a A, es: $J = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$.

■

6

FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

6.1 Se considera la forma bilineal:

$$f : M_{2x2} x M_{2x2} \to \mathbb{R}$$

$$(A, B) \to f(A, B) = 2 \cdot traza(A \cdot B) - Traza(A) \cdot traza(B).$$

a) Estudiar si la forma bilineal f es simétrica (SIN CALCULAR LA MATRIZ).

b) Hallar la matriz de la forma bilineal f.

(Enero 1998)

Resolución

a) Hay que comprobar si $f(A, B) = f(B, A) \quad \forall A,B \in M_{2x2}$. Teniendo en cuenta que

$$f(A, B) = 2traza(A \cdot B) - traza(A) \cdot traza(B)$$

$$f(B, A) = 2traza(B \cdot A) - traza(B) \cdot traza(A)$$

De donde se deduce que $f(A, B) = f(B, A) \Leftrightarrow traza(A \cdot B) = traza(B \cdot A)$.

Sean $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_{2x2}$, entonces

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{bmatrix} \Rightarrow \quad traza(A\,B) = ax + bz + cy + dt$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + tc & zb + td \end{bmatrix} \Rightarrow \quad traza(B\,A) = xa + ya + zb + td$$

como la $traza(A \cdot B) = traza(B \cdot A)$, la forma bilineal es simétrica.

b) Matriz de la forma bilineal en la base usual de M_{2x2}, $B = \left\{ \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$,

$$\left.\begin{array}{l} f(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}) = 1 \\ f(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}) = 0 \\ f(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_3}) = 0 \\ f(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_4}) = -1 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} f(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_2}) = 0 \\ f(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}) = 2 \\ f(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_4}) = 0 \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} f(\mathbf{e_3}, \mathbf{e_3}) = 0 \\ f(\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}) = 0 \\ f(\mathbf{e_4}, \mathbf{e_4}) = 1 \end{array}\right| \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

6.2 Dada la forma cuadrática:

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x\ \ y\ \ z)^t \to \varphi\ [(x\ \ y\ \ z)] = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2\,a{\cdot}y{\cdot}z$$

a) Hallar la matriz A asociada a φ.

b) Indicar para qué valores de a, φ es definida positiva.

c) Para a = 3, diagonalizar ortogonalmente la forma cuadrática, calculando la matriz de paso correspondiente, e indicando la relación entre A y la matriz diagonal resultante.

(Septiembre 1998)

Resolución:

a) $$\varphi\left[\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t\right] = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2a{\cdot}y{\cdot}z = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

de donde se deduce que la matriz de la forma cuadrática es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

b) Cálculo de los valores propios:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & a \\ 0 & a & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (2-\lambda)\left[1 - 2\lambda + \lambda^2 - a^2\right]$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 + 4a^2}}{2} = 1 \pm a$$

De donde los valores propios de A son :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2 > 0 \\ \lambda_2 = 1 + a > 0 \Leftrightarrow a > -1 \\ \lambda_3 = 1 - a > 0 \Leftrightarrow a < 1 \end{cases}$$

Para que todos los valores propios sean positivos, y por lo tanto que φ sea definida positiva, $-1 < a < 1$.

c) $$\text{Si } a = 3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases},$$

para diagonalizar ortogonalmente se necesita una base ortonormal de vectores propios:

- $\lambda_1 = 2: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{Bmatrix} -y+3z=0 \\ -3y-z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad B_{V(2)} = \left\{ \mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- $\lambda_2 = 4: \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=z \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad B_{V(4)} = \left\{ \mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

- $\lambda_3 = -2: \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=-z \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad B_{V(-2)} = \left\{ \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ constituyen una base proipia ortogonal al ser vectores propios correspondientes a valores propios diferentes, pero se necesita una base ortonormada y como

$$\|\mathbf{u_1}\| = 1 \quad \|\mathbf{u_2}\| = \sqrt{2} \quad \|\mathbf{u_3}\| = \sqrt{2}$$

se obtiene la base

$$B^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

que es una base ortonormal de vectores propios, en esta base la nueva matriz de la forma cuadrática es:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso de la base inicial a B* es :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

cumpliéndose $D = P^t \cdot A \cdot P$ (Semejanza ortogonal).

■

6.3 Dada la forma: $q((x_1\, x_2\, x_3)^t) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 6x_1 \cdot x_2 + 8x_1 \cdot x_3$.

Clasificarla para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ e indicar su signatura.

(Enero 1999)

Resolución:

a) Clasificación con el método de los valores propios:

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & 3 & 4 \\ 3 & a-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-\lambda)^3 - 16(a-\lambda) - 9[a-\lambda] = [(a-\lambda)^2 - 25](a-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = a$; $\qquad (a-\lambda)^2 - 25 = 0 \qquad a - \lambda = \pm 5$

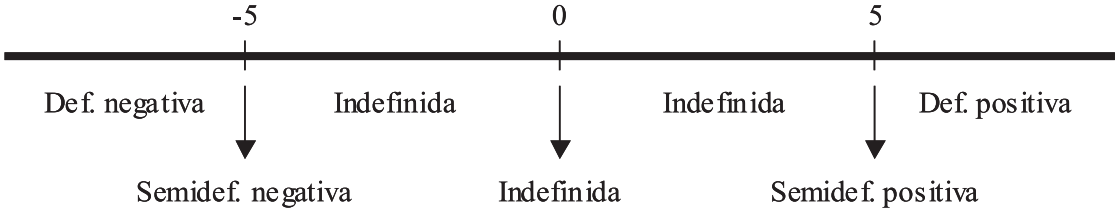
$\lambda_2 = a - 5$

$\lambda_3 = a + 5$

De donde se deduce que:

- Si $a < -5 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 < 0 \Rightarrow$ Definida negativa $S = (0, 3)$.
- Si $a = -5 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 = 0 \Rightarrow$ Semid. negativa $S = (0, 2)$.
- Si $-5 < a < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \wedge \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Indefinida $S = (1, 2)$.
- Si $a = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \wedge \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Indefinida $S = (1, 1)$.
- Si $0 < a < 5 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0 \wedge \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Indefinida $S = (2, 1)$.
- Si $a = 5 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 = 0 \wedge \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Semid. positiva $S = (2, 0)$.
- Si $a > 5 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 > 0 \wedge \lambda_3 > 0 \Rightarrow$ Definida positiva $S = (3, 0)$.

Lo cual se puede resumir gráficamente mediante el siguiente cuadro:



■

6.4 Diagonalizar ortogonalmente la forma cuadrática

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\, \mathbf{x}\text{, siendo } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Clasificar φ.

(Enero 1999)

Resolución

Vectores y valores propios de la matriz A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1\right]$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{matrix} \therefore\ 3 \\ \therefore\ 1 \end{matrix}$$

$$\lambda_1 = 1,\ m = 1$$
$$\lambda_2 = 3, m = 2$$

- Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V(1) = \text{span}\left\{\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

- Para $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow V(3) = \text{span}\left\{\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

B = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$} es una base propia ortogonal, siendo

$$\|\mathbf{u_1}\| = \sqrt{2} \qquad \|\mathbf{u_2}\| = \sqrt{2} \qquad \|\mathbf{u_3}\| = 1$$

de donde

$$B' = \left\{ \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de propia ortonormada en la que la matriz asociada a φ es $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, siendo

$$D = P^{-1} A\, P = P^{t} A\, P\,,$$

donde $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ que es una matriz ortogonal. φ es definida positiva ya que todos sus autovalores son mayores estrictamente que 0.

■

6.5 Sea la forma cuadrática $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que la matriz asociada a φ en la base usual tiene como vectores propios $\mathbf{u} = (0\ \ 1\ \ 0)^t$, $\mathbf{v} = (1\ \ 1\ \ -1)^t$, $\mathbf{w} = (1\ \ 0\ \ 1)^t$ asociados respectivamente a los autovalores 2 (doble) y 1. Se pide:

a) Diagonalizar φ por el método de valores propios obteniendo la base correspondiente.

b) Clasificar φ. Signatura de φ.

c) Expresión matricial de φ en la base usual.

(Enero 2000)

Resolución:

a) La matriz de φ en la base B*, base de propia ortonormada, es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base $B' = \left\{ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es propia pero no ortonorma,ya que **u** y **v** no son ortogonales (proceden de un mismo valor propio $\lambda = 2$). Utilizando Gran-Schmidt para ortogonalizarlos:

$$\mathbf{u'} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v'} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\lambda \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{u'}, \mathbf{v'} \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\|\mathbf{u'}\| = 1$, $\|\mathbf{v'}\| = \sqrt{2}$ y $\|\mathbf{w'}\| = \sqrt{2}$, se toman

$$\mathbf{u^*} = \frac{\mathbf{u'}}{\|\mathbf{u'}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v^*} = \frac{\mathbf{v'}}{\|\mathbf{v'}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w^*} = \frac{\mathbf{w'}}{\|\mathbf{w'}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

con lo que la base de propia ortonormada B* es

$$B^* = \left\{ \mathbf{u^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v^*} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \mathbf{w^*} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

b) Como $\lambda_1 = 2 > 0 \ \wedge \ \lambda_2 = 2 > 0 \ \wedge \ \lambda_3 = 1 > 0$ la forma cuadrática es definida positiva, y su signatura es (3,0).

c) Como $D = P^t A P$, siendo $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Además P es ortogonal ($P^t = P^{-1}$), se obtiene

$$D = P^{-1} A P = P^t A P \Rightarrow A = P D P^t \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La expresión matricial en la base usual es

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3x \cdot z.$$

■

6.6 Consideremos la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(x) = 4x_1 \cdot x_2$, donde $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^t \in \mathbb{R}^3$.

a) Calcular la matriz de φ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la matriz de φ en la base

$$B = \left\{ \mathbf{u_1} = \left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \right)^t, \mathbf{u_2} = \left(\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \right)^t, \mathbf{u_3} = (0, \quad 0, \quad 1)^t \right\}.$$

b) Siendo f la forma polar de φ, calcúlese $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ para $\mathbf{x} = (2 \quad 2 \quad 0)^t$ e $\mathbf{y} = (0 \quad 0 \quad 2)^t$.

c) Diagonalizar φ con el método de los autovalores, hallando la base en la que la matriz de la forma cuadrática es diagonal, dando su expresión en dicha base y la matriz de cambio de base.

d) Clasificar φ. Signatura de φ.

(Septiembre 2000)

Resolución:

a) La expresión de la forma cuadrática φ en la base canónica es $\varphi(\mathbf{x}) = 4x_1 \cdot x_2$, de donde se deduce que la matriz de la forma cuadrática φ y de su forma polar f en la base canónica es $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Teniendo en cuenta que la relación existente entre matrices asociadas a la misma forma cuadrática en distintas bases es $A_2 = P^t\, A_1\, P$, siendo A_2 la matriz de φ en la base B y P la matriz de paso de la base inicial a la base B, es decir

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de donde

$$A_2 = P^t\, A_1\, P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de la forma cuadrática φ en la base B.

b) La forma polar f de la forma cuadrática φ es

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}[\varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})] =$$

$$= \frac{1}{2}[4(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - 4x_1x_2 - 4y_1y_2] = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 .$$

Otra forma de calcular la expresión de f es trabajando matricialmente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4x_1 \cdot x_2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 2x_1 \cdot y_2 + 2x_2 \cdot y_1$$

de donde se deduce que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (2 \quad 2 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 \quad 2 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

esto indica que **x** e **y** son conjugados.

c) Para diagonalizar la forma cuadrática se calculan los valores y vectores propios de la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A_1 - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda^2 - 4) = 0 ,$$

de donde se deduce que los valores propios de la matriz son

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2 .$$

Los correspondientes subespacios propios son

- $\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(0) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \text{ siendo } \mathbf{v}_1 = (0 \quad 0 \quad 1)^t \text{ y } \|\mathbf{v}_1\| = 1.$$

- $\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow V(2) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \text{siendo } \mathbf{v_2} = (1 \quad 1 \quad 0)^t \text{ y } \|\mathbf{v_2}\| = \sqrt{2}.$$

- $\lambda_3 = -2$: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$V(-2) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \text{siendo } \mathbf{v_3} = (1 \quad -1 \quad 0)^t \text{ y } \|\mathbf{v_3}\| = \sqrt{2}.$$

De donde se deduce que la base ortonormada buscada es $B' = \left\{ \dfrac{\mathbf{v_1}}{\|\mathbf{v_1}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dfrac{\mathbf{v_2}}{\|\mathbf{v_2}\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \dfrac{\mathbf{v_3}}{\|\mathbf{v_3}\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. La matriz de la forma cuadrática en la base B' es

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = (x'_1 \; x'_2 \; x'_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = 2(x'_2)^2 - 2(x'_3)^2,$$

siendo la matriz de paso de la base inicial a la base B'

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Como la matriz tiene valores propios positivos y negativos, la forma cuadrática es indefinida, siendo signatura (φ)= (1,1).Como el determinante de la matriz es cero, la forma cuadrática es degenerada.

■

7

PRODUCTO ESCALAR

7.1 En el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que dos $P_2(x)$, se define el siguiente producto escalar:

$$\langle \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

siendo : $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$

a) Escribir la expresión del producto escalar en la base $B = \{1,\ 1+x,\ 1+2x+x^2\}$.

b) Obtener una base ortonormada B' a partir de la base B.

c) Obtener la expresión del producto escalar en la nueva base B', indicando la matriz de paso P de la base B a la base B', así como la relación existente entre las matrices asociadas al producto escalar en ambas bases.

(Febrero 1996)

Resolución:

a) $\langle \mathbf{p},\ \mathbf{q}\rangle = a_0\,b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$G = I$ en base usual $\{1, x, x^2\}$

$B = \{1,\ 1+x,\ 1+2x+x^2\} = \{(1\ \ 0\ \ 0)^t, (1\ \ 1\ \ 0)^t, (1\ \ 2\ \ 1)^t\} = \{\mathbf{e_1}\ \ \mathbf{,e_2}\ \ \mathbf{,e_3}\}$

Matriz de paso de la base usual a B

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_B = P^t\ G\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\langle \mathbf{p}\,,\ \mathbf{q}\rangle = \begin{pmatrix} a'_0 & a'_1 & a'_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$$

b) Base ortogonal $B'' = \{\mathbf{e''_1}\,,\ \ \mathbf{e''_2}\,,\ \ \mathbf{e''_3}\}$, utilizando Gram-Schmidt.

$\mathbf{e''_1} = \mathbf{e_1} = (1,\ \ 0,\ \ 0)$

$\mathbf{e''_2} = \mathbf{e_2} + \lambda\mathbf{e''_1} = (1,\ \ 1,\ \ 0) + (\lambda\ \ 0\ \ 0) = (1+\lambda\ \ 1\ \ 0)$

$$\langle \mathbf{e''}_1 , \mathbf{e''}_2 \rangle = 0 = \langle (1 \quad 0 \quad 0) + (1+\lambda \quad 1 \quad 0) \rangle = 1+\lambda \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\mathbf{e''}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 = (1 \quad 1 \quad 0)(1 \quad 0 \quad 0) = (0 \quad 1 \quad 0)$$

$$\mathbf{e''}_3 = \mathbf{e}_3 + \alpha \mathbf{e''}_1 + \beta \mathbf{e''}_2 = (1 \quad 2 \quad 1) + (\alpha \quad 0 \quad 0) + (0 \quad \beta \quad 0) = (1+\alpha \quad 2+\beta \quad 1)$$

$$\langle \mathbf{e''}_1 , \mathbf{e''}_3 \rangle = 1+\alpha = 0 \qquad \alpha = -1$$

$$\langle \mathbf{e''}_2 , \mathbf{e''}_3 \rangle = 2+\beta = 0 \qquad \beta = -2$$

$$\mathbf{e''}_3 = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1 - 2(\mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 =$$
$$(1 \quad 0 \quad 0) - 2(1 \quad 1 \quad 0) + (1 \quad 2 \quad 1) = (0 \quad 0 \quad 1)$$

$$\text{Base ortogonal} = \left\{ (1 \quad 0 \quad 0)^t , (0 \quad 1 \quad 0)^t , (0 \quad 0 \quad 1)^t \right\} = \left\{ 1 , \quad x , \quad x^2 \right\}$$

En este caso no hace falta ortonormalizarla porque B" ya es ortonormalizada
$B'' = B' = (\mathbf{e'}_1 , \quad \mathbf{e'}_2 , \quad \mathbf{e'}_3) = (1 , \quad x , \quad x^2)$

c) Por ser B' una base ortonormalizada la matriz $G_{B'} = I$

$$\langle \mathbf{p} \quad \mathbf{q} \rangle = (a'_0 \quad a'_1 \quad a'_2) I \begin{pmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix} = a'_0 \, b'_0 + a'_1 \, b'_1 + a'_2 \, b'_2 +$$

Matriz de paso $B \rightarrow B'$

$$\mathbf{e'}_1 = \mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{e'}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{e'}_3 = \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$G_{B'} = P^t \, G_B \, P = I$ por ser B' ortonormada

■

7.2 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se define un producto escalar cuya matriz en la base canónica B es:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Obtener una base ortonormada B' a partir del siguiente sistema de vectores, utilizando el método de Gram-Schmidt:

$$S = \left\{ (1 \quad 0 \quad 0)^t , (0 \quad 1 \quad 0)^t , (0 \quad 0 \quad 1)^t , (1 \quad 1 \quad 1)^t \right\}$$

b) Obtener la matriz de paso de B a B'.

c) Expresión del producto escalar en la base B'.

(Septiembre 1996)

Resolución:

a) El vector $(1\ 1\ 1)^t$ es combinación lineal de los 3 vectores anteriores del sistema S, luego, $\{(1\ 0\ 0)^t, (0\ 1\ 0)^t, (0\ 0\ 1)^t\}$ son l.i. y generadores de vectores de $\mathbb{R}^3$ (totales).

$$\mathbf{e_1}' = \mathbf{e_1} = (1 \quad 0 \quad 0)^t$$

$$\mathbf{e_2}' = \mathbf{e_2} + \lambda \mathbf{e_1}' = (0 \quad 1 \quad 0)^t + \lambda(1 \quad 0 \quad 0)^t = (\lambda \quad 1 \quad 0)^t$$

$$\langle \mathbf{e_2}' \cdot \mathbf{e_1}' \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (1 \quad 1 \quad 0)^t \cdot (1 \quad 0 \quad 0)^t \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2\lambda \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\mathbf{e_2}' = (0 \quad 1 \quad 0)^t$$

$$\mathbf{e_3}' = \mathbf{e_3} + \alpha \mathbf{e_2}' + \beta \mathbf{e_1}' = (0 \quad 0 \quad 1)^t + \alpha(0 \quad 1 \quad 0)^t + \beta(1 \quad 0 \quad 0)^t = (\beta \quad \alpha \quad 1)^t$$

$$\langle \mathbf{e_3}' \cdot \mathbf{e_2}' \rangle = 0 \Leftrightarrow (\beta \quad \alpha \quad 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2\beta + 1 \ \ \alpha \ \ \beta + 2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\langle \mathbf{e_3}' \cdot \mathbf{e_1}' \rangle = 0 \Leftrightarrow (\beta \quad \alpha \quad 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2\beta + 1 \ \ \alpha \ \ \beta + 2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta = -\,1/2$$

$$\mathbf{e_3}' = (-1/2 \quad 0 \quad 1)^t$$

Base ortogonal = $\{(1\ 0\ 0)^t, (0\ 1\ 0)^t, (-1/2\ 0\ 1)^t\}$

$$\left\| (1 \quad 0 \quad 0)^t \right\| = \sqrt{\langle (1 \quad 0 \quad 0)^t \cdot (1 \quad 0 \quad 0)^t \rangle} = \sqrt{(1 \quad 0 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= (2 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

$$\left\|(0 \quad 1 \quad 0)^t\right\| = \sqrt{\langle (0 \quad 1 \quad 0)^t \cdot (0 \quad 1 \quad 0)^t \rangle} = \sqrt{(0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} =$$

$$= (0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\left\|(-1/2 \quad 0 \quad 1)^t\right\| = \sqrt{\langle (-1/2 \quad 0 \quad 1)^t \cdot (-1/2 \quad 0 \quad 1)^t \rangle} =$$

$$= \sqrt{(-1/2 \quad 0 \quad 1)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = (0 \quad 0 \quad 3/2)\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{3/2}$$

Base ortonormal, $B' = \left\{ \left(1/\sqrt{2} \quad 0 \quad 0 \right)^t, (0 \quad 1 \quad 0)^t, \sqrt{2/3}\left(-1/2 \quad 0 \quad 1 \right)^t \right\}$

$$B' = \left\{ \left(\sqrt{2}/2 \quad 0 \quad 0\right)^t, (0 \quad 1 \quad 0)^t, \left(-\sqrt{6}/6 \quad 0 \quad \sqrt{6}/3 \right)^t \right\}$$

b) $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/3 \end{pmatrix}$ Matriz de paso de $B \rightarrow B'$

c) Como B' es ortonormada,

$$G_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rangle = \langle (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t \cdot (y_1 \quad y_2 \quad y_3)^t \rangle = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

■

7.3 En el espacio vectorial $E_{2x2}(\mathbb{R})$, se considera el siguiente producto escalar:

$$F(A, B) = \text{Traza}\ (A \cdot B^T)$$

a) Demostrar que es un producto escalar.

b) Sea V el subespacio vectorial de las matrices diagonales. Hallar una base ortonormal de V.

(Enero 1997)

Resolución:

a) Hay que demostrar que verifique los axiomas de:

i) Positividad

ii) Simetría

iii) Bilinealidad

Positividad

$F(A , A) = \text{traza}\,(A\cdot A^t) > 0$

En efecto, $\text{traza}\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right] = a_{11}^{\,2} + a_{12}^{\,2} + a_{21}^{\,2} + a_{22}^{\,2} > 0$

Simetría

$F(A , B) = F(B , A)$

$$F(A , B) = tr\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}\right] = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

$$F(B , A) = tr\left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\right] = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} + b_{21}a_{21} + b_{22}a_{22}$$

Se cumple

Bilinealidad

$$F\left(A , (\alpha B + \beta C)\right) = \alpha F\,(A\ B) + \beta F\,(A\ C)$$

$$F\left(A , (\alpha B + \beta C)\right) = tr\left[A\cdot(\alpha B + \beta C)^t\right] = tr\left[A\cdot\left(\alpha B^t + \beta C^t\right)\right] = tr\left[\alpha A\ B^t + \beta A\ C^t\right] =$$

$$\alpha tr\left(A\cdot B^t\right) + \beta \text{tr}\left(A\cdot C^t\right) = \alpha F\left(A , B\right) + \beta F\left(A , C\right) \qquad \text{c.q.d.}$$

b) $V = \left\{A \in E_{2x2}(\mathbb{R}) / A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \right\}$

Base de $V = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = \{A_1, A_2\}$

Hallemos por Gram-Schmidt la base ortogonal $\{B_1 , B_2\}$:

$B_1 = A_1$

$$B_2 = A_2 + \lambda B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle B_2 \cdot B_1 \rangle = 0 \Rightarrow tr\left(B_2 \cdot B_1^t\right) = tr\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda = 0$$

luego, $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\|B_1\| = \sqrt{tr\left(B_1 \cdot B_1^t\right)} = \sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]} = \sqrt{tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|B_2\| = \sqrt{tr\left(B_2 \cdot B_2^t\right)} = \sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]} = \sqrt{tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

Base ortonormal de $V = \left\{B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

■

7.4 En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación:

$\langle \cdot, \cdot \rangle \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$(\mathbf{x}, \ \mathbf{y}) \to \langle \mathbf{x}, \ \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 2x_3 y_3 - x_1 y_3 - x_3 y_1$$

a) Estudiar si define un espacio euclideo.

(Septiembre 1997)

Resolución:

a) Espacio euclídeo:

Positividad:

$$\langle \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \rangle = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_3 = (x_1 x_3)^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

$$\langle \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \rangle = 0 \qquad \text{sólo si} \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$$

Simetría:

$$\langle \mathbf{y} \quad \mathbf{x} \rangle = y_1 x_1 + 2y_2 x_2 + 2y_3 x_3 - y_1 x_3 - y_3 x_1 = \langle x \quad y \rangle \quad \forall x_1 y \in \mathbb{R}^3$$

Bilinealidad:

$$\langle(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})\cdot\mathbf{z}\rangle = (\lambda x_1+\mu y_1)z_1 + 2(\lambda x_2+\mu y_2)z_2 + 2(\lambda x_3+\mu y_3)z_3 -$$
$$-(\lambda x_1+\mu y_1)z_3 - (\lambda x_3+\mu y_3)z_1 =$$
$$= \lambda(x_1z_1 + 2x_2z_2 + 2x_3z_3 - x_1z_3 - x_3z_1) + \mu(y_1z_1 + 2y_2z_2 + 2y_3z_3 - y_1z_3 - y_3z_1) =$$
$$= \lambda\langle\mathbf{x}\ \mathbf{z}\rangle + \mu\langle\mathbf{y}\ \mathbf{z}\rangle \qquad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

Sí es espacio euclídeo.

■

7.5 Dada una forma bilineal $f : E\ x\ E \to \mathbb{R}$ cuya matriz en la base $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ es:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Clasificar dicha forma bilineal y calcular su signatura.

b) Diagonalizar ortogonalmente la matriz de la forma bilineal, indicando la nueva base de referencia.

c) Es *f* un producto escalar?.

(Enero 1998)

Resolución

a) Utilizaremos el método de los autovalores:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda^2(-\lambda^2+1) + 1(-\lambda^2+1) = (-\lambda^2+1)(-\lambda^2+1)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad m_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -1 \quad m_2 = 2$$

Forma bilineal indefinida $\begin{cases} \lambda_1, > 0 \\ \lambda_2, < 0 \end{cases}$; $\qquad S = (2, 2)$

b) Para $\lambda_1 = 1$ (doble)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - x_4 = 0 & x_1 = -x_4 \\ -x_2 + x_3 = 0 & x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$B_{V(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ortogonales entre sí.} \left(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\right)$$

Para $\lambda_2 = -1$ (doble)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 = 0 & x_1 = x_4 \\ x_2 + x_3 = 0 & x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$B_{V(-1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{ortogonales entre sí.} \left(\mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\right)$$

$$\|\mathbf{v_1}\| = \sqrt{2} \qquad \|\mathbf{v_2}\| = \sqrt{2} \qquad \|\mathbf{v_3}\| = \sqrt{2} \qquad \|\mathbf{v_4}\| = \sqrt{2}$$

$$B^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) No es producto escalar. No cumple la positividad $\langle \mathbf{e_i}, \mathbf{e_i} \rangle > 0 \quad \forall\, \mathbf{e_i} \in E$

■

7.6 En el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 se define el producto escalar:

$$f : \mathbb{P}_2(x) \times \mathbb{P}_2(x) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(p, q) \rightarrow \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

a) Demostrar que los polinomios:

$$p_o(x)=1, \qquad p_1(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right), \qquad p_2(x)=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^2\right]$$

forman base de $\mathbb{P}_2(x)$.

b) Hallar la matriz de dicho producto escalar en la base del apartado a).

c) Hallar una base ortonormada a partir de la base del apartado a).

(Enero 1998)

Resolución

a) $p_1(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)=\frac{1}{2}2x=x$

$$p_2(x)=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^2\right]=\frac{1}{8}\frac{d}{dx}\left(2\cdot 2x\left(x^2-1\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^3-x\right)=\frac{3x^2-1}{2}$$

luego

$$\left\{p_0(x)=1, \qquad p_1(x)=x, \qquad p_2(x)=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}\right\}$$

son l.i., luego (al estar en un e.v. de dim 3) son base.

b) $\left(p_0(x),p_0(x)\right)=\int_{-1}^{1}1dx=2$

$$\left(p_0(x),p_1(x)\right)=\int_{-1}^{1}xdx=0$$

$$\left(p_0(x),p_2(x)\right)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1}=0$$

$$\left(p_1(x),p_1(x)\right)=\int_{-1}^{1}x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

$$\left(p_1(x),p_2(x)\right)=\int_{-1}^{1}x\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{3}{8}x^4-\frac{1}{4}x^2\right]_{-1}^{1}=0$$

$$\left(p_2(x),p_2(x)\right)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)^2dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\left[\frac{9}{20}x^5-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{5}$$

Luego

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

c) Como G es diagonal $\left\{ p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x, \qquad p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right\}$ es ortogonal. Por ello, sólo es necesario normalizarla para obtener una base ortonormada.

$$\|p_0(x)\| = (p_0(x), p_0(x))^{1/2} = \sqrt{2},$$
$$\|p_1(x)\| = (p_1(x), p_1(x))^{1/2} = \sqrt{2/3},$$
$$\|p_2(x)\| = \sqrt{2/5},$$

luego:

$$B^* = \left\{ 1/\sqrt{2},\ \sqrt{3/2}\,x,\ \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \right\} \text{ base ortonormada}$$

■

7.7 Indicar razonadamente si las siguientes matrices corresponden a un producto escalar *f*: E x E→ℝ en alguna base de E. (E espacio vectorial sobre ℝ de dimensión 3).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Enero 1999)

Resolución:

A no representa un producto escalar, pues no es simétrica.

B tampoco; $\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 < 0$ no def. positiva

C: No, pues los elementos diagonales $C_{ii} = \langle \mathbf{e_i}\ \mathbf{e_i} \rangle$ han de ser > 0

■

7.8 Sea E_3 un espacio euclídeo, y en él la base $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ en la que el producto escalar considerado viene representado por la matriz:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Calcular la matriz G_1 del producto escalar en la base $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, siendo:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

b) Calcular una base ortonormal a partir de la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

(Enero 1999)

Resolución

a) $$G_{B'} = P^t.G_B.P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

O bien de otra forma:

$$f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

$$f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 7$$

$$f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

$$f(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$f(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5$$

$$f(\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=5$$

b) Base ortogonal = $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$

$\mathbf{v}_1=\mathbf{e}_1=(1\ 0\ 0)^t$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{e}_2+\lambda\mathbf{e}_1\ /\langle\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2\rangle=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\1\\0\end{pmatrix}=0\Rightarrow\lambda=-1$$

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_1=0\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^t-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}^t$$

$\mathbf{v}_3=\mathbf{e}_3+\alpha\mathbf{e}_1+\beta\mathbf{e}_2\ /$

$$\begin{cases}\langle\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_3\rangle=0\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\1\end{pmatrix}=0\\ \qquad\Rightarrow\alpha+\beta+1=0\\ \langle\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_3\rangle=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\1\end{pmatrix}=0\\ \qquad\Rightarrow\beta+1=0\Rightarrow\begin{matrix}\beta=-1\\\alpha=0\end{matrix}\end{cases}$$

$\mathbf{v}_3=-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}^t$

Base ortonormada = $\left\{\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}\ \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}\ \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|}\right\}$

$$\|\mathbf{v}_1\|=\sqrt{\langle\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1\rangle}=\sqrt{\langle\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1\rangle}=1$$

$$\|\mathbf{v}_2\|=\sqrt{\langle\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2\rangle}=\sqrt{\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}=\sqrt{\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}=1$$

$$\|\mathbf{v}_3\|=\sqrt{\langle\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{v}_3\rangle}=\sqrt{\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}=\sqrt{\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}=1$$

■

7.9 Sea S_2 el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2 y f: S_2 x $S_2 \to \mathbb{R}$ una forma bilineal cuya matriz asociada respecto de la base usual de S_2 es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores del parámetro "**a**" para los cuales esta aplicación es producto escalar.

b) Para **a = 2**, y considerando la norma inducida por el producto escalar anterior:

i) Determinar la norma de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

ii) Determinar el ángulo que forman las matrices: $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(Septiembre 1999)

Resolución:

a) Positividad. A debe ser definida positiva.

$A_1 = 1 > 0 \quad A_2 = 2 > 0 \qquad A_3 = 2a - 3 > 0 \qquad a > \frac{3}{2}$

Simetría. Se cumple por ser A simétrica.

Bilinealidad. En el campo matricial la bilinealidad se cumple.

b)

i) M pertenece al conjunto de matrices simétricas de orden 2, cuya base usual es:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

En esta base M tiene por componentes $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\|M\| = \sqrt{\langle M \cdot M \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}} =$$

$$\sqrt{3+8} = \sqrt{11}$$

ii) $\cos\theta = \dfrac{\langle N_1, N_2 \rangle}{\|N_1\| \|N_2\|}$

Componentes de N_1 en la base B $(1 \;\; 0 \;\; -1)^t$

Componentes de N_2 en la base B $(0\ \ 1\ \ 0)^t$

$$\|N_1\| = \sqrt{\langle N_1, N_1\rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -1\end{pmatrix}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\langle N_1, N_2\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix} = -1$$

$$\|N_2\| = \sqrt{\langle N_2, N_2\rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 2\\ 1\end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Cos. } \theta = \frac{-1}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 135^o$$

■

7.10 En el espacio vectorial $\mathbb{R}$ se define la aplicación:

$$f: \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \rightarrow f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$$

donde $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ x_3)^t, \mathbf{y} = (y_1\ y_2\ y_3)^t$ son dos vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$ referidos a la base $B = \{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$

a) Estudiar si f define un espacio euclideo.

b) Calcular la matriz G con relación a la base B.

c) Dados dos vectores $\mathbf{a} = (1\ -1\ 1)^t$ y $\mathbf{b} = (2\ 0\ 1)^t$, calcular sus normas, su producto escalar y el ángulo que forman.

(Enero 2000)

Resolución:

a) $$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1\ y_1 + 2x_2\ y_2 + 2x_3\ y_3 - x_1\ y_3 - x_3\ y_1 = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$$

Utilizando esta expresión matricial, podemos comprobar si f cumple los axiomas de producto escalar.

i) Positividad:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0$$

G es definida positiva:

$$\Delta_1 = 1 > 0\,, \quad \Delta_2 = 2 > 0\,, \quad \Delta_3 = 6 > 0$$

por lo tanto, se cumple la positividad.

Otro procedimiento para demostrar la positividad:

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + 2x_3{}^2 - x_1x_3 - x_3x_1 = (x_1 - x_3)^2 + 2x_2{}^2 + x_3{}^2 \geq 0$ por ser suma de cuadrados.

ii) Simetría:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

Se cumple por ser G simétrica.

iii) Bilinealidad:

$$f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \wedge \forall \alpha, \beta, \in \mathbb{R}$$

Se cumple por cumplirse la bilinealidad en el producto de matrices.

Por lo tanto, la expresión anterior define un producto escalar.

b) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ En base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$

c) $$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Cos}\,\theta = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

■

7.11 Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base ortonormada respecto de un cierto producto escalar en un espacio euclídeo, y sean:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_3$$

Determinar:

a) Expresión matricial del producto escalar en dicha base.

b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

c) $\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|$

d) Ángulo formado por los vectores **x** e **y**

(Septiembre 2000)

Resolución

a) Al ser la base ortonormada, G = I_3, es decir

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1, y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

b) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1\,2\,2)\mathrm{I}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 15$

c) $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{1+4+4} = 3$

$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

d) θ = ángulo $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

x e y no nulos

$$\mathrm{Cos}\,\theta = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} = \frac{15}{3\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^{\circ} \qquad \text{ó} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

■

CUESTIONES TEÓRICAS

7.12 Demostrar que todo producto escalar induce una norma.

(Septiembre 1999)

7.13 Definir los siguientes conceptos:

a) Aplicación lineal.

b) Endomorfismo.

c) Forma bilineal.

d) Producto escalar.

(Septiembre 2000)

Bibliografía

Anton, H. *Introducción al Álgebra Lineal* (Segunda Edición). Limusa, México, 1992.

Anzola, M. y Caruncho, J. *Problemas de Álgebra.* B.U.M.A.R., Madrid, 1978.

Burgos, J. De. *Álgebra Lineal.* McGraw-Hill, Madrid, 1993.

Burgos, J. De. *Curso de Álgebra y Geometría.* Alhambra, Madrid, 1977.

Casanova, J. y Vila, J. *Exámenes de Álgebra Lineal. Problemas Resueltos Propuestos en las E.T.S. de Ingenieros Industriales.* Ediciones Universidad y Cultura, Madrid, 1986.

Diego, B., Gordillo, E. y Valeiras, G. *Problemas de Álgebra y Geometría*. Deimos, Sevilla, 1986.

Espada, E. *Problemas Resueltos de Álgebra.* Editorial Universitaria de Barcelona, 1984.

Faddieev, D. y Sominski, I. *Problemas de Álgebra Superior.* Mir, Moscú, 1976.

García Galludo, M., Bronte Abaurrea, R., Rodriguez Herrerías, M. y Castiñeira Echeverría, CH. *Problemas de Álgebra y Analítica.* Los Autores, Madrid, 1984.

García García, J. y Lopez Pellicer, M. *Álgebra Lineal y Geometría (Curso Teórico-Práctico).* Marfil, Alcoy, 1977.

Hernández, E. *Álgebra y Geometría.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 1987.

Hill, R. *Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones* (Tercera Edición). Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1997.

Lang, S. *Álgebra Lineal.* Fondo Educativo Interamericano. México, 1976.

Leon, S. J. *Linear Algebra with Applications.* Prentice-Hall, Inc. 1998.

Luzárraga, A. *Problemas Resueltos de Álgebra Lineal.* Romargraf S.A, Barcelona, 1966.

Noble, B. y Daniel, J.W. *Applied Linear Algebra* (Tercera Edición). Prentice-Hall International Editions, Nueva Jersey, 1988.

Proskuriakov, I.V. *2000 Problemas de Álgebra Lineal.* Reverté, Barcelona, 1978.

Rojo, J. *Álgebra Lineal.* AC, Madrid, 1986.

Rojo, J. y Martín, I. *Ejercicios y Problemas de Álgebra Lineal.* Mc. Graw-Hill / Interamericana de España, S.A, Madrid, 1994.

Strang, G. *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1982

Tebar, E. *Problemas de Álgebra* (Segunda Edición). Tebar Flores, Madrid, 1973.

Villa, A. De La. *Problemas de Álgebra.* CLAGSA, Madrid, 1989.